Metóda charakteristík

Hlavnú myšlienku metódy charakteristík demonštrujeme na homogénnej lineárnej PDR prvého rádu v tvare

$$\left.\begin{aligned} &a(x,t)u_t \,+\, b(x,t)u_x \,=\, 0 \qquad \text{for} \quad x \in \mathbb{R},\ \mathrm{t} > 0 \\ &u(x,0) = g(x) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kde a, b, g sú dané funkcie.

Táto metóda prevedie riešenie úlohy (1) na riešenie systému ODR, čo by malo byť ľahšie. Ako si tento systém odvodíme?

Najprv predpokladajme, že riešenie $u = u(x,t)$ poznáme a vezmime si ľubovoľný, na chvíľu fixný, bod $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Hodnotu riešenia u v tomto bode si označíme $z_0 = u(x_0, t_0)$ a našou úlohou je určiť túto hodnotu. Pokúsime sa ju určiť tak, že nájdeme krivku, parametricky popísanú dvojicou funkcií $(x(s), t(s))$ pre $s \in I \subset \mathbb{R}$, ktorá bude spájať bod (x_0, t_0) s nejakým bodom $(y, 0)$, v ktorom je už daná hodnota $u(y, 0) = g(y)$. Aby sme mohli byť úspešní, musíme byť samozrejme schopní pozdĺž tejto krivky riešenie určiť.
Budeme teda hľadať

$$(x(s), t(s), z(s)) \quad \text{pre} \quad s \in I\,, \quad (x(0), t(0), z(0)) = (x_0, t_0, z_0) \tag{2}$$

pričom $z(s) = u(x(s), t(s))$. Formálne môžeme počítať

$$\dot{z}(s) = u_t(x(s), t(s))\dot{t}(s) + u_x(x(s), t(s))\dot{x}(s) \tag{3}$$

a vrátiť sa k rovnici (1). Ak budeme vyžadovať

$$\dot{t}(s) = a(x(s), t(s))\,, \quad \dot{x}(s) = b(x(s), t(s)) \qquad s \in I\,, \tag{4}$$

potom po dosadení (4) do (3) a z predpokladu, že u je riešením (1), dostaneme

$$\dot{z}(s) = 0\,, \quad \text{z čoho vyplýva, že} \quad z(s) \equiv z_0\,. \tag{5}$$

Ak teda bude existovať riešenie (4) s vlastnosťou

$$(x(\tau), t(\tau)) = (y, 0) \qquad \text{pre nejaké} \quad \tau = \tau(x_0, t_0) \in I \ \text{a} \ y = y(x_0, t_0) \in \mathbb{R}\,,$$

potom z (5) vyplýva, že

$$u(x_0, t_0) = u(y, 0) = g(y)\,.$$

Na nasledujúcich dvoch príkladoch uvidíme, s akými problémami sa pri riešení rovníc prvého rádu môžeme stretnúť.

Príklad A. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &xu_t + tu_x = 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{t} > 0\,, \\ &u(x,0) = e^{-x^2} \qquad\qquad\quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

V ktorej oblasti roviny tx je riešenie jednoznačne určené?

Príklad B. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{t} > 0\,, \\ &u(x,0) = g(x) \qquad\qquad\quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{7}$$

kde $g = g(x)$ je daná funkcia.

Transportná rovnica

Príklad 1. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &4u_t - 3u_x = 0 && x \in \mathbb{R}\,,\ 0 < \mathrm{t} < \infty\,, \\ &u(x,0) = x^3 && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Príklad 2. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &2u_t + 3u_x = 0 && x \in \mathbb{R}\,,\ 0 < \mathrm{t} < \infty\,, \\ &u(x,0) = \sin x && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Príklad 3. Nájdite riešenia $u = u(x,y)$ rovnice

$$u_y + u_{xy} = 0\,. \tag{10}$$

Príklad 4. Nájdite explicitnú formulu na vyjadrenie riešenia u problému

$$\begin{aligned} &u_t + \boldsymbol{b} \cdot Du + cu = f(x,t) && x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}\,,\ 0 < \mathrm{t} < \infty\,, \\ &u(x,0) = g(x) && x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}\,, \end{aligned} \tag{11}$$

kde $g(x), f(x,t)$ sú dané funkcie, $c \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Príklad 5. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &u_t + xu_x = 0 && x \in \mathbb{R}\,,\ 0 < \mathrm{t} < \infty\,, \\ &u(x,0) = x^3 && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Príklad 6. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &u_t + 2tx^2u_x = 0 && x \in \mathbb{R}\,,\ 0 < \mathrm{t} < \infty\,, \\ &u(x,0) = f(x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Príklad 7. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &(1+t^2)u_t + u_x = 0 && x \in \mathbb{R}\,,\ 0 < \mathrm{t} < \infty\,, \\ &u(x,0) = f(x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Príklad 8. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &\sqrt{1-t^2}\,u_t + u_x = 0 && x \in \mathbb{R}\,,\ 0 < \mathrm{t}\,, \\ &u(x,0) = x && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Príklad 9. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &xu_t - tu_x = 0 && x > 0\,,\ t > 0\,, \\ &u(x,0) = g(x) && x > 0\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Príklad 10. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &u_t - \frac{t}{x}u_x = u && x > 0\,,\ t > 0\,, \\ &u(x,0) = g(x) && x > 0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Príklad 11. Nájdite riešenie u problému

$$\begin{aligned} &u_t + u_x + u = e^{x+2t} && x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{t} > 0\,, \\ &u(x,0) = 0 && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{18}$$