Jednorozmerná vlnová rovnica na celom $\mathbb{R}$

Príklad 1. Pomocou d'Alambertovej formuly nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^2 u_{xx} && -\infty < x < \infty\ ,\ 0 < t < \infty\ , \\ & u(x,0) = 0 && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & u_t(x,0) = \cos x && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \end{aligned}$$

pre danú konštantu $c \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}\ :\ \tau > 0\}$.

Príklad 2. Pomocou d'Alambertovej formuly nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^2 u_{xx} && -\infty < x < \infty\ ,\ 0 < t < \infty\ , \\ & u(x,0) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & : \quad |x| \leq a \\ 0 & : \quad |x| > a \end{cases} && \\ & u_t(x,0) = 0 && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \end{aligned}$$

pre dané konštanty $a, b, c \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}\ :\ \tau > 0\}$.

Príklad 3. Pomocou d'Alambertovej formuly nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^2 u_{xx} && -\infty < x < \infty\ ,\ 0 < t < \infty\ , \\ & u(x,0) = e^x && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & u_t(x,0) = \sin x && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \end{aligned}$$

pre danú konštantu $c \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}\ :\ \tau > 0\}$.

Príklad 4. Pomocou d'Alambertovej formuly nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^2 u_{xx} && -\infty < x < \infty\ ,\ 0 < t < \infty\ , \\ & u(x,0) = \log(1 + x^2) && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & u_t(x,0) = 4 + x && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \end{aligned}$$

pre danú konštantu $c \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}\ :\ \tau > 0\}$.

Príklad 5. Pomocou d'Alambertovej formuly nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^2 u_{xx} && -\infty < x < \infty\ ,\ 0 < t < \infty\ , \\ & u(x,0) = 0 && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & : \quad |x| \leq a \\ 0 & : \quad |x| > a \end{cases} && \end{aligned}$$

pre dané konštanty $a, c \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}\ :\ \tau > 0\}$.
Potom načrtnite riešenie u v časových okamžikoch

$$t = \frac{a}{2c}\,, \frac{a}{c}\,, \frac{3a}{2c}\,, \frac{2a}{c}\,, \frac{5a}{c}.$$

Príklad 6. Pomocou d'Alambertovej formuly vieme nájsť funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^2 u_{xx} && -\infty < x < \infty\ ,\ 0 < t < \infty\ , \\ & u(x,0) = \phi(x) && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & u_t(x,0) = \psi(x) && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \end{aligned}$$

pre danú konštantu $c \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R}\ :\ \tau > 0\}$.
Ak sú funkcie ϕ a ψ nepárne funkcie premennej x, dokážte, že aj riešenie $u = u(x,t)$ vlnovej rovnice je nepárnou funkciou premennej x pre všetky t.

Príklad 7. Riešte $u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0\,,\ u(x,0) = x^2\,,\ u_t(x,0) = e^x$.

Príklad 8. Riešte $u_{xx} + u_{xt} - 20u_{tt} = 0\,,\ u(x,0) = \phi(x)\,,\ u_t(x,0) = \psi(x)$.

Jednorozmerná vlnová rovnica na polpriamke: odraz vĺn

Príklad 9. Nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}_+$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = a^2 u_{xx} && 0 < x, t < \infty \\ & u(0,t) = 0 && 0 < t < \infty \\ & u_t(x,0) = 0 \quad \text{a} \quad u(x,0) = \begin{cases} 0 & : \ 0 < x < c \\ c^{-1}h(x-c) & : \ x \in (c, 2c) \\ c^{-1}h(3c-x) & : \ x \in (2c, 3c) \\ 0 & : \ 3c < x < \infty \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

pre dané konštanty $a, c, h \in \mathbb{R}_+$.
Načrtnite graf riešenia v časových okamžikoch

$$t_k = \frac{kc}{2a}\,,\ k = 2, 3, 4, 7\,.$$

Príklad 10. Nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}_+$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = a^2 u_{xx} && 0 < x, t < \infty \\ & u_x(0,t) = 0 && 0 < t < \infty \\ & u_t(x,0) = 0 \quad \text{a} \quad u(x,0) = \begin{cases} 0 & : \ 0 < x < c \\ c^{-1}h(x-c) & : \ x \in (c, 2c) \\ c^{-1}h(3c-x) & : \ x \in (2c, 3c) \\ 0 & : \ 3c < x < \infty \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

pre dané konštanty $a, c, h \in \mathbb{R}_+$.
Načrtnite graf riešenia v časových okamžikoch

$$t_k = \frac{kc}{2a}\,,\ k = 2, 3, 4, 7\,.$$

Príklad 11. Nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x, t \in \mathbb{R}_+$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = c^2 u_{xx} && 0 < x, t < \infty \\ & u_x(0,t) = 0 && 0 < t < \infty \\ & u(x,0) = 0 \quad \text{a} \quad u_t(x,0) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} & : \ 0 < x < \varepsilon \\ 0 & : \ \varepsilon < x < \infty \end{cases}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

pre danú konštantu $c \in \mathbb{R}_+ = \{\tau \in \mathbb{R} \ : \ \tau > 0\}$. Ak si označíme riešenie úlohy (3) u_ε pre pevné ε, vypočítajte

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon\,.$$

Jednorozmerná vlnová rovnica na úsečke

Príklad 12. Nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x \in [0, \ell]$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = a^2 u_{xx} && 0 < x < \ell\,,\ 0 < t < \infty \\ & u(0,t) = u(\ell,t) = 0 && 0 < t < \infty \\ & u(x,0) = A \sin\frac{\pi x}{\ell}\,, \qquad u_t(x,0) = 0 && 0 \leq x \leq \ell \end{aligned} \tag{4}$$

pre dané konštanty $a, A, \ell > 0$.

Príklad 13. Nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x \in [0, \ell]$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = a^2 u_{xx} && 0 < x < \ell\,,\ 0 < t < \infty \\ & u(0,t) = u(\ell,t) = 0 && 0 < t < \infty \\ & u(x,0) = Ax\,, \qquad u_t(x,0) = 0 && 0 \leq x \leq \ell \end{aligned} \tag{5}$$

pre dané konštanty $a, A, \ell > 0$.

Príklad 14. Nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x \in [0, \ell]$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = a^2 u_{xx} && 0 < x < \ell\ ,\ 0 < t < \infty \\ & u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 && 0 < t < \infty \\ & u(x,0) = Ax\ , \qquad u_t(x,0) = 0 && 0 \leq x \leq \ell \end{aligned} \tag{6}$$

pre dané konštanty $a, A, \ell > 0$.

Príklad 15. Riešte $9u_{xx} - u_{tt} = 0\ ,\ 0 < x < \pi/2\ ,\ u(x,0) = \cos x\ ,\ u_t(x,0) = 0\ ,\ u_x(0,t) = 0\ ,\ u(\pi/2,t) = 0$.

Príklad 16. Riešte $u_{xx} - u_{tt} = 0\ ,\ 0 < x < \ell\ ,\ u(x,0) = 0\ ,\ u_t(x,0) = x\ ,\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

Jednorozmerná vlnová rovnica s pravou stranou na celom $\mathbb{R}$

Príklad 17. Pomocou d'Alambertovej formuly nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x,t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = u_{xx} + f(x) && -\infty < x < \infty\ ,\ 0 < t < \infty\ , \\ & u(x,0) = 0 && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & u_t(x,0) = 0 && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & \text{kde} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad |x| \leq 1 \\ 0 & : \quad |x| > 1\ . \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Príklad 18. Pomocou d'Alambertovej formuly nájdite funkciu $u = u(x,t)$ definovanú pre $x,t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, splňujúcu

$$\begin{aligned} & u_{tt} = u_{xx} + f(x,t) && -\infty < x < \infty\ ,\ 0 < t < \infty\ , \\ & u(x,0) = 0 && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & u_t(x,0) = 0 && \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ & \text{kde} \qquad f(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad |x| \leq 1 \ \text{ a } \ 0 < t < 1 \\ 0 & : \quad |x| > 1 \ \text{ alebo } \ t > 1\ . \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

■