Funkcie viac premenných

FVP1. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \dfrac{\tan(xy)}{y} =$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{4-xy}}{xy} =$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} =$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} =$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}} =$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2\sin y)}{x^2y} =$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} =$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} =$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)} =$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} =$

FVP2. Nech $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto f(x,y)=(x+y,x-y)$. Dokážte, že táto funkcia je spojitá v každom bode z $\mathbb{R}^2$.

FVP3. Dokážte, že funkcia $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ak } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{ak } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ je spojitá v bode $(0,0)$ vzhľadom na každú premennú zvlášť, ale nie je spojitá vzhľadom k obidvom premenným.

FVP4. Nech $f(x)=\dfrac{x}{\|x\|}$, kde $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Určte definičný obor $D\subset\mathbb{R}^2$ a obor hodnôt $f(D)\subset\mathbb{R}^2$ tejto funkcie. Pomocou $\varepsilon-\delta$ definície spojitosti dokážte, že f je spojitá v ľubovoľnom bode a svojho definičného oboru D.

FVP5. Nech $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad |y|\le x^2\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x^2+y^2<4\}$. Načrtnite túto množinu a určte ∂U. Určte všetky hromadné body tejto množiny. Je táto množina konvexná? Je táto množina kompaktná?
Uvažujme funkciu $h(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pre $(x,y)\neq(0,0)$ a $h(0,0)=0$. Dokážte, že $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je nespojitá v $(0,0)$, avšak $h:U\to\mathbb{R}$ je spojitá v $(0,0)$.

FVP6. Dokážte (viacerým spôsobom), že nasledujúce limity neexistujú:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

FVP7. Vypočítajte dvojnásobné limity. Viete povedať na základe toho niečo o dvojnej limite? Vypočítajte dvojnú limitu, ak sa dá.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{\frac{3}{2}}y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

FVP8. Dokážte, že množina bodov nespojitosti funkcie $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y} & \text{ak } y\neq0\\ 0 & \text{ak } y=0\end{cases}$ nie je uzavretá množina.

FVP9. Dokážte, že funkcia $f(x,y) = \dfrac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$ je ohraničená na množine $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 9\}$ a nájdite jej minimum a maximum, ak existuje.

FVP10. Zistite, či nasledujúce funkcie sú rovnomerne spojité na množine M:

a) $f(x,y) = x^3 - y^3$ $\qquad$ $\mathrm{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$
b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $\mathrm{M} = \mathbb{R}^2$
c) $f(x,y) = \sin \frac{\pi}{1-x^2-y^2} =$ $\qquad$ $\mathrm{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$