FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

METRICKÉ PRIESTORY

RNDr. Kristína Rostás, PhD.

PREDMET: Matematická analýza (3)

2010/2011

1. DEFINÍCIA METRICKÉHO PRIESTORU

V matematickej analýze je limitný prechod veľmi dôležitá operácia. Dôležitú úlohu pri tejto operácií hrá vzdialenosť bodov. Pod pojmom vzdialenosť rozumieme:

- v $\mathbb{R}$ (na priamke) dĺžku $d = |x-y|$,
- v $\mathbb{R}^2$ (v rovine) dĺžku $d = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$.

Ak to zovšeobecníme tak, že o reálnych číslach uvažujeme ako o množine, na ktorej je definovaná vzdialenosť, dostaneme pojem metrický priestor.

Definícia 1. *Nech $X \neq 0$ je nejaká množina. Definujme zobrazenie $d : X \times X \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňa nasledujúce vlastnosti*

1.) $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2.) $\quad d(x,y) = d(y,x)$ *pre všetky* $x,y \in X$, *(symetria)*

3.) $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *pre všetky* $x,y,z \in X$, *(trojuholníková nerovnosť)*

*Usporiadanú dvojicu (X,d) nazývame **metrickým priestorom**, zobrazenie d **metrikou** a množinu X **základnou množinou**.*

Poznámka 1. *Metrika d je vždy nezáporná. Na tej istej množine môžeme definovať rôzne metriky.*

<u>*Príklad 1*</u>. Nech $X \neq 0$ je ľubovoľná množina, na ktorej je definované zobrazenie d nasledujúcim spôsobom:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x = y \\ 1 & \text{pre} \quad x \neq y \end{cases}$$

Dokážte, že dvojica (X,d) tvorí metrický priestor, ktorý nazývame metrickým priestorom izolovaných bodov.

<u>*Príklad 2*</u>. Nech $X = \mathbb{R}$ a $d(x,y) = |x-y|$. Dokážte, že je to metrika.

<u>*Príklad 3*</u>. Nech $X = \mathbb{R}^n$, t.j. $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$ a

a) $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ označenie E^n

b) $d_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ označenie E_1^n

c) $d_0(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ označenie E_0^n

Dokážte, že množina $X = \mathbb{R}^n$ tvorí metrický priestor s danými zobrazeniami.

Neskoršie ukážeme, že tieto metricé priestory sú v určitom zmysle ekvivalentné.

Príklad 4. Nech $X = C\langle a,b\rangle$, t.j. je množina všetkých reálnych funkcií definovaných a spojitých na intervale $\langle a,b\rangle$. Dokážte, že d je metrika na množine X, ak

a) $d(f,g) = \max_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|$

b) $d(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt}$

Definícia 2. *Nech (X,d) je metrický priestor. Ak $M \neq 0$ je podmnožina množiny X, tak (M,d) je tiež metrický priestor a nazývame ho **podpriestorom metrického priestoru** (X,d). Ďalej, nech $x_0 \in X$ je daný bod a $\varepsilon > 0$ ľubovoľné reálne číslo. Množina*

$$S(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\} \quad \textit{resp.} \quad S[x_0,\varepsilon] = \{x \in X : d(x,x_0) \le \varepsilon\}$$

*sa nazýva **otvorená** resp. **uzavretá guľa so stredom v bode** x_0 **a polomerom** ε (ε-okolie bodu x_0).*
Pre $0 \neq A \subset X$ definujme číslo

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x,y),$$

*ktoré sa nazýva **priemer** resp. **diameter množiny** A. V prípade, že $\operatorname{diam} A < \infty$, tak množina A je **ohraničená**, inak (t.j. ak $\operatorname{diam} A = \infty$) je **neohraničená**.*

Veta 1. *Priemer množiny má nasledujúce vlastnosti:*

- *Ak $0 \neq A_1 \subset A_2 \subset X$, tak pre ich priemer platí $\operatorname{diam} A_1 \le \operatorname{diam} A_2$.*
- *Nech $S(x_0,\varepsilon)$ je guľa v metrickom priestore (X,d), potom $\operatorname{diam} S(x_0,\varepsilon) \le 2\varepsilon$.*

2. KONVERGENCIA V METRICKÝCH PRIESTOROCH

Definícia 3. *Hovoríme, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru (X,d) **konverguje** k bodu $x \in X$ ak $\lim_{k \to \infty} d(x_k,x) = 0$, t.j.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_0 \, : \, d(x_k,x) < \varepsilon.$$

*Ak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$, tak x nazývame **limitou** danej postupnosti.*

Veta 2. *Každá postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ v metrickom priestore (X,d) má najviac jednu limitu.*

Nech $k_1 < \ldots < k_i < \ldots$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel, potom postupnosť $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ sa nazýva **vybraná postupnosť** postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ak postupnosť konverguje k nejaému prvku, tak aj vybraná postupnosť tej postupnosti konverguje k tomu istému prvku.

Veta 3. *Ak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru (X,d) konverguje, tak množina jej hodnôt je ohraničená.*

Ako sme už v prvej časti videli, na tej istej množine možno zaviesť rôzne metriky. Preto je na mieste otázka, či tieto metriky v určitom zmysle nerovnajú.

Definícia 4. *Nech d_1 a d_2 sú metriky na X. Hovoríme, že tieto metriky sú **ekvivalentné**, ak pre všetky postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodov z X platí, že $x_k \to x$ v (X,d_1) práve vtedy, ak $x_k \to x$ v (X,d_2).*

Poznámka 2. *Metriky v príklade 3. sú ekvivalentné.*

V prvom ročníku pri konvergencii funkcie, resp. postupnosti ste sa učili Cauchy - Bolzanovo kritérium, čo hovorí, že funkcia f má v bode a konečnú limitu, t.j. konverguje práve vtedy, ak platí:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, O(a) \quad \forall\, x,y \in (O(a) - \{a\}) \cap D(f): \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Vo všeobecnosti v metrických priestoroch táto ekvivalencia nie je taká jednoznačná. Najprv uvedieme pojem, ktorý súvisí s vlastnosťou spomínanou vo vete vyššie.

Definícia 5. *Postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru (X,d) sa nazýva **cauchyovská** alebo **fundamentálna**, ak*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k > k_0, m > k_0: \quad d(x_k, x_m) < \varepsilon.$$

Veta 4. *Každá konvergentná postupnosť bodov metrického priestoru je cauchyovská.*

Poznámka 3. *Opačná implikácia nemusí platiť, teda nie každá cauchyovská postupnosť musí mať limitu.*

Príklad 5. Nech $(\mathbb{Q},d)$ je metrický priestor racionálnych čísel s metrikou $d(x,y) = |x-y|$ pre $x,y \in \mathbb{Q}$. Zistite, či postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $x_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ je cauchyovská a konvergentná.

Príklad 6. Nech (X,d) je metrický priestor, kde $X = (0,1)$ a $d(x,y) = |x-y|$. Zistite, či postupnosť $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$, kde $x_k = \frac{k-1}{k}$ je cauchyovská a konvergentná.

3. KLASIFIKÁCIA BODOV A PODMNOŽÍN V MET. PRIES.

Definícia 6. *Nech* (X,d) *je metrický priestor a* $A \subset X$. *Bod* $x_0 \in X$ *sa nazýva* ***hromadný bod množiny*** A, *ak existuje prostá postupnosť* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *bodov množiny* A, *ktorá konverguje k bodu* x_0. *Množinu hromadných bodov označme* A^d.

Poznámka 4. *Bod* x_0 *je hromadným bodom množiny* A, *ak ľubovoľná guľa so stredom v* x_0 *obsahuje body množiny* A *rôzne od* x_0.
Hromadné body môžu mať len nekonečné množiny priestoru X.

Definícia 7. *Nech* A *je podmnožina metrického priestoru a nech* A^d *je množina všetkých hromadných bodov množiny* A. *Potom množinu* $\overline{A}$, *ktorá je zjednotením množín* A *a* A^d, *nazývame* ***uzáver množiny*** A. *Hovoríme, že množina* A *je*

- ***uzavretá****, ak* $\overline{A} = A$,
- ***otvorená****, ak* $X - A$ *je uzavretá,*
- ***obojaká****, ak je uzavretá aj otvorená.*

Veta 5. *Nech* (X,d) *je metrický priestor a* $A \subset X$. *Potom nasledujúce tvrdenia sú platné:*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
2. $\overline{X} = X$,
3. $A \subseteq \overline{A}$,
4. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$,
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
7. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : A \cap S(x,\delta) \neq \emptyset$.

Príklady na uzavreté množiny:

- každá konečná množina,
- uzáver ľubovoľnej množiny,
- uzavretý n-roznerný interval a uzavretá guľa.

Príklady na otvorené množiny:

- otvorený n-roznerný interval a otvorená guľa.

Množiny $\emptyset$ a X sú obojaké množiny.
Množina racionálnych čísel $\mathbb{Q}$ nie je ani uzavretá ani otvorená.

Veta 6. *Nech* (X,d) *je metrický priestor. Potom platí:*

- *Prienik ľubovoľného počtu uzavretých množín z* X *je uzavretá množina v* X.
- *Zjednotenie konečného počtu uzavretých množín z* X *je uzavretá množina v* X.
- *Prienik konečného počtu otvorených množín z* X *je otvorená množina v* X.
- *Zjednotenie ľubovoľného počtu otvorených množín z* X *je otvorená množina v* X.

Príklad 7. Povedzte niečo o otvorenosti a uzavretosti množín $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle 0, \frac{n}{n+1} \right\rangle$ a $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right)$.

Definícia 8. *Nech* (X,d) *je metrický priestor,* $A \subset X$ *a* $x_0 \in X$. *Bod* x_0 *sa nazýva*

- ***vnútorný bod množiny*** A, *ak existuje taká otvorená guľa* $S(x_0,\varepsilon)$, *že* $S(x_0,\varepsilon) \subset A$,
- ***izolovaný bod množiny*** A, *ak existuje taká otvorená guľa* $S(x_0,\varepsilon)$, *že* $S(x_0,\varepsilon) \cap A = \{x_0\}$,
- ***hraničný bod množiny*** A, *ak pre všetky* $\varepsilon > 0$ *platí, že* $S(x_0,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ *a súčasne* $S(x_0,\varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Množina všetkých vnútorných bodov sa nazýva ***vnútro množiny*** A, *použijeme označenie* $\mathrm{int}A$.
Množina všetkých hraničných bodov sa nazýva ***hranica množiny*** A, *použijeme označenie* ∂A.

Poznámka 5. *Množina je otvorená, ak všetky jej body sú vnútorné. Pre množinu všetkých vnútorných bodov* $\mathrm{int}A$ *platí, že* $\mathrm{int}A \subseteq A$.

Príklad 8. Majme metrický priestor E^n a množinu v ňom, definovanú nasledovne

$$A = \{(x,y) \in E^n : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Zistite hranicu tejto množiny.

Príklad 9. Zistite hranicu množiny racionálnych čísel v priestore E^1.

4. ÚPLNÉ A KOMPAKTNÉ METRICKÉ PRIESTORY

Vo Vete 4. sme ukázali, že každá konvergentná postupnosť metrického priestoru je cauchyovská. Uviedli sme aj príklady, že opačná implikácia vo všeobecnosti neplatí. Ale je na mieste otázka, čo ak platí aj tá opačná implikácia?

Definícia 9. *Metrický priestor (X,d) sa nazýva* ***úplný****, ak každá cauchyovská postupnosť bodov tohto priestoru konverguje v X.*

Príklad 10. Priestory z príkladov 1., 2., 3. a 4a. sú úplné. Priestor z príkladu 4b. nie je úplný.

Veta 7. *Uvažujme neprázdnu podmnožinu $Y \subset X$ a nech (X,d) je úplný metrický priestor. Potom (Y,d) je úplný metrický priestor práve vtedy, keď Y je uzavretá v X.*

Definícia 10. *Metrický priestor (X,d) sa nazýva* ***kompaktný****, ak z každej postupnosti bodov priestoru X možno vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá konverguje v X. Podmnožina A metrického priestoru (X,d) sa nazýva* ***kompaktná****, ak podpriestor (A,d) priestoru (X,d) je kompaktný.*

Poznámka 6. *Každá kompaktná množina je uzavretá a ohraničený.*
Podmnožina Euklidovského priestoru E^n je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.

Literatúra

[1] M. BARNOVSKÁ, K. SMÍTALOVÁ, *Matematická analýza III.*

[2] M. BARNOVSKÁ A KOLEKTÍV, *Cvičenie z matematickej analýzy III.*

[3] A. W. NAYLOR, G. R. SELL, *Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách*