# Metrické priestory

**MP1.** Nakreslite guľu $B_3(a)$ v $\mathbb{R}^n$, ak:

a) $n=2$, $a=(0,0)$, s metrikou $d(x,y)=\max\limits_{i\in\{1,2\}}|x_i-y_i|$,

b) $n=2$, $a=(0,2)$, s metrikou $d(x,y)=\begin{cases} \|x-y\| & x=\lambda y,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ \|x\|+\|y\| & \text{inokedy}\end{cases}$, pričom $\|\cdot\|$ je Euklidovská norma

c) $n=3$, $a=(0,0,0)$, s metrikou $d(x,y)=|x_3-y_3|+\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

**MP2.** Dokážte, že normy $\|x\|_1=|x_3|+\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ a $\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ sú ekvivalentné.

**MP3.** Dokážte, že množina $A=B_r(a)\cap B_R(b)\subset\mathbb{R}^n$ pre $n>1$ je otvorená, pričom $r>0$, $R>0$, $a,b\in\mathbb{R}^n$!

**MP4.** Nech $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ sú dané. Dokážte, že množina $E=\big\{f\in C(\langle 0,1\rangle): a<f(x)<b,\ x\in\langle 0,1\rangle\big\}$ je otvorená v priestore $C(\langle 0,1\rangle)$ so suprémovou metrikou.

**MP5.** Dokážte, že uzáver $\overline{A}$ množiny $A$ je najmenšia uzavretá množina, ktorá obsahuje množinu $A$.

**MP6.** Nájdite všetky hromadné body množiny $\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$ v $\mathbb{R}$.
Označme množinu všetkých hromadných bodov množiny $A$ ako $A'$. Zistite, či platí vo všeobecnosti $(A')'=A'$.

**MP7.** Nech $X=(2,3\rangle$ a $d(x,y)=|x-y|$. Dokážte, že postupnosť $\left\{2+\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v MP $(X,d)$, ale nie je tam konvergentná. Čo platí pre úplnosť MP $(X,d)$?

**MP8.** Nech $X=\mathbb{Q}$ a $d(x,y)=|x-y|$. Dokážte, že postupnosť $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v MP $(X,d)$, ale nie je tam konvergentná. Čo platí pre úplnosť MP $(X,d)$?

**MP9.** Nech $Y$ je neprázdna podmnožina množiny $X$ a $(X,d)$ je úplný MP. Dokážte, že $(Y,d)$ je úplný MP vtedy a len vtedy ak $Y$ je uzavretá množina v $X$.

**MP10.** Nech $d(x,y)=\arctan|x-y|$. Je $(\mathbb{R},d)$ úplný MP?

**MP11.** Dokážte, že MP $C(\langle a,b\rangle)$ s metrikou $d(f,g)=\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle}|f-g|$ tvorí úplný MP.

**MP12.** Dokážte, že MP $C(\langle a,b\rangle)$ s metrikou $d(f,g)=\sqrt{\int_a^b|f(x)-g(x)|^2dx}$ nie je úplný MP?

Návod: Uvažujte $\langle a,b\rangle=\langle 0,1\rangle$ a postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, pre $f_n(x)=x^{\frac{1}{2n-1}}$.

**MP13.** Je zobrazenie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=\frac{1}{2}x-3$ kontraktívne?

**MP14.** Nech $f(x)=\frac{1}{2}\ln x$ pre $x\in\langle 1,\infty)$. Má toto zobrazenie podľa Banachovej vety práve jeden pevný bod?

**MP15.** Dokážte, že postupnosť reťazových zlomkov

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\dots$$

má limitu a nájdite ju.
Návod: Vyšetrite funkciu $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$ na vlastnosti z Banachovej vety na intervale $\langle 2,3\rangle$.

**MP16.** Dokážte, že množina funkcií $M=\{1,t,t^2,t^3,\dots\}$ je ohraničená a uzavretá v MP $C(\langle 0,1\rangle)$ s metrikou $d(f,g)=\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle}|f-g|$, ale nie je tam kompaktná.