

II. ŠIKMÉ PREMIETANIE

1. Princíp zobrazenia, základné pojmy

Ak pri rovnobežnom premietaní smer premietania nie je kolmá na priemetňu, hovoríme o **šikmom, kosouhlom, klinogonálnom** premietaní.

Definição 1.1

Základné pojmy a označenia:

- **hlavná priemetňa:** ν
- **smer premietania:** l - ľubovoľná priamka, ktorá je rôznobežná s rovinou ν a nie je na ňu kolmá
- **osnova šikmého premietania:** osnova priamky l
- **šikmo premietacia priamka bodu A :** l^A - priamka rovnobežná s priamkou l a prechádzajúca bodom A
- **šikmo premietacia rovina priamky a :** rovina rovnobežná s priamkou l a prechádzajúca priamkou a
- **šikmý premiet bodu A :** $A_k = l^A \cap \nu$

Zvoľme si bázu ortonormálnej súradnicovej sústavy $\langle O; E^x, E^y, E^z \rangle$ a hlavnú priemetňu tak, že $x \cup z \subset \nu$ a kladná polpriamka osi y je incidentná s kladným polpriestorom s hranicou ν .

Bodom A prechádza práve jedna šikmo premietacia priamka l^A , ktorá pretína priemetňu práve v jednom bode A_* , ale opačne to už nie je jednoznačné.

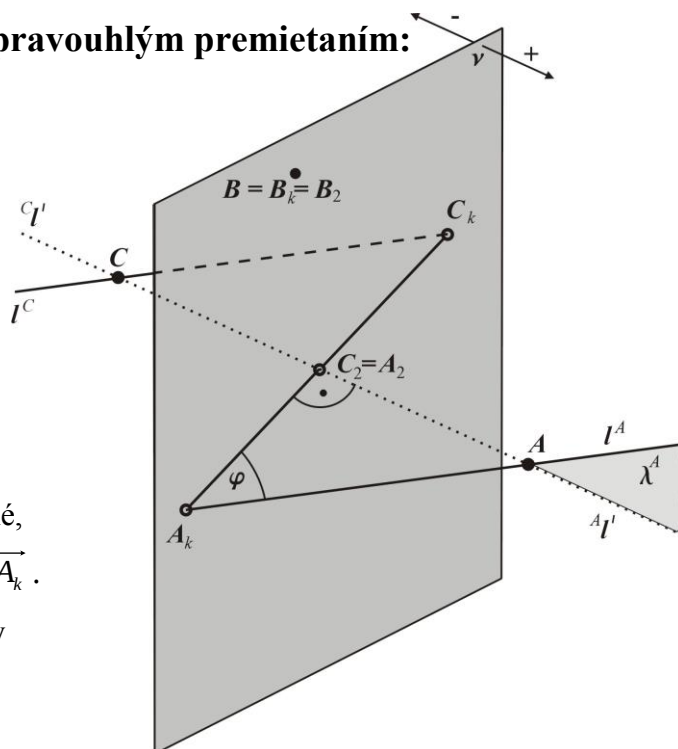
Na zaručenie obojstrannej jednoznačnosti máme dve možnosti:

- A) okrem šikmého priemetu bodu do ν , priradíme ku každému bodu aj pomocný pravouhlý priemet do ν - **metóda šikmého premietania s pomocným pravouhlým premietaním**,
 B) okrem šikmého priemetu bodu do hlavnej priemetne ν , priradíme ku každému bodu aj šikmý priemet pomocného pravouhlého priemetu bodu do pomocnej priemetne π (za predpokladu, že smer premietania nie je s ňou rovnobežná) - **metóda šikmého premietania s použitím pomocnej priemetne**.

A) Metóda šikmého premietania s pomocným pravouhlým premietaním:

Definição 1.2

- **kolmo premietacia priamka bodu A :** $A^{l'}$ - priamka kolmá na ν a prechádzajúca bodom A
- **kolmý prietom bodu A do ν :** $A_2 = A^{l'} \cap \nu$
- **kolmo premietacia rovina priamky l^A :**
 $\chi^A = \overleftrightarrow{l^{AA_1}}$



Vlastnosti:

Pre všetky body $A \notin \nu$ sú roviny λ^A navzájom rovnobežné,
preto sú navzájom rovnobežné aj priesečnice $\lambda^A \cap \nu = \overrightarrow{A_2 A_k}$.

Priamky (vektory) $\overrightarrow{A_2A_k}$ sú súhlasne orientované, ak body

ŠIKMÉ PREMIETANIE

A_2, A_k sú priemetmi bodu z jedného otvoreného polpriestoru

s hranicou v priemetni ν . Body z opačného polpriestoru majú nesúhlasne orientovanú priamku s priamkou $\overrightarrow{A_2 A_k}$, na obrázku je napr. bod C .

Definícia 1.3

- **ordinála bodu** A : spojnice bodov A_2, A_k ($A \notin \nu$)
- **kladná orientácia ordinál**: orientovaný smer ordinál prislúchajúci bodu z kladného polpriestoru s hranicou v priemetni ν

Veta 1.1

Zobrazenie f , ktoré každému vlastnému bodu A priestoru priradí usporiadanú dvojicu (A_k, A_2) na ordinále alebo bodu $M \in \nu$ priradí dvojicu $M_k = M_2 (= M)$ je bijekcia.

Dôsledok 1.1

Šikmé premietanie je určená orientovaným smerom ordinál a šikmo premietacou priamkou l .

Označme $\varphi \cong \angle(l, \nu)$, potom platí aj $\varphi \cong \angle(l^A, \nu) \cong \angle A_2 A_k A$ a preto $\cot \varphi = \frac{|A_2 A_k|}{|y^A|} = \frac{or|A_2 A_k|}{y^A} \Rightarrow$

$or|A_2 A_k| = y^A \cot \varphi$, kde $or|A_2 A_k|$ je orientovaná vzdialenosť uvažovaných bodov a y^A je vzdialenosť bodu A do priemetne ν (t.j. $|AA_2|$).

Definícia 1.4

- **pomer skrátenia príslušného šikmého premietania**: pomer dĺžky orientovanej úsečky $A_2 A_k$ a y -ovej súradnice bodu, t.j. $k = \cot \varphi$
- **šikmá izometria**: ak pomer skrátenia je $k = 1$
- **dištančná kružnica prislúchajúca bodu** $M \notin \nu$: kružnica priemetne so stredom v bode M_2 a polomerom rovnajúcim sa $y^M = |MM_2|$, t.j. $k^d(M_2, y^M)$

Šikmé premietanie s priemetňou ν je **dimetriou** v tom zmysle, že vo všeobecnom prípade sa jednotky na súradnicových osiach x, z zachovávajú a mení sa (skrakuje alebo predlžuje) jednotka na súradnicovej osi y .

Dôsledok 1.2

Šikmé premietanie je určená orientovaným smerom ordinál a pomerom skrátenia, resp. usporiadanou dvojicou (M_k, M_2) pre bod M z kladného otvoreného polpriestoru s hranicou ν a dištančnou kružnicou.

Ak v úlohách bude metóda šikmého premietania určená šikmým a pravouhlým priemetom ľubovoľného bodu M (ležiaceho vo vnútri kladného polpriestoru s hranicou v priemetni ν) a dištančnou kružnicou prislúchajúcou bodu M alebo pomerom skrátenia šikmého premietania, tak tento fakt sa bude zapisovať: ŠP = $(M_k, M_2; y^M)$.

Úloha 1.1

ŠP = $(M_k, M_2; y^M)$. Zostrojte uhol šikmo premietacej priamky bodu M s priemetňou. Zistite orientovanú vzdialenosť bodu $A = (A_k, A_2)$ od priemetne. Dourčte chýbajúce obrazy bodov $B = (?, B_2)$ a $C = (C_k, ?)$ tak, aby $y^B = -5j$ a $y^C = -y^B$.

Riešenie:

B) Metóda šikmého premietania s použitím pomocnej premietne:

Definícia 1.5

- **pomocný kolmý priemet bodu A do π :**
 $\bar{A} \in \pi$, $A\bar{A} \perp \pi$
- **šikmý pôdorys bodu A : A_{1k}**
 $l^{\bar{A}} \cap \nu = (\bar{A})_k = A_{1k}$, kde $\bar{A} \in l^{\bar{A}}$, $l^{\bar{A}} \parallel l$

Vlastnosti:

Keďže $A\bar{A} \parallel \nu$, tak $A_k A_{1k} \parallel A\bar{A}$ a teda $A_{1k} A_k A\bar{A}$ je

rovnobežník. Pre body $A \notin \pi$ platí, že

$A_{1k} A_k \perp x = x_k = x_{1k}$ a $|A_{1k} A_k| = z^A$.

Ak A leží v kladnom polpriestore s hranicou v π a B v opačnom polpriestore, tak $A_{1k} A_k$ a $B_{1k} B_k$ sú orientované nesúhlasne.

Ak $C \in \pi$, tak $C = \bar{C}$ a preto $C_{1k} = C_k$.

Ak $D \in \nu$, tak $D = D_k$ a $D_{1k} = \bar{D} \in x_k$.

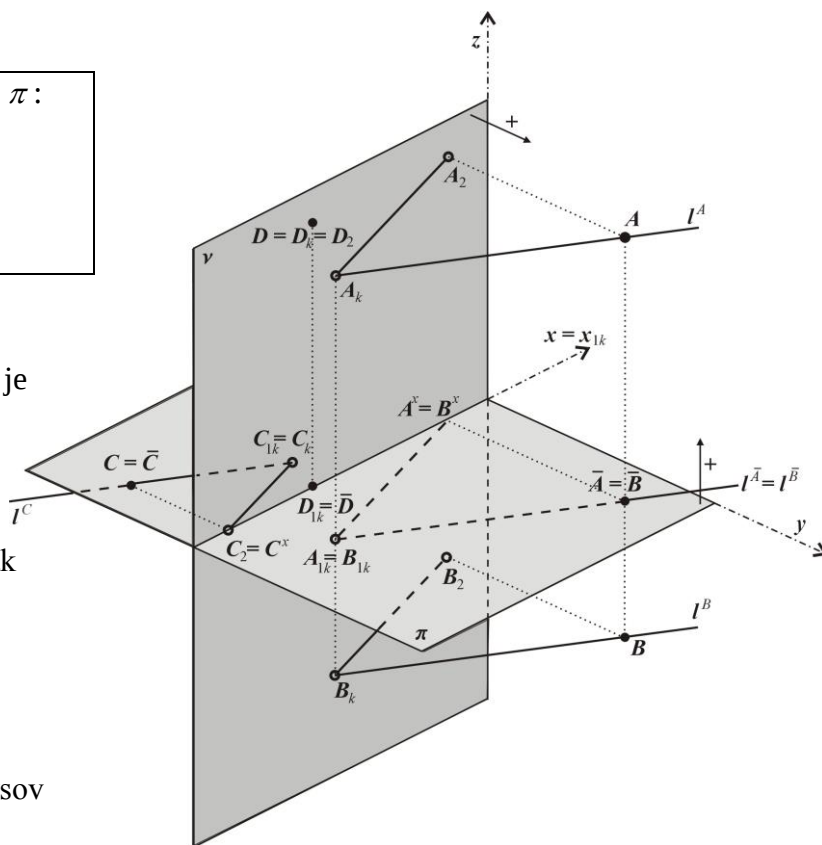
Spojnicu šikmých priemetov a šikmých pôdorysov bodov priestoru nazývame **ordinálou šikmého premietania s využitím pomocnej premietne**.

Veta 1.2

Zobrazenie F , ktoré každému vlastnému bodu A priestoru priradí usporiadanú dvojicu (A_k, A_{1k}) na ordinále kolmej na os x_k alebo $M_k = M_{1k}$ (ak $M \in \pi$) je bijekcia.

Pre väčšiu názornosť sa obe prípady šikmého premietania kombinujú navzájom a nazývame to **technické šikmé premietanie**.

Platí, že $AA_2 \parallel \bar{A}A^x$, $\bar{A}A_{1k} \parallel AA_k$, $A_2 A_k \parallel A^x A_{1k}$ a $\Delta AA_2 A_k \cong \Delta \bar{A}A^x A_{1k}$, preto $or|A_2 A_k| = k y^A$ a teda $or|A^x A_{1k}| = k y^A$ a $or|A_{1k} A_k| = z^A$, kde k je pomer skrátenia daného šikmého premietania.



ŠIKMÉ PREMIETANIE

Technické šikmé premietanie sa často zadáva veľkosťou uhla ω orientovanej ordinály Y_2Y_k s orientovanou základnicou a pomerom skrátenia. Tento fakt sa bude zapisovať: $\text{ŠP} = (\omega, k)$.

Úloha 1.2

$\text{ŠP} = (120^\circ, \frac{3}{4})$. Zobrazte body $A = (3, 6, 5)$, $B = (6, -3, 2)$ a $C = (6, 4, -5)$.

Riešenie:

2. Riešenie polohových a jednoduchých metrických úloh

$\text{ŠP} = (M_k, M_2; y^M)$

Obraz priamky:

Priamka a je určená svojim šikmým priemetom a pravouhlým priemetom (a_k, a_2) , ak tieto neležia na priamke rovnobežnej s ordinálou M_kM_2 .

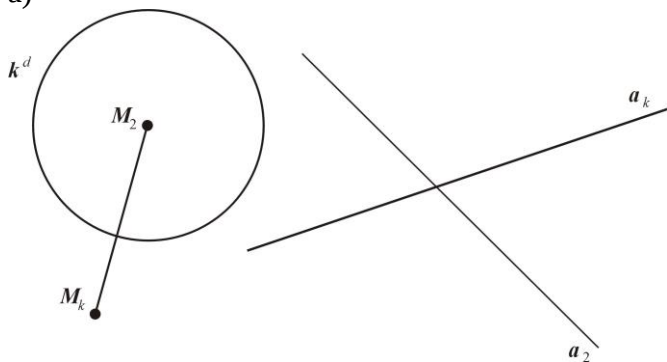
Priamka a nie je určená svojim šikmým priemetom a pravouhlým priemetom (a_k, a_2) , ak $a_2 = a_k \parallel M_2M_k$ (t.j. ak kolmo premietacia a šikmo premietacia rovina priamky je totožná), vtedy treba zadať priamku pomocou dvoch jej bodov.

Úloha 2.1

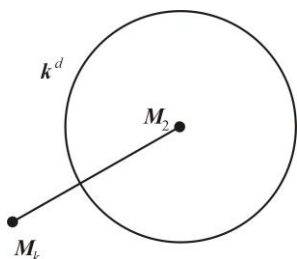
- Nájdite stopník priamky $a = (a_k, a_2)$, zvolte body $A, B \in a$ tak, aby $A \in \nu^-$ a $B \in \nu^+$. Zistite vzdialenosť týchto bodov od priemetne a uhol $\alpha = \angle(a, \nu)$.
- Zobrazte ľubovoľné priamky b, c, d tak, aby: $b \parallel \nu, b \not\subset \nu$; $c \perp \nu$; d je šikmo premietacia priamka.

Riešenie:

a)



b)

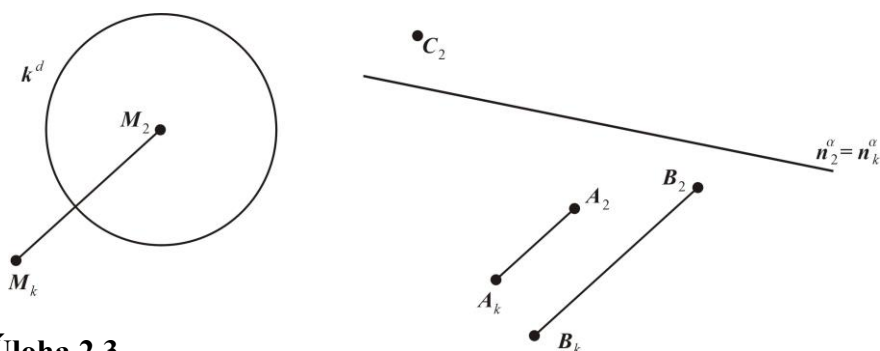


Obraz roviny:

Úloha 2.2

Je daná rovina $\alpha = \overleftrightarrow{n^\alpha A}$, $A = (A_k, A_2)$ a bod $B = (B_k, B_2)$. Zistite incidenciu bodu B s rovinou α . Dourčte bod $C = (?, C_2)$ tak, aby bol bodom roviny α .

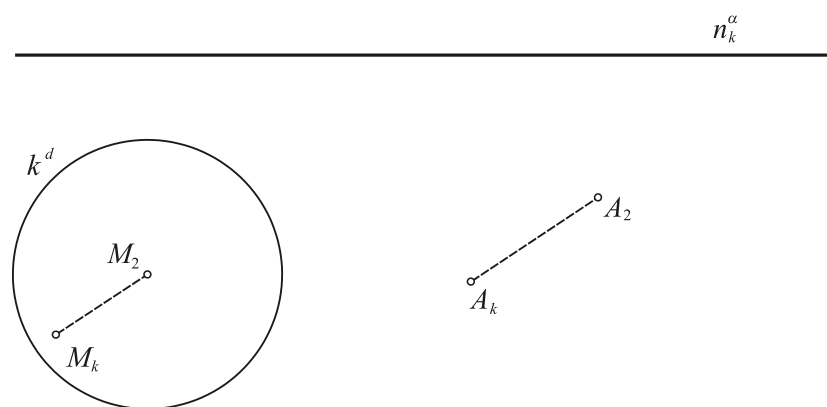
Riešenie:



Úloha 2.3

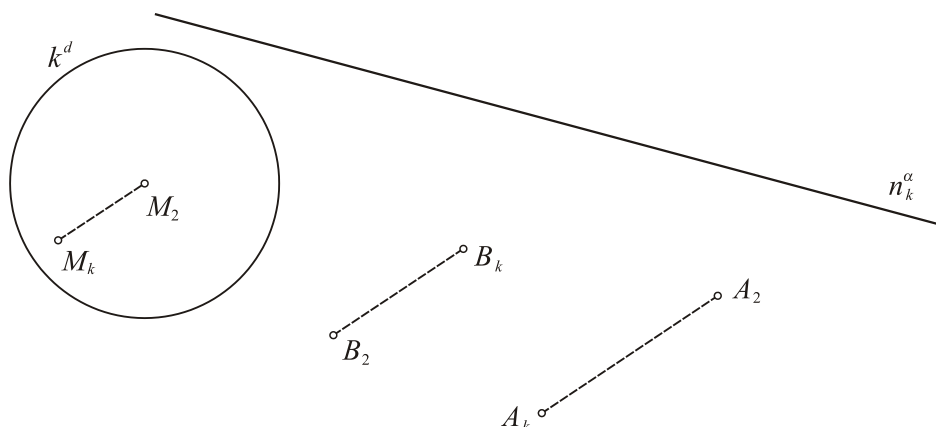
Daná je rovina $\alpha = \overleftrightarrow{n^\alpha A}$. Zobrazte jej hlavnú a spádovú priamku incidentnú s bodom A , vzdialenosť bodu A od stopy roviny a uhol zhodný s uhlom danej roviny s priemetňou.

Riešenie:

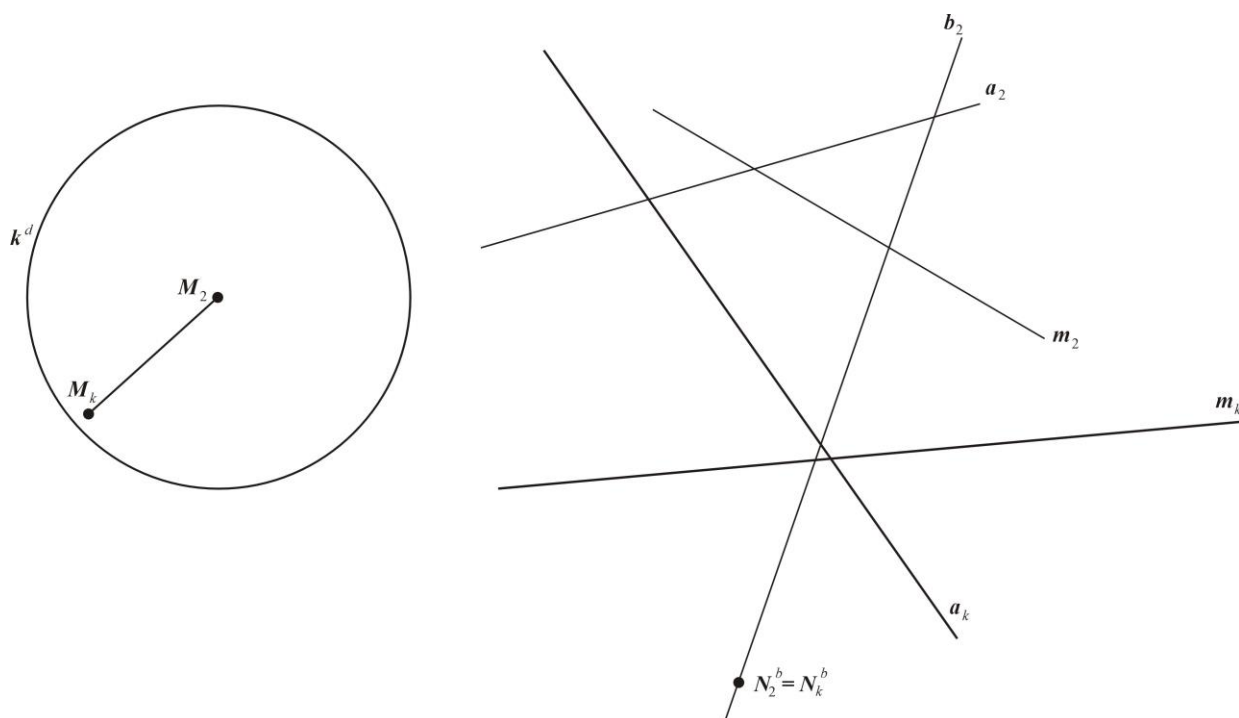


Príklady:

- 1.) Daná je rovina $\alpha = \overrightarrow{n^\alpha A}$ a bod $B = (B_k, B_2)$. Zostrojte rovinu β ($B \in \beta$, $\beta \parallel \alpha$).



- 2.) Určte priamku $b = (? , b_2)$ tak, aby s priamkou $a = (a_k, a_2)$ určili rovinu $\alpha = \overrightarrow{ab}$. Potom určte vzájomnú polohu priamky $m = (m_k, m_2)$ a roviny α .



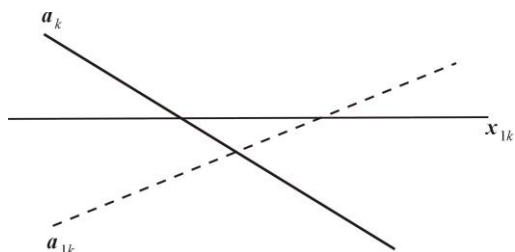
$$\text{ŠP} = (\omega, k)$$

Obraz priamky:

Úloha 2.4

Zistite stopníky priamky $a = (a_k, a_{1k})$ vo všeobecnej polohe vzhľadom na roviny π a ν .

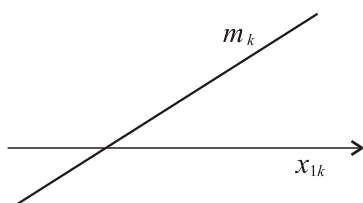
Riešenie:



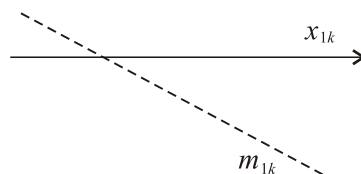
Úloha 2.5

V úlohách a) – f) dourčite priamku m tak, aby platilo: a) $m \subset \nu$; b) $m \subset \pi$; c) $A \in m, m \parallel \pi$; d) $A \in m, m \parallel \nu$; e) $A \in m, m \perp \nu$; f) $A \in m, m \perp \pi$. Vo všetkých prípadoch zobrazte existujúce stopníky priamky m .

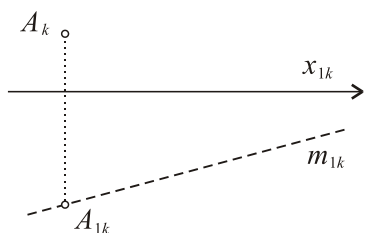
Riešenie:



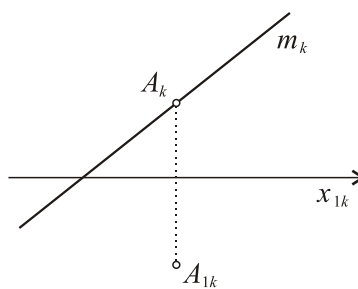
a)



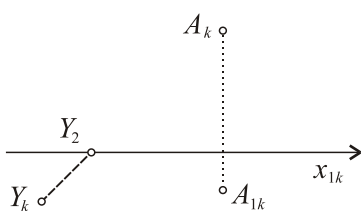
b)



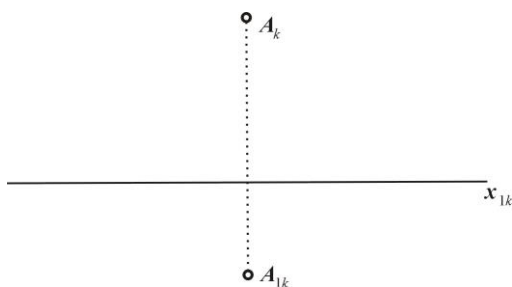
c)



d)



e)



f)

Obraz roviny:

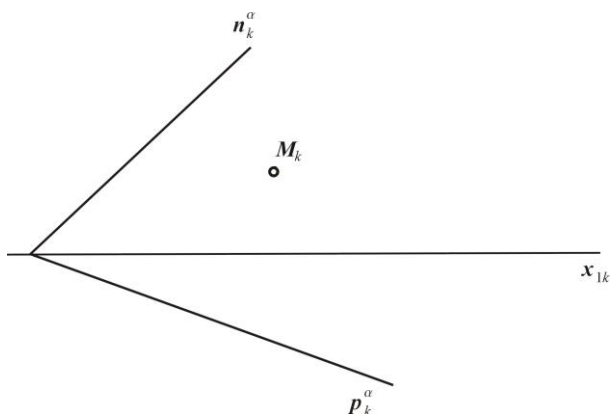
Úloha 2.6

Dourčite bod (body) roviny α a zostrojte aj chýbajúce stopy roviny, ak

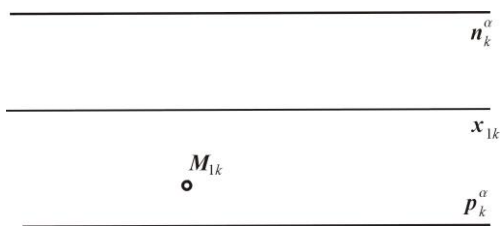
- a) $M = (M_k, ?)$, $\alpha = \overleftrightarrow{n_k^\alpha} p_k^\alpha$; b) $M = (?, M_{1k})$, $\alpha = \overleftrightarrow{n_k^\alpha} p_k^\alpha$ (akú polohu má rovina?); c) $A = (A_k, ?)$, $B = (?, B_{1k})$, $\alpha \perp \pi$; d) $A = (A_k, ?)$, $B = (?, B_{1k})$, $\alpha \perp v$.

Riešenie:

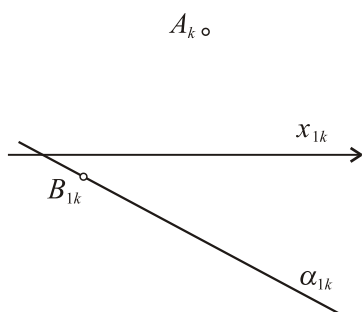
a)



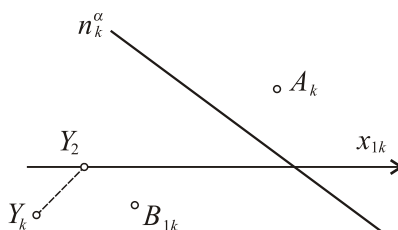
b)



c)



d)

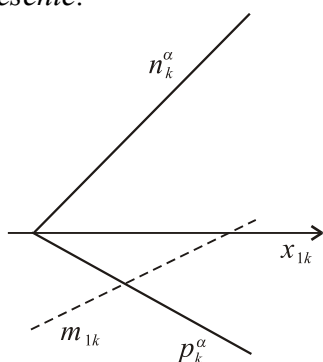


Úloha 2.7

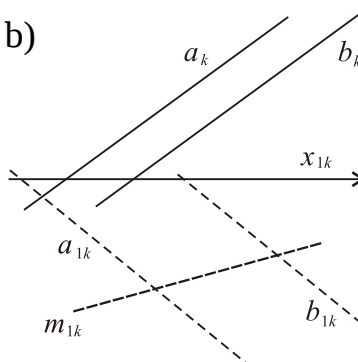
Dourčite priamku m tak, aby ležala v rovine α , ktorá je daná: a) $\alpha = \overleftrightarrow{n_k^\alpha} p_k^\alpha$; b) dvoma rovnobežkami a, b ; c) priamkou a a bodom A ($A \notin a$);

Riešenie:

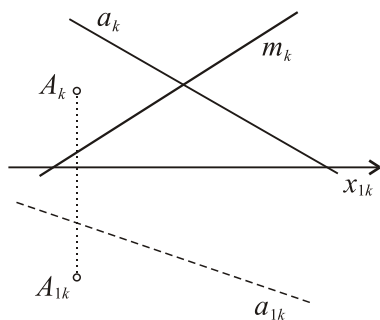
a)



b)



c)

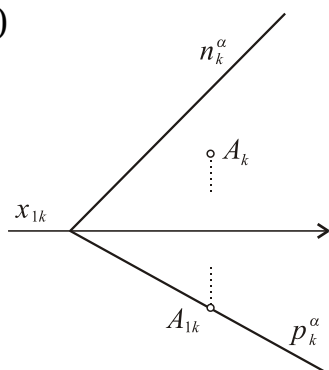


Úloha 2.8

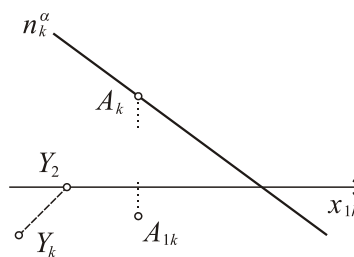
Zobrazte rovinu prechádzajúcu daným bodom A a rovnobežnú s danou rovinou α , ak: a) $\alpha = \overleftrightarrow{n^\alpha p^\alpha}$; b) α je kolmá na priemetňu ν ; c) α je rovnobežná so súradnicovou osou x ; d) α je kolmá na pomocnú priemetňu π .

Riešenie:

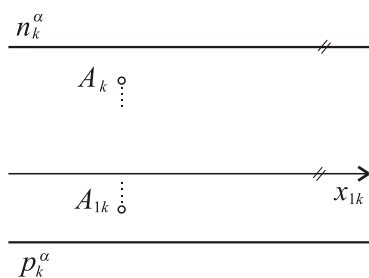
a)



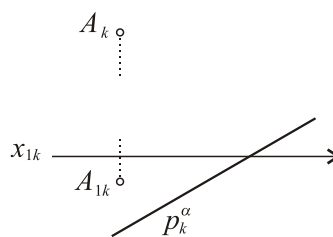
b)



c)



d)



Veta 2.1

Medzi pôdorysmi bodov a šikmými pôdorysmi bodov je vzťah osovej afinity, ktorej osou je obraz základnice x_{1k} .

Dôkaz:

Šikmé premietanie útvarov roviny π do ν označme $f: (\pi) \rightarrow (\pi_{1k})$. Otočenie je možné vyjadriť pomocou rovnobežného premietania, preto označme $g: (\pi) \rightarrow (\pi_1)$.

Potom vzťah medzi (π_1) a (π_{1k}) možno vidieť na diagrame:

$$\begin{array}{ccc} (\pi) & \xrightarrow{g} & (\pi_1) \\ f \downarrow & & \\ (\pi_{1k}) & & \end{array}$$

ŠIKMÉ PREMIETANIE

Preto pre $h: (\pi_1) \rightarrow (\pi_{1k})$ platí $h = f(g^{-1})$. Stačí dokázať, že toto zobrazenie má silno samodružnú priamku. Naozaj, pre body M na priamke x platí, že $M = M_1 = M_{1k}$. $\square$

Veta 2.2

Medzi šikmými pôdorysmi bodov a šikmými priemetmi bodov roviny α (rovina α nie je kolmá na π , nie je šikmo premietacia) je vzťah osovej afinity, ktorej osou je šikmý priemet pôdorysnej stopy roviny α .

Dôkaz:

Šikmé premietanie útvarov roviny α do ν označme $f: (\alpha) \rightarrow (\alpha_k)$. Pravouhlý priemet útvarov roviny α do π označme $g: (\alpha) \rightarrow (\bar{\alpha})$,

Potom vzťah medzi (α_k) a (α_{1k}) možno vidieť na diagrame:

$$\begin{array}{ccc} (\alpha) & \xrightarrow{f} & (\alpha_k) \\ g \downarrow & & \\ (\bar{\alpha}) & \xrightarrow{f} & (\alpha_{1k}) \end{array}$$

Preto pre $h: (\alpha_k) \rightarrow (\alpha_{1k})$ platí $h = f(g(f^{-1}))$. Stačí dokázať, že toto zobrazenie má silno samodružnú priamku. Naozaj, pre body M na priamke p_k^α platí, že $M_k = M_{1k}$. $\square$

Príklady:

- 1) V ŠP = $(135^\circ, 1/\sqrt{2})$ zobrazte pravidelný šesťuholník v rovine π , ak je daný stred $S = (5, 4, 0)$ a jeden vrchol $A = (3, 6, 0)$.

- 2) V ŠP = $(135^\circ, 1/\sqrt{2})$ zobrazte časť rotačnej valcovej plochy V medzi rovinami π a α . Určujúca kružnica k plochy V má stred S , polomer plochy sa rovná r . [$S(4, 6, 0)$, $r = 3,5$; $\alpha(9, \infty, 7)$]

3. Riešenie metrických úloh

Úloha 3.1

Úloha 3.2

Veta 2.2

Medzi šikmými priemetmi bodov roviny α (rovina α nie je rovnobežná s ν , nie je šikmo premietacia) a otočenými polohami týchto bodov (při otáčení roviny α do ν) je vzťah osovej afinity, ktorej osou je šikmý priemet stopy roviny α .

Dôkaz:

$f : (\alpha) \rightarrow (\alpha_k)$ - šikmé premietanie roviny α do ν

$g : (\alpha) \rightarrow (\alpha_0)$ - rovnobežné premietanie v smere kolmom na rovinu súmernosti rovín α a ν

$$\begin{array}{ccc} & (\alpha) & \xrightarrow{f} (\alpha_k) \\ \text{Potom } h : (\alpha_k) \rightarrow (\alpha_0), h = g(f^{-1}) & g \downarrow & \\ & (\alpha_0) & \end{array}$$

Pre body M na priamke n_k^α platí, že $M_k = M_0$. □

Úloha 3.3

ŠIKMÉ PREMIETANIE

Príklad:

ŠP $= \left(135^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Zobrazte kocku s jednou stenou $ABCD$ v rovine α , pričom body $\alpha = (\infty; 2, 5; 3)$,

$A = (1; 4; ?)$, $B = (-2; 2, 5; ?)$.

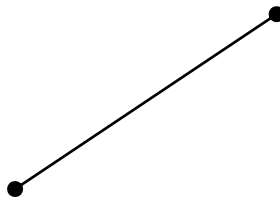
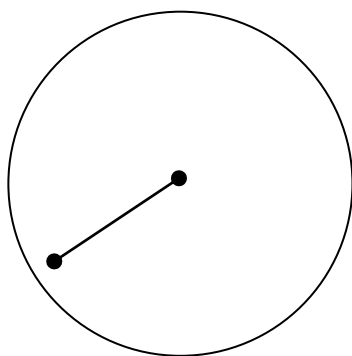
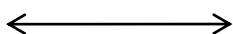
Riešenie:

4. Šikmý priemet guľovej plochy**Veta 4.1**

Rovnobežný priemet guľovej plochy je elipsa a jej vnútro (alebo kruh). Ohniská elipsy sú priemety krajných bodov priemeru guľovej plochy kolmého na priemetňu a dĺžka vedľajšej osi je zhodná s priemerom guľovej vety (dôsledok Q-D vety).

Úloha 4.1

ŠP = $(M_k, M_2; y^M)$. Zostrojte guľovú plochu $G = (S, r)$, $S = (S_k, S_2)$

**Úloha 4.2**

ŠP = $(135^\circ, 1/\sqrt{2})$. Zostrojte polguľu guľovej plochy $G = (S, r)$ v zápornom polpriestore s hranicou π , pričom $S = (0; 5; 0)$, $r = 5$, $m = (S, r) \subset \pi$.

