1) Nech d_1 a d_2 sú metrické priestory na množine X. Sú funkcie

a) $d_1(x,y)+d_2(x,y)$ b) $\max\{1, d_1(x,y)\}$ c) $\min\{1, d_1(x,y)\}$

metrikami na X ?

2) Nech $X = R^2$ a nech $d(x,y) = \left(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}\right)^2$. Je (X,d) metrický priestor?

3) Nech $X = R$. Zistite, či nasledujúce funkcie sú metrikami na R:

a) $d(x,y) = arctg|x-y|$ b) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ c) $d(x,y) = |x-y|^m$

4) Nech $X = N$. Je táto množina metrický priestor, ak k nej daná vzdialenosť je pre všetky $k,m \in N$ definovaná jedným zo vzťahov:

a) $d(k,m) = |k-m|$ b) $d(k,m) = |k^2 - m^2|$

c) $d(k,m) = |k-m|^2$ d) $d(k,m) = \begin{cases} 0 & ak \quad k = m \\ \dfrac{1}{1+\min\{k,m\}} & ak \quad k \neq m \end{cases}$

5) Zistite, či dané funkcie sú metrikami v R^n ($n \geq 2$):

a) $d(x,y) = |x_1^3 - y_1^3| + |x_2^3 - y_2^3| + \ldots + |x_n^3 - y_n^3|$

b) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2^2 - y_2^2| + \ldots + |x_n^n - y_n^n|$

6) Nech $\varphi : \langle 0,\infty) \to R$ je taká spojitá funkcia, že $\varphi' > 0$, $\varphi'' \leq 0$ na $(0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$. Potom funkcia $d : R \times R \to R$ definovaná predpisom $d(x,y) = \varphi(|x-y|)$ je metrikou na R. Dokážte!

7) Nech $C^1\langle a,b\rangle$ je množina všetkých spojitých funkcií na intervale $\langle a,b\rangle$, ktoré majú spojitú deriváciu. Definujeme na C^1 funkcie:

a) $d_1(f,g) = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x) - g(x)| + \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f'(x) - g'(x)|$

b) $d_2(f,g) = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} \left(|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|\right)$.

Dokážte, že funkcie d_1 a d_2 sú metriky na $C^1\langle a,b\rangle$.

8) Dokážte 2. trojuholníkovú nerovnosť, ktorá platí v ľubovoľnom metrickom priestore: $|d(x,y) - d(z,y)| \leq d(x,z)$

9) Nech d, d_T, $d_{\max}$ sú metriky v R^n definované nasledovne:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \qquad d_T(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, \qquad d_{\max}(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|.$$

Dokážte nerovnosti:

a) $d(x,y) \leq d_T(x,y) \leq n\,d(x,y)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} d(x,y) \leq d_{\max}(x,y) \leq d(x,y)$

c) $d_{\max}(x,y) \leq d_T(x,y) \leq n\,d_{\max}(x,y)$

Na základe týchto nerovností dokážte, že metriky d, d_T, $d_{\max}$ sú ekvivalentné.

10) Ukážte, že k ekvivalentnosti metrík d_1, d_2 definovaných na priestore X stačí, aby existovali kladné konštanty a, b tak, že pre všetky $x,y \in X$ platí $a.d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b.d_1(x,y)$. Ukážte, že táto podmienka nie je nutná k ekvivalentnosti metrík d_1 a d_2 !

11) Dokážte, že metriky

$$d_1(f,g)=\sup_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in\langle a,b\rangle}|f'(x)-g'(x)| \text{ a}$$

$$d_2(f,g)=\sup_{x\in\langle a,b\rangle}\left(|f(x)-g(x)|+|f'(x)-g'(x)|\right)$$

definované na množine $C^1\langle a,b\rangle$ (priestor spojitých funkcií na intervale $\langle a,b\rangle$, ktoré tam majú aj spojitú deriváciu) sú v tomto priestore ekvivalentné.

12) Pre každé celé číslo $a\geq 0$ definujme na $N\times N$ ($N=\{1,2,\ldots\}$) funkciu d_a nasledujúcim spôsobom:

$d_a(n,n)=0$ pre $\forall n\in N$, $d_a(m,n)=a+\dfrac{1}{m+n}$ pre $\forall m,n\in N$, $m\neq n$. Ukážte:

a) d_0 nie je metrikou,

c) d_a, pre $a\geq 1$ je metrika na N,

b) pre všetky $a,b\geq 1$ sú d_a a d_b ekvivalentné metriky.

13) Dokážte, že postupnosť $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ bodov z R^n s metrikou $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ konverguje k bodu $x_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\in R^n$ práve vtedy, ak platí $\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^0$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ (t.j. v euklidovských priestoroch postupnosť bodov konverguje práve vtedy, keď konverguje po súradniciach).

14) Vypočítajte limitu postupnosti v R^3: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{0.1}},\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n,\dfrac{n^2+7}{n+1}\right)$.

Je množina $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{0.1}},\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n,\dfrac{n^2+7}{n+1}\right);n\in N\right\}$ uzavretá v R^3?

15) Definujte otvorenú guľu v metrickom priestore (X,d). Dokážte, že každá otvorená guľa v X je otvorená množina v X.

16) Definujte uzavretú guľu v metrickom priestore (X,d). Dokážte, že každá uzavretá guľa v X je uzavretá množina v X.

Príklad 1.2. Nech $x^k\in\mathbb{R}^3$, $x^k=(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$, kde

$$\xi_k=\sqrt[k]{k},\qquad \eta_k=\frac{k^2}{3^k},\qquad \zeta_k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Je postupnosť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentná v $\mathbb{R}^3$? Ak áno, čo je jej limita?

Riešenie: Z predchádzajúceho kurzu analýzy už vieme zistiť, k čomu konvergujú postupnosti $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}$:

$$\xi_k\to 1,\qquad \eta_k\to 0,\qquad \zeta_k\to \mathrm{e}\qquad \text{pre } k\to\infty,$$

teda uvažujme bod $a=(1,0,\mathrm{e})\in\mathbb{R}^3$. Keďže

$$\lim_{k\to\infty}\|x^k-a\|=\lim_{k\to\infty}\left(\left(\sqrt[k]{k}-1\right)^2+\left(\frac{k^2}{3^k}\right)^2+\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k-\mathrm{e}\right)^2\right)^{1/2}=0,$$

z definície 1.3 vidíme, že postupnosť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná v $\mathbb{R}^3$ a konverguje k prvku $a=(1,0,\mathrm{e})$.

1.7. Rozhodnite, či podmnožiny $M \subset \mathbb{R}^3$ s euklidovskou metrikou sú otvorené, uzavreté, ohraničené, či majú hromadné body, ak

(a) $M = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$,

(b) $M = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,

(c) $M = \mathbb{R} \times (0,1) \times (0,1)$,

(d) $M = \mathbb{N} \times \langle 0,1 \rangle \times \{0\}$.

1.8. Pre podmnožiny $A \subset \mathbb{R}^2$ určte $\mathrm{Int}(A)$, ∂A a $\overline{A}$, ak

(a) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$,

(b) $$A = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\left(\frac{5}{13}\right)^{\ln n}, \int_1^n \frac{1}{t^{14}} \mathrm{d}t \right\rangle \right] \times \left[\bigcap_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i!}, 13 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right) \right],$$

(c) $$A = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\left(\frac{1}{13}\right)^{n}, \sqrt[n]{4^n + 13^n} \right) \right] \times \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2^n}, \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right) \right].$$

Ktoré z týchto množín sú otvorené a ktoré uzavreté?

1.9. Nájdite hromadné body postupností $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}^m$, ak

(a) $$x^n = \left(\frac{n+1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \frac{\sin n}{n}, 1 + \left(\frac{-n}{1+n}\right)^n \right),$$

(b) $$x^n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n, n \right),$$

(c) $$x^n = \left(\frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right), \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) \right),$$

(d) $$x^n = \left(\frac{n+1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right), \frac{n+1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right), \frac{1}{n} \right),$$

(e) $$x^n = \left(1, \frac{2+n}{n}, 3 \arctan n, \tan\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) \right),$$

(f) $$x^n = \left(1 + \left(\frac{-n}{1+n}\right)^n, 1 - \left(\frac{n}{1-n}\right)^n \right).$$