

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FUNKCIE N REÁLNYCH PREMENNÝCH

RNDr. Kristína Rostás, PhD.

PREDMET: Matematická analýza (3)

2010/2011

1. DEFINÍCIA REÁLNEJ FUNKCIE N PREMENNÝCH

Za základný priestor považujeme teda n -rozmerný euklidovský (metrický) priestor, s vzdialenosťou (metrikou) $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, kde $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Namiesto E^n ale použijeme obvyklé značenie $\mathbb{R}^n$.

Definícia 1. .

Funkciu, ktorej definičným oborom $D(f)$ je $\mathbb{R}^n$ (alebo jej podmnožina) a oborom hodnôt $H(f)$ je $\mathbb{R}^1$ (alebo jej podmnožina) nazývame **reálnou funkciou n reálnych premenných**. Reálna funkcia n reálnych premenných priradzuje teda n -ticiam reálnych čísel $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ reálne čísla y - **funkčné hodnoty**. Píšeme $y = f(\bar{x})$ alebo podrobnejšie $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Niekedy vyslovíme, kvôli prehľadnosti a zrozumiteľnosti definície a vety pre $n = 2$

Poznámka 1. Funkciu dvoch premenných budeme značiť $z = f(x, y)$ a funkciu troch premenných ako $u = f(x, y, z)$.

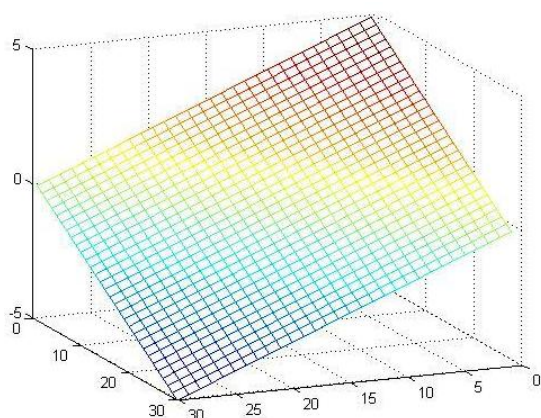
Definícia 2. .

Grafom funkcie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definovanej na $M \subset (f)$ je množina všetkých bodov $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$, pre ktoré platí: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ a $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

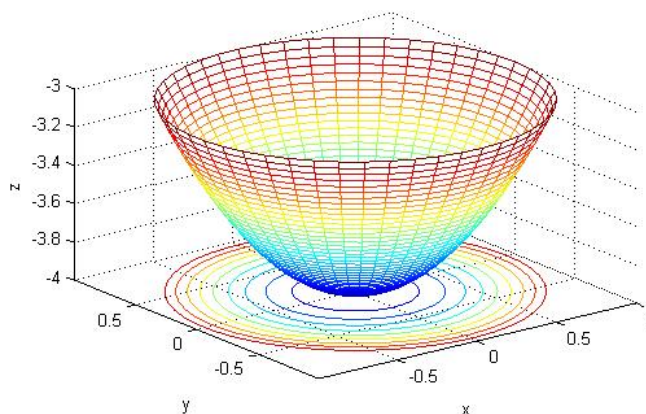
Poznámka 2. Pri zostrojovaní grafu funkcie dvoch premenných je výhodné zostrojiť priesečnice grafu funkcie rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami, alebo rovinami prechádzajúcimi niektorou zo súradnicových osí

- priesečnice grafu funkcie rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami - **rezy**
- rezy rovnobežné s rovinou $\overline{xy}$ - **vrstevnice**

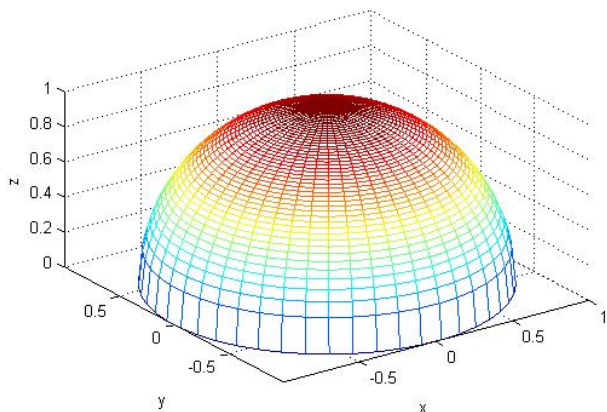
Príklad 1. :



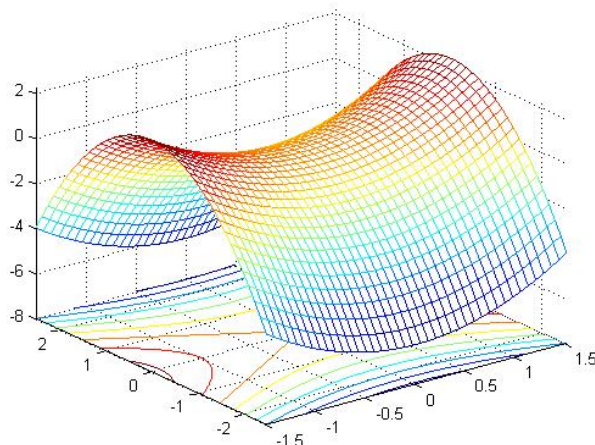
(a) $f(x, y) = 5 - x - y$ - graf je rovina



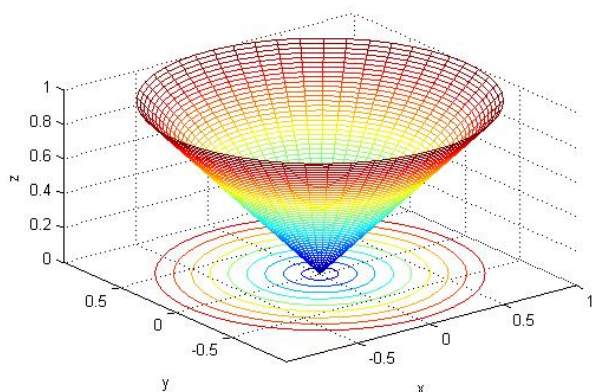
(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ - graf je rotačný paraboloid



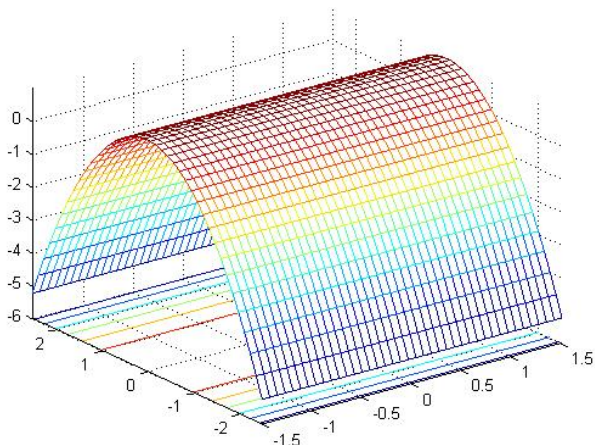
(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ - graf je polguľa



(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ - graf je hyperbolický paraboloid



(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ - graf je kuželová plocha



(d) $f(x,y) = 1 - y^2$ - graf je parabolická valcová plocha

2. LIMITA A SPOJITOSŤ FUNKCIE N PREMENNÝCH

Definícia 3. .

Hovoríme, že **funkcia** f má v hromadnom **bode** $\bar{a}$ svojho definičného oboru $D(f)$ **limitu** b , ak $\forall O(b) \quad \exists O(\bar{a}) \quad \forall \bar{x} \in O(\bar{a}) \cap D(f), \bar{x} \neq \bar{a} : f(\bar{x}) \in O(b)$. Označenie: $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = b$ alebo

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b.$$

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x} \in D(f)$ s vlastnosťou $0 < d(\bar{x}, \bar{a}) < \delta : |f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$
- Pod symbolom $\bar{x} \rightarrow \infty$ budeme rozumieť $x_i \rightarrow \infty$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$.

Poznámka 3. Podobne ako v prípade limity reálnej funkcie jednej reálnej premennej aj pre funkcie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ platia vety o limite súčtu, súčinu funkcií, o limite zloženej funkcie atď'.

Príklad 2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = ?$

Je to limita typu 0.ohraničená funkcia, teda výsledok je 0. Dokážeme to z definície: Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo, potrebujeme nájsť takú δ , že ak platí $0 < d(\bar{x}, \bar{0}) < \delta$, čo v našom prípade znamená $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, platí aj $|(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0| < \varepsilon$. Lenže platí, že $|a| < \sqrt{a^2 + b^2}$, preto $|x| < \delta$ a $|y| < \delta$. Ďalej platí $|(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0| \leq |x+y| \leq |x| + |y| < 2\delta$. Teda stačí si zvoliť δ tak, aby platila nerovnosť $2\delta \leq \varepsilon$, t.j. $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ak hromadným bodom je bod ∞ , tak limita je definovaná nasledovne:

Definícia 4.

Nech funkcia f je definovaná na množine M , ktorá obsahuje body ľubovoľne vzdialené od bodu $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Číslo b sa nazýva **limitou funkcie** f pre $\bar{x} \rightarrow \infty$ práve vtedy, ak $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall \bar{x} \in M$ s vlastnosťou $d(\bar{x}, \bar{0}) > K : |f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$.

Definícia 5.

Nech $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$. Hovoríme, že funkcia f je **spojitá v bode** $\bar{a} \in M$, ak $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} \in M$ s vlastnosťou $0 < d(\bar{x}, \bar{a}) < \delta : |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

Poznámka 4. Ak v definícii bod $\bar{a}$ je hromadným bodom množiny M , tak definícia je ekvivalentná s tým, že $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$.

S nasledujúcou vetou sme sa stretli v predchádzajúcej časti, uvedieme ju bez dôkazu.

Veta 1. (Heineho definícia limity)

Nech $\bar{a}$ je hromadný bod množiny $M \subseteq D(f)$. Funkcia f má v bode $\bar{a}$ limitu číslo b práve vtedy, ak **pre každú** postupnosť bodov $\{\bar{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ z množiny M , ktorá konverguje k bodu $\bar{a}$ pre $n \rightarrow \infty$, pričom $\bar{x}_n \neq \bar{a}, n = 1, 2, \dots$, je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = b$.

Príklad 3. Zistiť spojitosť funkcie $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ v bode $(0, 0)$!

Keďže bod $(0, 0)$ je hromadným bodom definičného oboru, stačí zistiť, či existuje $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$. Využijeme pritom predchádzajúcu vetu.

Vezmime dve postupnosti: $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{(x'_n, y'_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{(\frac{2}{n}, \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$. Tieto postupnosti spĺňajú podmienku, že konvergujú k bodu $(0, 0)$ pre $n \rightarrow \infty$. Ale po dosadení dostaneme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f((x_n, y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{2}{n}} = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f((x'_n, y'_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Z čoho vlastne vidíme, že nie pre každú postupnosť je splnená tá podmienka z vety, teda limita neexistuje, preto tá funkcia nie je spojitá v bode $(0, 0)$.

To, že limita existuje resp. neexistuje možno ukázať aj inak:

Príklad 4. Zistiť spojitosť funkcie $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$!

Teraz existenciu limity $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4}$ zistíme inak. Keby tá funkcia bola spojitá v bode $(0,0)$, tak $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4}$ by musela byť 0. Ale to znamená, že keď sa blížíme k bodu $(0,0)$ hociakým spôsobom, pozdĺž hociakej krivky, tak výsledok musí byť vždy rovnaký, a to 0. Keď však k $(0,0)$ ideme popri priamke napr. $y = x$ resp. $y = 2x$, dostaneme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{7x^4} = \frac{1}{7} \quad \text{resp.} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4}{67x^4} = \frac{4}{67}.$$

Teda tá limita neexistuje, t.j. funkcia nie je spojitá v $(0,0)$.

Poznámka 5. Ak limitu v bode $(0,0)$ skúmame pozdĺž priamok $y = mx$ a výsledok závisí od m , tak môžeme konštatovať, že limita neexistuje:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2x^4}{(3+4m^4)x^4} = \frac{m^2}{3+4m^4}.$$

Definícia 6. .

Nech funkcia $f(x,y)$ je definovaná na množine $M \subset \mathbb{R}^2$ a nech (x_0, y_0) je hromadným bodom množiny M . Nech pre každé $x \neq x_0$ také, že $(x,y) \in M$ existuje $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = g(x)$ a nech táto funkcia má v bode x_0 limitu, potom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right)$$

sa nazýva **dvojnásobná limita funkcie f v bode (x_0, y_0) podľa y a x** . Analogicky sa definuje **dvojnásobná limita funkcie f v bode (x_0, y_0) podľa x a y** .

Označme: $l_{12} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right), l_{21} = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right), l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y),$

Príklad 5. V príklade 3. sme ukázali, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ neexistuje, ale dvojnásobné limity existujú a

nerovnajú sa $l_{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = 1, l_{21} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = -1$

Príklad 6. V príklade 4. sme ukázali, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4}$ neexistuje, ale dvojnásobné limity existujú

a sa aj rovnajú $l_{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4} \right) = 0, l_{21} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2y^2}{3x^4+4y^4} \right) = 0$

Príklad 7. V príklade 2. sme ukázali, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$. Ale dvojnásobné limity

$l_{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right)$, $l_{21} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right)$ neexistujú, lebo $\lim_{u \rightarrow 0} (u+k) \sin \frac{1}{u} \sin \frac{1}{k}$, kde $k \neq 0$ je konštanta, neexistuje.

Veta 2. (veta o dvojnásobných limitách)

Nech existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = b$ a nech existujú vnútorné limity obidvoch dvojnásobných limit.

Potom existujú aj dvojnásobné limity $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right)$ a $\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right)$ a obidve sa rovnajú b .

Dôkaz

Poznámka 6. • Ak existuje l, l_{12}, l_{21} potom $l = l_{12} = l_{21}$.

- Ak existuje l_{12}, l_{21} ale $l_{12} \neq l_{21}$, potom limita funkcie f v bode (x_0, y_0) neexistuje.
- ! Z existencie l_{12}, l_{21} a z ich rovnosti $l_{12} = l_{21}$ nevyplýva existencia limity funkcie f v bode (x_0, y_0) .
- ! Z existencie limity funkcie f v bode (x_0, y_0) nevyplýva existencia dvojnásobných limit l_{12}, l_{21} .

Definícia 7. .

Hovoríme, že funkcia f , definovaná na množine $M \subset \mathbb{R}^n$, je na tej množine **rovnomerne spojitá**, ak $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x}, \bar{y} \in M$ s vlastnosťou $d(\bar{x}, \bar{y}) < \delta : |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon$.

Veta 3. (veta o dvojnásobných limitách)

Funkcia f spojitá na uzavretej ohraničenej (kompaktnej) množine $M \subset \mathbb{R}^n$ má tieto vlastnosti:

1. f je ohraničená na množine M
2. f má na množine M maximum a minimum
3. f je na množine M rovnomerne spojitá

Dôkaz

Príklad 8. :

Zistite, či je funkcia $f(x,y) = x^2 + y^2$ rovnomerne spojitá na množine

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$! Ak áno dokážte to aj pomocou definície!

Keďže množina M je uzavretá a ohraničená, t.j. kompaktná a funkcia f je spojitá na M , na základe vety 3 je aj rovnomerne spojitá.

Dôkaz: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall {}^1\bar{x} = (x_1, y_1) \in M, {}^2\bar{x} = (x_2, y_2) \in M$ s vlastnosťou

$0 < d({}^1\bar{x}, {}^2\bar{x}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$, potom platí $|x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2)| < \varepsilon$. Teda

$$\begin{aligned} |x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2)| &= |x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2| \leq |x_1 - x_2||x_1 + x_2| + |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \leq \\ &\leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}(|x_1| + |x_2|) + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}(|y_1| + |y_2|) < 4\delta. \end{aligned}$$

Stačí si zvoliť $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

(Využili sme nerovnosti: $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, podobne pre $|y_1 - y_2|$, ďalej ak $x^2 + y^2 \leq 1$, tak $|x| \leq 1$ aj $|y| \leq 1$)

3. DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIÍ N PREMENNÝCH

3.1 DIFERENCIOVATEĽNOSŤ A DERIVÁCIE FUNKCIE

Definícia 8. .

Funkcia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na množine $M \subset \mathbb{R}^n$ sa nazýva **diferencovateľná v bode** $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$, ktorý je hromadným bodom množiny M , ak existujú čísla $A_1, A_2, \dots, A_n$ a funkcia $\varepsilon(\bar{x})$ s vlastnosťou $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \varepsilon(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{a}) = 0$ tak, že platí

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n A_i(x_i - a_i) + \varepsilon(\bar{x})d(\bar{x}, \bar{a}).$$

Funkciu $\sum_{i=1}^n A_i(x_i - a_i)$ nazývame **totálnym diferenciálom** $f(\bar{x})$ v bode $\bar{a}$, označujeme ho $df(\bar{a}, \bar{x})$.

- Vektor so súradnicami $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazveme **gradientom funkcie f v bode $\bar{a}$** , označujeme $\text{grad}f(\bar{a})$.
- Ak vektor $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$ má zložky $h_i = x_i - a_i, i = 1, \dots, n$, tak totálny diferenciál možno písať v tvare $df(\bar{a}, \bar{h}) = \sum_{i=1}^n A_i h_i$.

Definícia 9. .

Nech funkcia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná na množine $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ je vnútorným bodom tejto množiny. Ak existuje

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

hovoríme, že f má v bode $\bar{a}$ **parciálnu deriváciu podľa premennej x_i** , označujeme: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ alebo $f'_{x_i}(\bar{a})$.

- Ak označíme $x_1 - a_1 = h$ a $x_2 - a_2 = k$, tak definíciu môžeme písať aj inak, uveďme to pre funkciu $f(x, y)$ v bode (a_1, a_2) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)}{k}$$

Poznámka 7. Parciálne derivácie funkcie n premenných sú opäť funkcie n premenných.

Príklad 9. Zistite, či je funkcia $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bode $\bar{a} = (1, 2)$ diferencovateľná a nájdite tam jej diferenciál.

Parciálne derivácie sú $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = 2x$ a teda $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) = 2y$ a teda $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$.
Nech $A_1 = 2$ a $A_2 = 4$.

Treba ešte nájsť funkciu $\varepsilon(\bar{x})$ s vlastnosťou $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \varepsilon(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{a}) = 0$ tak, aby platila rovnosť

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n A_i(x_i - a_i) + \varepsilon(\bar{x})d(\bar{x}, \bar{a}), \text{ čo v našom prípade znamená, že}$$

$$\varepsilon(\bar{x}) = \frac{x^2 + y^2 - (1^2 + 2^2) - (2(x-1) + 4(y-2))}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \frac{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} =$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

Vidíme, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \varepsilon(\bar{x}) = 0$, čím je dokázané, že naša funkcia je diferencovateľná v danom bode. Diferenciál je $df((1, 2), (x, y)) = 2(x-1) + 4(y-2)$.

Aj pri funkcií viac premenných platí Lagrangeova veta, uveďme ju bez dôkazu.

Veta 4. (Lagrangeova veta o prírastku funkcie)

Nech funkcia $f(x_1, \dots, x_n)$ je definovaná na istom guľovom okolí bodu $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a nech na tom okolí má parciálnu deriváciu podľa každej svojej premennej. Nech $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je ľubovoľný bod toho okolia. Potom existujú v tom okolí také body $P_1 = (\xi_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $P_2 = (x_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n)$, ..., $P_n = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n)$, že

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = f'_{x_1}(P_1)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(P_2)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_n}(P_n)(x_n - a_n)$$

a $d(P_i, \bar{a}) < d(\bar{x}, \bar{a})$, $i = 1, \dots, n$ a body ξ_i ležia medzi bodmi x_i a a_i .

Z tejto vety bezprostredne vyplýva ďalšia veta:

Veta 5. (veta o parciálnych deriváciach)

Ak funkcia $f(x_1, \dots, x_n)$ má na otvorenej množine M ohraničené parciálne derivácie podľa svojich premenných, je na tej množine spojitá.

Dôkaz:

Veta 6. (nutné podmienky diferencovateľnosti)

Ak funkcia f je v bode $\bar{a}$ diferencovateľná, potom

1. je v tom bode spojitá,

2. existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$, $i = 1, 2, \dots, n$ a platí: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) = A_i$, kde A_i je číslo z definície diferencovateľnej funkcie.

Dôkaz:

Poznámka 8.

- Ak funkcia f je diferencovateľná v bode $\bar{a}$, potom jej diferenciál má tvar: $df(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} (x_i - a_i)$ resp. $df(\bar{a}, \bar{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} h_i$,
- $\text{grad} f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$.

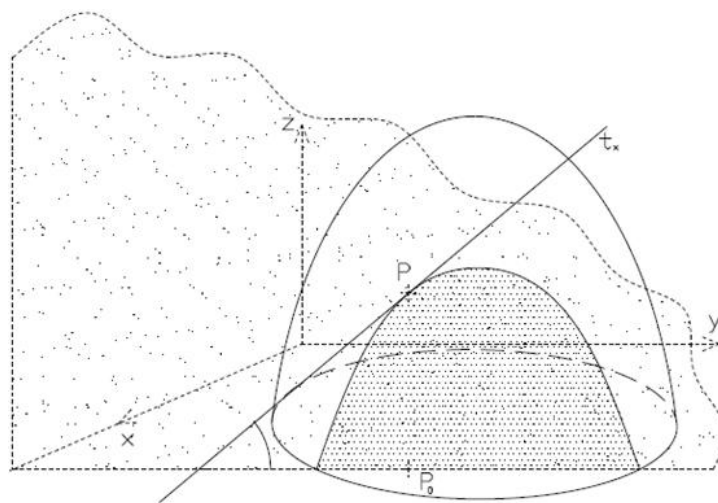
Veta 7. (postačujúca podmienka diferencovateľnosti)

Ak má funkcia f v nejakom okolí bodu $\bar{a}$ parciálne derivácie podľa všetkých premenných a tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\bar{a}$, potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\bar{a}$.

Dôkaz:

Geometrický význam parciálnych derivácií a diferenciálu funkcie dvoch premenných:

Nech je daná funkcia $z = f(x, y)$, $(x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2$. Jej grafom je plocha v $\mathbb{R}^3$. Ďalej, uvažujme bod $P = (x_0, y_0, z_0)$ na tejto ploche. Rezom plochy $z = f(x, y)$ rovinou $y = y_0$ je krivka, označme $g(x) = f(x, y_0)$. Ak počítam parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y)$ podľa premennej x v bode $P_0 = (x_0, y_0)$, t.j. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, dostaneme deriváciu funkcie $g(x)$ v bode x_0 .

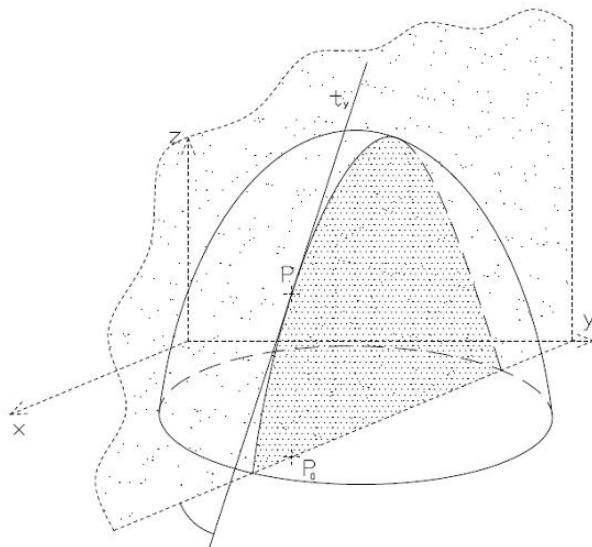


Ale vieme, že derivácia funkcie jednej premennej v nejakom bode zadá smernicu dotýčnice ku krivke v tom bode.

Teda pomocou parciálnej derivácie funkcie $f(x, y)$ podľa premennej x [resp. y] v bode

P_0 môžeme vypočítať smernicu dotyčnice ku kvivke plochy $z = f(x, y)$ v bode P , pričom tá dotyčnica leží v rovine rovnobežnej s rovinou $\overline{xy}$ [resp. $\overline{yz}$] (t.j. kolmej na os y [resp. x]).

Smernové vektory týchto dotyčníc sú $(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$ a $(1, 0, f'_y(x_0, y_0))$.



Ak funkcia je diferencovateľná v bode P , tak tieto dotyčnice ležia v rovine, ktorá je dotyková rovina plochy $z = f(x, y)$ v bode $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$, a má normálový vektor $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$ a teda rovnica dotykovej roviny je

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Keď si pozrieme definíciu 3.1, vidíme, že v okolí bodu P_0 , vďaka podmienke

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

môžeme písať

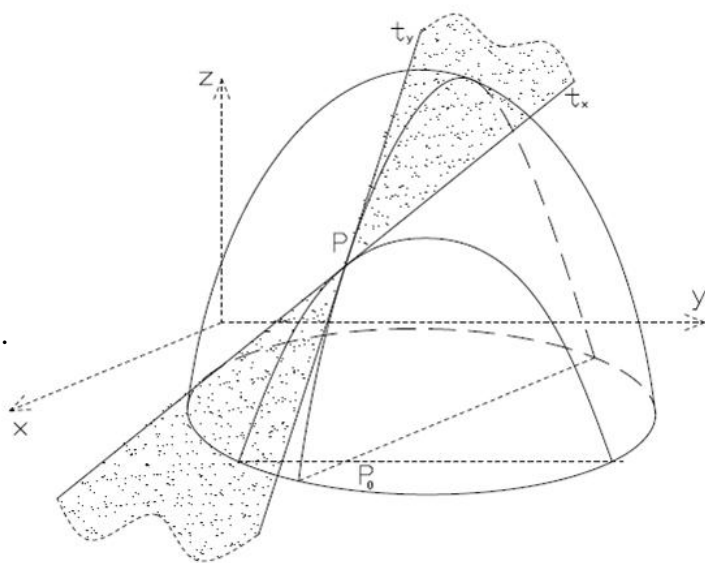
$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Z poznámky 3.1 zase máme, že

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx df((x_0, y_0), (x, y)).$$

To vlastne znamená, že čím bližšie je bod (x, y) k bodu $P_0 = (x_0, y_0)$, tým bude menší rozdiel medzi diferenciálom a diferenciou $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ a pre bod (x, y) dosť blízky k bodu P_0 bude sa diferenciacia rovnať približne diferenciálu.

Geometricky to teda znamená, že v malom okolí bodu $P_0 = (x_0, y_0)$ graf funkcie f možno nahradiť dotykovou rovinou plochy v bode $P = (x_0, y_0, y_0)$.



3.2 PARCIÁLNE DERIVÁCIE ZLOŽENÝCH FUNKCIÍ, DERIVÁCIA V SMERE A PARCIÁLNE DERIVÁCIE VYŠŠÍCH RÁDOV

Ak máme zloženú funkciu napr. $u(xy) = (x^2 + y^2)^{x+y}$, parciálne derivácie môžeme ľahko vypočítať.

Ale, čo ak máme funkciu definovanú nasledovne:

Je daná funkcia $f(t_1, t_2)$, pričom $t_1 = x \cdot \sin y$ a $t_2 = x \cdot \cos y$. Funkciu teda možno písať aj ako $f(t_1, t_2) = f(x \sin y, x \cos y)$, ale to by sa dalo vyjadriť aj v tvare $f(t_1, t_2) = f(x \sin y, x \cos y) = u(x, y)$. Keby sme chceli počítať $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$, narazili sme na taký problém, že nemáme konkrétnu funkciu (čo by až tak veľmi nevadilo) a že aj v prvej aj v druhej zložke máme premenné x, y .

Veta 8. (veta o parciálnych deriváciách zložených funkcií)

Nech funkcie $t_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$, sú diferencovateľné v bode $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Nech $\varphi_i(\bar{a}) = b_i$ a funkcia $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$ je diferencovateľná v bode $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. Potom je v bode $\bar{a}$ diferencovateľná aj funkcia

$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(t_1, t_2, \dots, t_m) = f(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$ a pre jej derivácie v bode $\bar{a}$ platí:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi_1(\bar{a}), \dots, \varphi_m(\bar{a})) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial t_i}(\bar{b}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(\bar{a}), \text{ pre } k = 1, \dots, n.$$

Ale touto metódou možno počítať aj prvý príklad, ak si uvedomujeme, že $u(x, y) = f(t_1, t_2)$, kde $t_1 = x^2 + y^2$, $t_2 = x + y$ a $f(t_1, t_2) = t_1^{t_2}$.

Definícia 10. .

Nech funkcia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná na množine $M \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$ a $\bar{e}$ je jednotkový vektor so začiatkom v bode $\bar{a}$. Ak existuje limita $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}) - f(\bar{a})}{t}$ hovoríme, že f má **deriváciu v bode $\bar{a}$ v smere $\bar{e}$** , označujeme: $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}}(\bar{a})$.

Geometrický význam derivácie v smere:

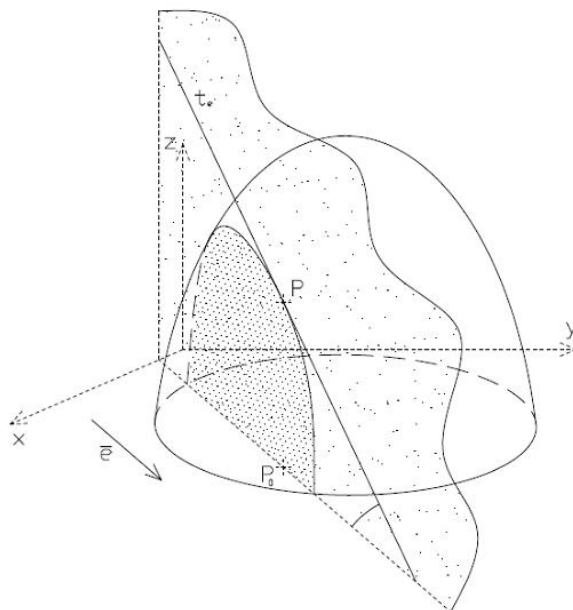
Pomocou derivácie funkcie $f(x, y)$ v bode $P_0 = (x_0, y_0)$ a v smere $\bar{e}$ môžeme vypočítať smernicu dotyčnice ku kvivke plochy $z = f(x, y)$ v bode $P = (x_0, y_0, z_0)$, kde tá krivka je rezom plochy rovinou, ktorá je kolmá na rovinu $\overline{xy}$, rovnobežná s vektorom $\bar{e}$ a obsahuje bod P .

Poznámka 9. Pre $n = 2$:

- parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ podľa x v bode (x_0, y_0) je derivácia v bode (x_0, y_0) v smere $\bar{e} = (1, 0)$,
- parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ podľa y v bode (x_0, y_0) je derivácia v bode (x_0, y_0) v smere $\bar{e} = (0, 1)$.

Veta 9. (veta o derivácii v smere)

Ak funkcia f je diferencovateľná v bode $\bar{a}$, potom v tomto bode existuje v každom smere derivácia a počíta sa to nasledovne: $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}}(\bar{a}) = \text{grad } f(\bar{a}) \bar{e}$, pričom $\text{grad } f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$ a $|\bar{e}| = 1$.

Dôkaz:

Poznámka 10. • Ak $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ sú uhly, ktorý zvierá vektor $\bar{e}$ s osami x_i a funkcia $f(x_1, \dots, x_n)$ je diferencovateľná v bode $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, potom $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}}(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) \cos \alpha_i$.

• Ak α je uhol, ktorý zvierá vektor $\bar{e}$ s osou x a funkcia $f(x, y)$ je diferencovateľná v bode (x_0, y_0) , potom $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \alpha$.

• gradient funkcie f v bode $\bar{a}$ charakterizuje smer a veľkosť maximálneho rastu tejto funkcie v bode $\bar{a}$.

A naozaj, lebo $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}}(\bar{a}) = \text{grad } f(\bar{a}) \bar{e} = |\text{grad } f(\bar{a})| |\bar{e}| \cos \varphi = |\text{grad } f(\bar{a})| \cos \varphi$, pričom φ je uhol, ktorý zvierá vektor gradientu a vektor $\bar{e}$, a najväčšiu hodnotu nadobúda vtedy ak $\cos \varphi = 1$.

Definícia 11. .

Nech funkcia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná na množine $M \subset \mathbb{R}^n$ a má na tejto množine v bode $\bar{a}$ derivácie: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$. Parciálne derivácie týchto derivácií v bode $\bar{a}$ nazývame **parciálne derivácie druhého rádu funkcie f podľa x_i, x_j v bode $\bar{a}$** , označujeme: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})$ alebo $f_{x_i x_j}^n(\bar{a})$, pre $i = j$ zvyčajne $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{a})$ alebo $f_{x_i^2}^n(\bar{a})$.

- Ak $i \neq j$ parciálne derivácie nazývame **zmiešanými parciálnymi deriváciami**.
- Podobne sa definujú parciálne derivácie k -tého rádu.

Veta 10. (Youngova veta)

Nech funkcia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná na otvorenej množine $M \subset \mathbb{R}^n$. Ak má táto funkcia také parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, ktoré sú diferencovateľné v bode $\bar{a}$, tak potom nezávisí od poradia derivovania pri zmiešaných deriváciách druhého rádu, t.j. platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})$.

Dôkaz:

Definícia 12. .

Hovoríme, že funkcia $f(x_1, \dots, x_n)$ je **k -krát diferencovateľná v bode $\bar{a}$** , ak sú diferencovateľné všetky parciálne derivácie funkcie $f(x_1, \dots, x_n)$ rádu $k - 1$ -ého a ak všetky parciálne derivácie tejto funkcie, ktoré sú rádu nižšie ako $k - 1$, sú diferencovateľné v istom okolí bodu $\bar{a}$.

Poznámka 11. Ak funkcia je dvakrát diferencovateľná, tak totálny diferenciál totálneho diferenciálu, t.j. $d[d f(\bar{x}, \bar{h})](\bar{x}, \bar{h})$ sa rovná

$$\begin{aligned} d[d f(\bar{x}, \bar{h})](\bar{x}, \bar{h}) &= d[f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2](\bar{x}, \bar{h}) = \frac{\partial}{\partial x} [f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2] h_1 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [f'_x(x, y)h_1 + f'_y(x, y)h_2] h_2 = f''_{xx}(x, y)h_1^2 + f''_{xy}(x, y)h_1 h_2 + f''_{yy}(x, y)h_2^2, \end{aligned}$$

pričom sme využili Youngovu vetu pre rovnosť parciálnych derivácií $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Definícia 13. .

Ak funkcia $f(x_1, \dots, x_n)$ je k -krát diferencovateľná v bode $\bar{a}$, potom výraz $d^k f(\bar{a}, \bar{x}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - a_n) \right]^k f(\bar{a})$ nazývame **k -tým diferenciálom funkcie $f(x_1, \dots, x_n)$ v bode $\bar{a}$** .

Pritom pod symbolom, ktorý sme použili, rozumieme toto: použijeme vzorec pre k -tu mocninu výrazu v zátvorke a potom namiesto mocnín znakov $\frac{\partial}{\partial x_i}$ berieme parciálne derivácie funkcie $f(x_1, \dots, x_n)$ v bode $\bar{a}$ takého rádu, aká je mocnina. Mocniny čísel $(x_i - a_i)$ zostávajú mocninami.

3.3 EXTRÉMY FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Definícia 14. .

Nech funkcia $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je definovaná na množine M . Hovoríme, že funkcia f má v bode $\bar{a} \in M$ **lokálne minimum (lokálne maximum)**, ak existuje také okolie $O(\bar{a})$ bodu $\bar{a}$, že pre každé $\bar{x} \in O(\bar{a}) \cap M$ je $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$ ($f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$). Ak pre každé $\bar{x} \neq \bar{a}$ platí ostrá nerovnosť $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$ ($f(\bar{x}) < f(\bar{a})$), tak hovoríme, že funkcia má v bode $\bar{a}$ **ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum)**. Lokálne minimá a maximá sa nazývajú **extrémy** funkcie f .

Veta 11. (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému)

Ak má funkcia f v bode $\bar{a}$ extrém a ak existujú všetky jej parciálne derivácie prvého rádu v bode $\bar{a}$, tak sa všetky rovnajú nule: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) = 0, i = 1, \dots, n$.

Dôkaz:

Definícia 15. .

Bod, v ktorom uvažovaná funkcia má všetky parciálne derivácie prvého rádu nulové, sa nazýva **stacionárnym bodom** tej funkcie.

Poznámka 12. • Pri funkcii dvoch premenných to vlastne znamená, že v bode, kde je lokálny extrém, má graf tejto funkcie dotykovú rovinu rovnobežnú s rovinou $\overline{xy}$.

- V stacionárnom bode nemusí mať ešte funkcia extrém
- Ak má funkcia extrém v nejakom bode, to ešte neznamená, že ten bod je aj stacionárnym bodom.
- Funkcia môže mať lokálny extrém len v tých bodoch, v ktorých sa všetky parciálne derivácie prvého rádu, ktoré existujú, rovnajú nule, alebo v ktorých žiadna parciálna derivácia neexistuje.

Príklad 10. Zistite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^2 + y^2$, ak existujú.

Parciálne derivácie sú: $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) = 2y$, nutná podmienka je splnená v bode $(0, 0)$, teda je to stacionárny bod. Pretože $f(0, 0) = 0$ a $f(x, y) > 0$ pre každý bod $(x, y) \neq (0, 0)$, má táto funkcia v bode $(0, 0)$ ostré lokálne minimum. Dotyková rovina v tomto bode je rovina $\overline{xy}$.

Príklad 11. Zistite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = xy$, ak existujú.

Parciálne derivácie sú: $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) = x$, stacionárny bod je teda bod $(0, 0)$. Táto funkcia v tomto bode však extrém nemá, lebo nech si zvolíme akékoľvek okolie bodu $(0, 0)$, vždy v ňom budú existovať body, v ktorých je tá funkcia kladná, a aj body, v ktorých je záporná. Napr. ak máme okolie $O(0, 0) = (-\delta, \delta)$, tak pre bod $A_1 = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$, ktorý je z toho okolia platí $f(A_1) = \frac{\delta^2}{4} > 0$ ale pre bod $A_2 = \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$, ktorý je z toho okolia platí $f(A_2) = -\frac{\delta^2}{4} < 0$. Teda bod $(0, 0)$ nie je lokálnym extrémom.

Príklad 12. Zistite lokálne extrémym funkcie $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, ak existujú. Vieme, že bod $(0,0)$ je bodom lokálneho minima, lebo $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} > 0 = f(0,0)$ pre body $(x,y) \neq (0,0)$. Ale bod $(0,0)$ nie je stacionárnym bodom, lebo parciálne derivácie v tomto bode neexistujú.

Veta 12. (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrémym)

Nech funkcia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je v bode $\bar{a} \in M$ dvakrát diferencovateľná a nech bod $\bar{a}$ je jej stacionárnym bodom. Potom pre funkciu f platí:

- a) ak druhý diferenciál $d^2 f(\bar{a}, \bar{x})$ je kladný pre každé $\bar{x} \in M$, tak má funkcia v bode $\bar{a}$ ostré lokálne minimum,
- b) ak druhý diferenciál $d^2 f(\bar{a}, \bar{x})$ je záporný pre každé $\bar{x} \in M$, tak má funkcia v bode $\bar{a}$ ostré lokálne maximum,
- c) ak existujú také body $\bar{y}$ a $\bar{z}$, že $d^2 f(\bar{a}, \bar{y}) \cdot d^2 f(\bar{a}, \bar{z}) < 0$, tak funkcia nemá v bode $\bar{a}$ lokálny extrém.

Dôkaz:

Poznámka 13. Táto veta udáva postačujúcu podmienku existencie extrémym, ale ak ju máme prakticky využiť, treba vedieť metódu určovania znamienka 2. diferenciálu: Druhý diferenciál

$$d^2 f(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \text{ je kvadratická forma premenných}$$

$x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n$ a parciálne derivácie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})$ sú koeficienty tejto kvadratickej formy, preto predchádzajúca veta sa dá písať aj nasledovne:

- a) ak $d^2 f(\bar{a}, \bar{x})$ je kladne definitná pre každé $\bar{x} \in M$, tak f má v $\bar{a}$ ostré lokálne minimum,
- b) ak $d^2 f(\bar{a}, \bar{x})$ je záporne definitná pre každé $\bar{x} \in M$, tak f v $\bar{a}$ ostré lokálne maximum,
- c) ak $d^2 f(\bar{a}, \bar{x})$ je indefinitná kvadratická forma, tak f nemá v $\bar{a}$ lokálny extrém.

Platí nasledujúca veta:

Veta 13. (Sylvestrova veta)

Ak D_k je determinant symetrickej matice zostavenej z koeficientov kvadratickej formy

$$d^2 f(\bar{a}, \bar{x}), \text{ t.j. } D_k(\bar{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(\bar{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(\bar{a}) \end{vmatrix} \text{ pre } k = 1, \dots, n \text{ tak kvadratická forma je:}$$

- a) kladne definitná práve vtedy, ak $D_k(\bar{a}) > 0$ pre $k = 1, \dots, n$,
- b) záporne definitná práve vtedy, ak $D_1(\bar{a}) < 0, D_2(\bar{a}) > 0, D_3(\bar{a}) < 0, \dots, (-1)^n D_n(\bar{a}) > 0$.

- Ak $k = n$, tak determinant D_n sa nazýva **Hessian**.

Príklad 13. Nech $f(x,y) = x^3 + y^3 - x - y$

a) Zistite lokálne extrémym funkcie, ak existujú!

b) Má funkcia f min. a max. na množine $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$?

Funkcia je diferencovateľná všade, existujú totiž parciálne derivácie v každom bode a sú spojité. Stacionárne body sú $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

lebo parciálne derivácie prvého rádu sú: $f'_x = 3x^2 - 1 = 0$ pre $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'_y = 3y^2 - 1 = 0$ pre $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Parciálne derivácie druhého rádu sú:

$$f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = 6y \text{ a teda } D_1(x, y) = 6x \text{ a } D_2(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}.$$

V bode $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ je lokálne minimum, lebo $D_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ a

$$D_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{vmatrix} 6\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 6\frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 12 > 0.$$

V bode $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ neexistuje lokálny extrém, lebo $D_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ a

$$D_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{vmatrix} 6\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -6\frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -12 < 0.$$

V bode $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ neexistuje lokálny extrém, lebo $D_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -6\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ a

$$D_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{vmatrix} -6\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 6\frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -12 < 0.$$

V bode $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ je lokálne maximum, lebo $D_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -6\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ a

$$D_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{vmatrix} -6\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -6\frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 12 > 0.$$

Chceme ešte zistiť minimum a maximum funkcie na množine M .

To, že má táto funkcia na tejto množine najmenšiu a najväčšiu hodnotu vyplýva z 2. Weierstrassovej vety, totiž množina M je ohraničená a uzavretá, teda kompaktná.

Minimum a maximum by mohli byť v tých bodoch, v ktorých sú lokálne extrémny zistené v predchádzajúcej časti, lenže tie body teraz do našej množiny nepatria. Okrem toho môžu byť tie extrémny už len na hranici tejto množiny, t.j. na stranách trojuholníka s vrcholmi v bodoch $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$.

1. Na úsečke s vrcholmi v bodoch $[0, 0]$, $[0, 1]$, t.j. v bodoch $(0, y)$ pre $y \in \langle 0, 1 \rangle$, funkcia f je funkcia s jednou premennou, ktorej extrémny ľahko možno nájsť:

$$g(y) = f(0, y) = y^3 - y, y \in \langle 0, 1 \rangle, g'(y) = 3y^2 - 1 = 0 \text{ pre } y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ z čoho nám vyho-}$$

vuje iba $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, v ktorom má funkcia g lokálne minimum. Minimálna hodnota je

$$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}. \text{ V krajných bodoch úsečky je maximum: } f(0, 0) = f(0, 1) = 0.$$

2. Na úsečke s vrcholmi v bodoch $[0, 0]$, $[1, 0]$, t.j. v bodoch $(x, 0)$ pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$, funkcia f je teraz funkciou premennej x :

$$h(x) = f(x, 0) = x^3 - x, x \in \langle 0, 1 \rangle, h'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \text{ pre } x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ v ktorom má funkcia}$$

h lokálne minimum. Minimálna hodnota je $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$. V krajných bodoch je opäť maximum: $f(0,0) = f(1,0) = 0$.

3. Na poslednej strane trojuholníka funkcia f vyzerá nasledovne:

$l(x) = f(x, 1-x) = x^3 - 3x, x \in \langle 0, 1 \rangle, l'(x) = 6x - 3 = 0$ pre $x = \frac{1}{2}$ a má tam lokálne minimum. Minimálna hodnota je $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{4}$. Maximálna hodnota je v krajných bodoch tejto úsečky, ale tie už máme vypočítané.

Teda funkcia f má na množine M

- minimum v bode $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{4}$
- maximum v $f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = 0$.

Definícia 16. .

Nech $f(x_1, \dots, x_n)$ je funkcia definovaná na množine M . Označme N množinu všetkých bodov $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, ktorých súradnice spĺňajú rovnice $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ pre $i = 1, \dots, m$, kde $m < n$. Potom lokálne extrémny funkcie f na množine N sa nazývajú **viazané lokálne extrémny** a rovnice $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, ktoré určujú množinu N **väzbami**.

Poznámka 14. :

- V predchádzajúcom príklade sme už počítali viazané extrémny a to pri väzbe napr. $g(x,y) = x$, alebo $g(x,y) = y$ resp. $g(x,y) = x + y - 1$.
- Pre $n = 2$: ak predpokladáme, že funkcie f a g sú dvakrát diferencovateľné, môžeme postupovať dvoma spôsobmi:

a) z rovnosti $g(x,y) = 0$ vyjadríme $y = \varphi(x)$ (ak sa dá) a hľadáme extrémny funkcie jednej premennej $f(x, \varphi(x))$

b) Lagrangeovou metódou, ktorá spočíva v tom, že nájdeme extrémny funkcie $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, kde λ je zatiaľ neurčité reálne číslo, tzv. **Lagrangeov multiplikátor**.

Táto funkcia je definovaná na množine N . Pre každý bod $(x,y) \in N$ je $g(x,y) = 0$, teda pre tieto body $F(x,y,\lambda) = f(x,y)$. Predpokladajme, že v bode $(x_0,y_0) \in N$ má funkcia $F(x,y,\lambda)$ napr. lokálne maximum.

Teda vieme, že pre bod $(x_0,y_0) \in N$ platí $F(x_0,y_0,\lambda) = f(x_0,y_0)$ a pre každý bod (x,y) z istého okolia O bodu (x_0,y_0) , v ktorom je $F(x,y,\lambda)$ definovaná platí:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) < F(x_0,y_0,\lambda) = f(x_0,y_0).$$

Ale každý bod (x,y) z okolia O je aj z množiny N , preto $f(x,y) + \lambda g(x,y) = f(x,y)$, a teda $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$, t.j. v bode (x_0,y_0) má lokálne maximum aj funkcia $f(x,y)$ na N .

Čím sme vlastne dokázali nasledujúcu vetu.

Veta 14. (veta o viazaných extrémoch)

Ak funkcia $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ má v bode $f(x_0, y_0)$ lokálny extrém, tak funkcia $f(x, y)$ má v tomto bode lokálny extrém viazaný podmienkou $g(x, y) = 0$.

Poznámka 15. :

- Opačná implikácia neplatí, teda je to len postačujúca podmienka, preto táto metóda hľadania viazaných lokálnych extrémov nezaručuje nájdenie všetkých viazaných lokálnych extrémov.

Príklad 14. :

Nájdite viazané extrém y funkcie $f(x, y) = 2xy$ pri väzbe $x - y = 0$.

Lagrangeova metóda:

Nájdeme lokálne extrém y funkcie $F(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda(x - y)$. Systém rovníc

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2y + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2x - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x - y = 0 \quad (3)$$

má jediné riešenie $(0, 0, 0)$.

Sylvestrovu vetu teraz nemôžeme využiť, lebo $D_1(0, 0, 0) = 0$.

Dosadíme čiastočne za $\lambda: F(x, y, \lambda) = f(x, y) = 2xy$, ale táto funkcia nemá v bode $(0, 0)$ extrém, lebo v susedné kvadranty majú opačné znamienko, teda neexistuje okolie bodu $(0, 0)$ take, že by v ňom mala funkcia konštantné znamienko.

Na druhej strane, ak použijeme metódu **a)**, dostaneme z väzby $y = x$ a funkcia $f(x, y) = 2x^2$ má v bode $x = 0$ minimum. Preto funkcia $f(x, y) = 2xy$ má v bode $(0, 0)$ pri väzbe $x - y = 0$ viazané minimum.

4. FUNKCIE URČENÉ IMPLICITNE

Majme funkciu $F(x, y)$. Zaujíma nás množina N bodov priestoru $\mathbb{R}^2$, ktorých súradnice vyhovujú rovnici $F(x, y) = 0$. Bude to závisieť samozrejme od F , lebo ak napr.:

1. $F(x, y) = x - y + 1$, tak z rovnosti $F(x, y) = 0$ dostaneme, že množina N je množina bodov priamky s rovnicou $y = x + 1$. Teda mohli sme určiť množinu N miesto rovnice $F(x, y) = 0$ ako graf funkcie $y = f(x)$, čo je pre nás výhodné.
2. $F(x, y) = x^2 + y^2$, tak z rovnosti $F(x, y) = 0$ dostaneme, že množina N sa skladá len z jediného bodu $(0, 0)$.
3. $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, množina N je prázdna.
4. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, tak množina N je množina bodov kružnice so stredom v bode $(0, 0)$ a polomerom $r = 1$. Tu už y nemôžeme vyjadriť jednoznačne, lebo k hociktorému číslu $x \in (-1, 1)$ existujú dve hodnoty y , buď $\sqrt{1 - x^2}$ alebo $-\sqrt{1 - x^2}$.

Definícia 17. .

Funkciu $y = f(x)$ (ak taká existuje), ktorej graf je množina bodov N , určená rovnicou $F(x, y) = 0$, nazývame **funkciou určenou implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$.

Poznámka 16. :

- V poslednom príklade vidíme, že nenájdeť takú funkciu $y = f(x)$, ktorej graf by bol totožný s celou množinou N , t.j. v našom prípade kružnicou.

Ak si vyberieme bod napr. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in N$ a vytvoríme dvojrozmerný interval

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \xi, \frac{1}{\sqrt{2}} + \xi\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \eta, \frac{1}{\sqrt{2}} + \eta\right),$$

kde $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0 < \eta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, tak do toho intervalu padne istá časť bodov množiny N , a to taká, že ku každému číslu $x_1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \xi, \frac{1}{\sqrt{2}} + \xi\right)$ bude rovnicou $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ priradené len jedno také y_1 , že $y_1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \eta, \frac{1}{\sqrt{2}} + \eta\right)$ a $F(x_1, y_1) = 0$. Teda rovnicou $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ je na intervale $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \xi, \frac{1}{\sqrt{2}} + \xi\right)$ definovaná jediná funkcia, a to $y = \sqrt{1 - x^2}$, ktorej graf je totožný s množinou tých bodov množiny N , ktoré ležia v intervale I .

Veta 15. .

Nech $F(x, y)$ má nasledujúce vlastnosti:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. Na istom okolí $O(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) je funkcia $F(x, y)$ spojitá a má tam tiež spojitú parciálnu deriváciu $F'_y(x, y)$.
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Potom existujú čísla $\xi > 0$ a $\eta > 0$ také, že rovnicou $F(x, y) = 0$ je na intervale $(x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ určená jediná funkcia $y = f(x)$ taká, že pre každé $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ je

a) $F(x) \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ a $f(x_0) = y_0$

b) $F(x, f(x)) = 0$.

Okrem toho je táto funkcia $f(x)$ spojitá na $(x_0 - \xi, x_0 + \xi)$.

Bez dôkazu

- O funkcii $f(x)$ hovoríme, že je určená implicitne rovnicou $F(x, y) = 0$ a bodom (x_0, y_0) .

Veta 16. .

Nech funkcia $F(x, y)$ spĺňa predpoklady uvedené v predchádzajúcej vete a navyše má na okolí $O(x_0, y_0)$ spojitú parciálnu deriváciu až po rád k . Potom aj funkcia $f(x)$, ktorá je určená rovnicou $F(x, y) = 0$ implicitne na intervale $(x_0 - \xi, x_0 + \xi)$, má na tom intervale spojitú deriváciu až po rád k .

Dôkaz:

Príklad 15. :

Nájdime deriváciu funkcie $f(x)$, ktorá je implicitne určená rovnicou $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 10 = 0$ a bodom $(1, 2)$. Teda $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + 10$. Táto funkcia je spojitá a má aj spojitú parciálnu deriváciu a $F(1, 2) = 0$. Parciálna derivácia podľa y v bode $(1, 2)$ je nenulová, teda

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x - 3}{2y + 4}.$$

Pre $x = 1$ a $y = 2$ potom máme, že $f'(x) = \frac{1}{8}$.

Literatúra

- [1] M. BARNOVSKÁ, K. SMÍTALOVÁ, *Matematická analýza IV.*
- [2] M. BARNOVSKÁ A KOLEKTÍV, *Cvičenie z matematickej analýzy III.*
- [3] I. KLUVÁNEK, L. MIŠÍK, M. ŠVEC, *Matematika I.*