1) Vypočítajte:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln\left(x^2+y^2\right)$ b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \dfrac{\sin(x-y+z-1)}{(x+z)-(y+1)}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^2\cos\dfrac{1}{xy^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{e^{xy}-1}{x}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

2) Dokážte, že neexistujú nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{2x^2+y^2}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$ f) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{2xyz}{x^3+y^3+z^3}$

3) Vypočítajte dvojnásobné limity v danom bode. Čo viete povedať o existencii limity $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ na základe predchádzajúceho výsledku?

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ v (∞,∞) b) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ v $(0,0)$ c) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$ v (∞,∞)

d) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ v $(0,0)$ e) $f(x,y)=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$ v $(0,0)$

f) $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ v $(0,0)$

4) Nájdite body nespojitosti:

a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$ b) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ c) $f(x,y)=\ln\left(4-x^2-y^2\right)$

d) $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}$ e) $f(x,y)=\dfrac{\sin x\sin y}{xy}$ f) $f(x,y,z)=\dfrac{2y}{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$

5) Pre akú hodnotu c je funkcia $f(x,y)=\begin{cases} 3x+4y-2z+5 & (x,y,z)\neq(0,1,2) \\ c & (x,y,z)=(0,1,2) \end{cases}$ v bode $(0,1,2)$ spojitá?

6) Vyšetrite spojitosť funkcie $f(x,y)$ v R^2:

a) $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$ b) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ c) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ d) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

Čo viete povedať o spojitosti týchto funkcií vzhľadom na každú premennú zvlášť? Dajú sa funkcie spojite dodefinovať v bodoch nespojitosti?

7) Dokážte, že funkcia $f(x,y)=xye^{-xy}$ je ohraničená na množine $M=\left\{(x,y)\in R^2 : x\geq 0, y\geq 0\right\}$ a nájdite ich maximum a minimum, ak existujú!

8) Dokážte (z definície), že nasledujúce funkcie sú rovnomerne spojité na uvedených množinách:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $M=\left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$
b) $f(x,y)=x^3-y^3$, $M=\left\{(x,y)\in R^2 : 1\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1\right\}$
c) $f(x,y)=x+2y+3$, $M=R^2$

9) Ako treba zmeniť definíciu funkcie $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, aby bola rovnomerne spojitá na množine $M=\left\{(x,y)\in R^2 : 0<x^2+y^2\leq 1\right\}$?

10) Dokážte (z definície), že funkcia $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y}$ nie je rovnomerne spojitá na svojom definičnom obore!