Funkcie viac premenných 2

FVP11. Zistite všetky parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(x,y,z) = y^2(5y-2z)^{xz}$ v bode $(0,1,0)$.

FVP12. Nech $r>0, t>0$ a $u(r,t) = \dfrac{\cos(r-t)}{r}$. Upravte výraz $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = .$

FVP13. Zistite parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(x,y) = x\sqrt[5]{y}$ v každom bode.

FVP14. Zistite spojitosť a parciálne diferencovateľnosť v každom bode:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^4}$ b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{pre} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pre} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

FVP15. Zistite, či sú splnené nutné podmienky diferencovateľnosti, postačujúca podmienka diferencovateľnosti a či je funkcia diferencovateľná v bode (a,b), ak

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2-2x+1)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} & \text{pre} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{pre} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$, $(a,b) = (1,0)$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} + 3y & \text{pre} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pre} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(a,b) = (0,0)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pre} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pre} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(a,b) = (0,0)$

FVP16. Aproximujte funkcie (pokiaľ je to možné) v okolí bodu $(0,0)$ pomocou lineárneho zobrazenia:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{pre} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pre} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, b) ako v Príklade FVP15c

FVP17. Pomocou úplneho diferenciálu vypočítajte približne výraz:

a) $\sqrt{(3.02)^2+(3.98)^2}$, b) $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$, c) $\sin 29^\circ \tan 46^\circ$,

d) $0.97^{1.05}$, e) $\dfrac{0.01^2\, 0.009^2}{0.01^2+0.009^2}$,

FVP18. Nech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(\varphi,\theta) \mapsto \phi(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$.

a) Určte úplný diferenciál funkcie ϕ v bode $(\varphi_0,\theta_0) \in \mathbb{R}^2$.

b) Nech je daná diferencovateľná funkcia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$. Definujme funkciu $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\varphi,\theta) \mapsto g(\varphi,\theta) = f\big(\phi(\varphi,\theta)\big)$. Určte $\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}$ a $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$.

FVP19. Zistite $\operatorname{div}\big(\nabla f(x)\big)$ pre funkciu $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

FVP20. Zistite $\operatorname{div}\big(\nabla f(x)\big)$ a $\operatorname{rot}\big(\nabla f(x)\big)$ pre funkciu $f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

FVP21. Určte Taylorov polynóm stupňa n v bode (a,b), ak

a) $f(x,y)=-\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $n=2$, $(a,b)=(3,1)$

b) $f(x,y)=e^x\sin y$, $n=3$, $(a,b)=(0,0)$

FVP22. Nájdite deriváciu v smere vektora $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ v bode $(0,1)$, resp. $(0,0)$ funkcie

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{3x^2+4y^2} & \text{pre} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \frac{1}{7} & \text{pre} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

FVP23. Nájdite veľkosť a smer najväčšej derivácie v smere v bode $(2,1)$ funkcie $f(x,y)=x^{2y}$.

FVP24. Nájdite deriváciu v smere ν v bode $(1,1)$ funkcie $f(x,y)=x^2-xy+y^2$, ak vektor ν zviera uhol α s kladným smerom osi x. V akom smere je táto derivácia

a) najväčšia, b) najmenšia, c) nulová?

FVP25. Určte Jacobiho maticu a Jacobián (pokiaľ je to možné) zobrazenia $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, ak

a) $(u,v)\mapsto x=\frac{u}{v}$

b) $u\mapsto(x,y)=(u\tan u,u\sin u)$

c) $(u,v)\mapsto(x,y)=(u\cos v,u\sin v)$

d) $(u,v)\mapsto(x,y,z)=(uv,u^2+v^2,u^2-v^2)$

e) $(u,v,w)\mapsto(x,y)=(u^2+v^2+w^2,u+v+w)$

FVP26. Nájdite lokálne extrémy funkcie

a) $f(x,y)=xy(6-x-y)$,

b) $f(x,y)=x^2y^2$

c) $f(x,y)=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$

d) $f(x,y)=(2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}$

e) $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ pre $x>0$, $y>0$, $z>0$.