1) Vypočítajte parciálne derivácie funkcie f v bode C:

a) $f(x,y)=\ln(x^2-y^2),\ C=(2,-1)$ b) $f(x,y)=(2^x)^{3y},\ C=\left(\frac{1}{2},2\right)$

c) $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & pre \quad x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0 & pre \quad x=y=z=0\end{cases},\ C=(0,0,0)$

2) Dokážte, že funkcia $z=z(x,y)$ vyhovuje danej rovnici:

a) $z(x,y)=e^{\frac{x}{y^2}}$ $\quad 2x.\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)+y.\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)=0$

b) $z(x,y)=arctg\,\dfrac{x+y}{x-y}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

3) Dokážte, že funkcia $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2-2x+1)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} & pre \quad (x,y)\neq(1.0)\\ 0 & pre \quad (x,y)=(1.0)\end{cases}$ je spojitá v bode $(1,0)$,

má v bode $(1,0)$ parciálne derivácie, ale nemá spojité parciálne derivácie v tomto bode.

Je táto funkcia diferencovateľná v bode $(1,0)$?

4) Vypočítajte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, ak $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$. Je táto funkcia diferencovateľná v bode $(0,0)$?

5) Ukážte, že funkcia $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & pre \quad (x,y)\neq(0.0)\\ 0 & pre \quad (x,y)=(0.0)\end{cases}$ má parciálne derivácie v každom bode , ale tieto

parciálne derivácie nie sú spojité v bode $(0,0)$, napriek tomu je táto funkcia diferencovateľná v $(0,0)$.

6) Určte rovnicu dotykovej roviny (pokiaľ existuje) ku grafu funkcie $f(x,y)$ v bode $T=[C,f(C)]$:

a) $f(x,y)=arctg\,\dfrac{y}{x},\ C=(1,-1)$

b) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & pre \quad (x,y)\neq(0.0)\\ 0 & pre \quad (x,y)=(0.0)\end{cases},\ C=(0,0)$

c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ C=(0,0)$

7) Určte rovnicu dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom

a) plochy $z=(x^2-3y^2)^2$ rovinou $y=1$, v bode $A=(2,1,1)$

b) plochy $z=x^2+2y^2$ rovinou $x=3$, v bode $A=(3,2,17)$.

8) Vyšetrite diferencovateľnosť funkcie f v bode (x_0,y_0):

a) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{2x^3y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},\ (x_0,y_0)=(0,0)$

b) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3},\ (x_0,y_0)=(0,0)$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},\ (x_0,y_0)=(0,0)$

d) $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

e) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$

g) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$

h) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}, & (x,y)\neq(1,-1) \\ 0 & (x,y)=(1,-1) \end{cases}$, $(x_0,y_0)=(1,-1)$

9) Pomocou totálneho diferenciálu vhodnej funkcie $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$, vypočítajte približnú hodnotu (ak sa dá):

a) $1{,}02^{2{,}98}$

b) $\sqrt{(0{,}2)^2+(0{,}1)^2}$

c) $\sqrt{(6{,}2)^2+(7{,}9)^2}$

d) $\dfrac{2{,}01.1{,}03}{(2{,}01)^2-(1{,}03)^2}$

e) $1{,}002.(2{,}003)^2.(3{,}004)^3$

f) $\dfrac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98.(1{,}05)^4}}$