

I. PRAVOUHLÁ AXONOMETRIA

1. Princíp zobrazenia, základné pojmy

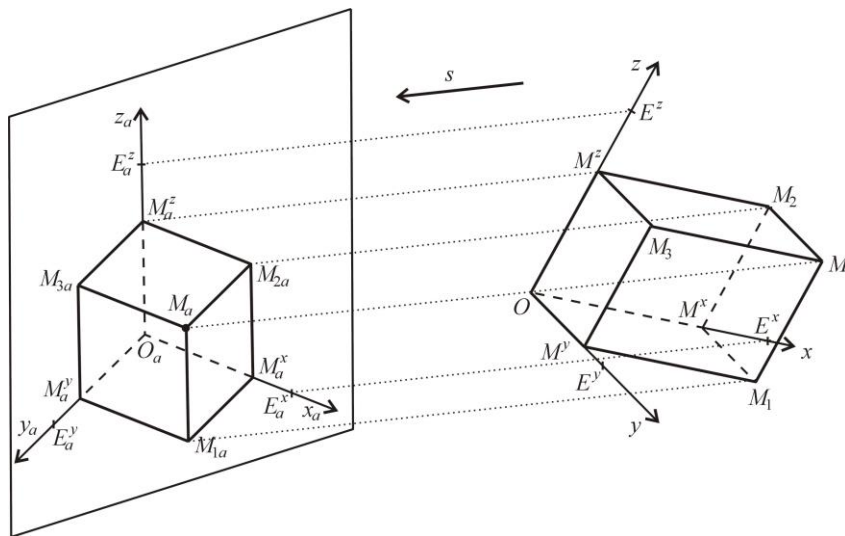
V priestore sú dané priamky (osi) $x \perp y \perp z$, ktoré prechádzajú jedným bodom O . Tieto priamky určujú tri navzájom kolmé roviny: $\pi = \overleftrightarrow{xy}$, $\nu = \overleftrightarrow{xz}$, $\mu = \overleftrightarrow{yz}$ - **prvá, druhá, tretia pomocná priemetňa**.

Na týchto priamkach vyznačíme **jednotkové body** E^x, E^y, E^z nasledovne: $E^x \in x, E^y \in y, E^z \in z$ a $|OE^x| = |OE^y| = |OE^z| = e$ - zvolená jednotka. Inokedy povieme, že je daný **ortonormálny súradnicový repér** $\langle O; E^x, E^y, E^z \rangle$.

Kolmý priemet bodu M do π, ν, μ nazývame **1., 2., 3. priemetom**, resp. **pôdorysom, nárysom, bokorysom** bodu M a označíme ich M_1, M_2, M_3 .

Nech ε je ľubovoľná rovina, tzv. **hlavná priemetňa**, ktorá neprechádza bodom O a je rôznobežná s priamkami x, y, z . Nech osnova premietania je daná priamkou s , ktorá je kolmá na hlavnú priemetňu. Kolmý priemet útvarov do ε označíme dolným indexom „ a “.

Nech $M = (x^M, y^M, z^M)$, kde $x^M = (M^x E^x O)$, $y^M = (M^y E^y O)$, $z^M = (M^z E^z O)$ sú deliace pomery.



Definícia 1.1

Základné pojmy a označenia:

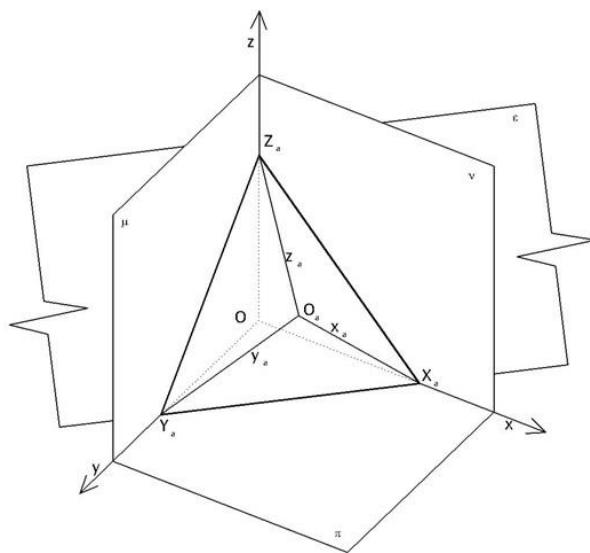
- **axonometrická priemetňa:** ε
- **axonometrický priemet bodu** M : M_a - kolmý priemet bodu M do ε
- **axonometrická súradnicová sústava** : pravouhlý priemet štvorstena $OE^x E^y E^z$ do ε
- **axonometrické jednotky** : $e_a^x = |O_a E_a^x|$, $e_a^y = |O_a E_a^y|$, $e_a^z = |O_a E_a^z|$ - dĺžky kolmých priemetov úsečiek OE^x, OE^y, OE^z
- **axonometrický pôdorys [nárys, bokorys] bodu** M : M_{1a} [M_{2a}, M_{3a}] - pravouhlý priemet bodu M_1 [M_2, M_3] do ε
- **i-tá ordinála bodu** M (za predpokladu, že $M_a \neq M_{ia}$) : priamka $\overleftrightarrow{M_a M_{ia}}$, $i = 1, 2, 3$

Definícia 1.2

Bijektívne zobrazenie $\varphi: E_3 \rightarrow \varepsilon \times \varepsilon$, ktoré priradí bodu M usporiadanú dvojicu $\varphi: M \rightarrow (M_a, M_{1a})$ [alebo (M_a, M_{2a}) , alebo (M_a, M_{3a})], pričom $M_a M_{1a} \parallel z_a$ [$M_a M_{2a} \parallel y_a, M_a M_{3a} \parallel x_a$] alebo $M_a = M_{1a}$ [$M_a = M_{2a}, M_a = M_{3a}$] sa nazýva **metóda pravouhlej (kolmej) axonometrie**.

Definícia 1.3

- **axonometrický osový kríž** : axonometrický priemet osí x, y, z
- **axonometrický trojuholník** : $\triangle XYZ$, kde ($X = x \cap \varepsilon$, $Y = y \cap \varepsilon$, $Z = z \cap \varepsilon$)
- **pomery skrátenia** prislúchajúce danje P.A.: $u = \frac{e_a^x}{e}$
 $v = \frac{e_a^y}{e}$, $w = \frac{e_a^z}{e}$
- **trojuholník skrátenia** prislúchajúce danje P.A.: $\triangle ABC$, ktorého vrcholy sú päty kolmíc z vrcholov axonometrického trojuholníka na jeho strany


Veta 1.1

Axonometrický trojuholník je ostrouhlý.

Dôkaz:

Chceme ukázať, že všetky vnútorné uhly $\triangle XYZ$ sú ostré. Ukážeme to napr. pre $\angle YXZ$.

Podľa kosínusovej vety v $\triangle XYZ$ platí: $|YZ|^2 = |XY|^2 + |XZ|^2 - 2|XY||XZ|\cos \angle YXZ$.

Z pravouhlých $\triangle OXZ$, $\triangle OYZ$, $\triangle OXY$ vyplýva:

$$|OX|^2 + |OZ|^2 = |XZ|^2, \quad |OY|^2 + |OZ|^2 = |YZ|^2, \quad |OX|^2 + |OY|^2 = |XY|^2.$$

Po dosadení týchto vzťahov do rovnosti vyššie, dostaneme

$$|OX|^2 = |XY||XZ|\cos \angle YXZ, \text{ t.j. } \cos \angle YXZ = \frac{|OX|^2}{|XY||XZ|} > 0 \text{ a kdeže ide o vnútorný uhol trojuholníka, tak}$$

$0 < \angle YXZ < 90^\circ$, teda je ostrý. □

Veta 1.2

Axonometrický osový kríž pozostáva z priamok, ktoré sú výškami axonometrického trojuholníka.

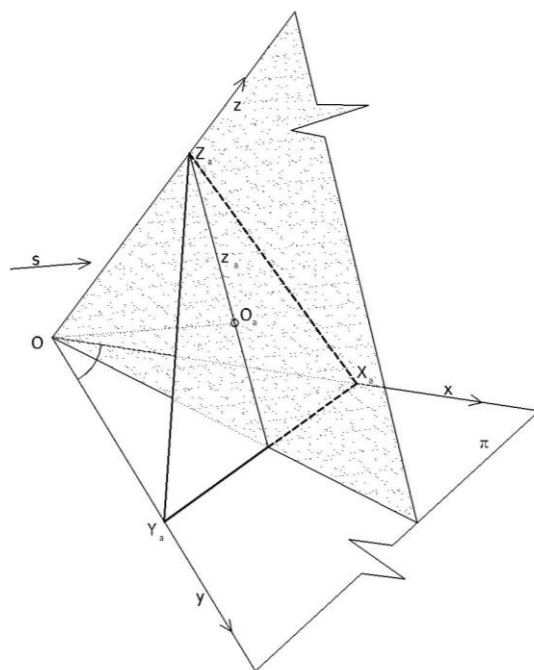
Dôkaz:

Dokážeme, že napr. z_a je kolmá na $\overrightarrow{X_a Y_a}$.

Platí, že $z \perp \pi$ ($z = \overrightarrow{OZ}$, $Z = Z_a$), z čoho vyplýva, že $z \perp \overrightarrow{XY}$, a teda $\overrightarrow{OZ} \perp \overrightarrow{XY}$.

Ďalej, $\overrightarrow{OO_a} \perp \varepsilon$ ($O_a \in \varepsilon$), z čoho vyplýva, že $\overrightarrow{OO_a} \perp \overrightarrow{XY}$.

Preto $\overrightarrow{OO_a Z} \perp \overrightarrow{XY}$, z čoho už máme kolmosť $\overrightarrow{Z_a O_a} \perp \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X_a Y_a}$. □


Dôsledok 1.1

Axonometrický priemet O_a bodu O je otrocentrom axonometrického trojuholníka $\triangle XYZ$.

Veta 1.3

Nech je daný v rovine ε ostrouhlý $\triangle XYZ$. Potom existujú práve dva rôzne body O, O' , pre ktoré platí, že každá dvojica priamok $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$, resp. $\overrightarrow{O'X}, \overrightarrow{O'Y}, \overrightarrow{O'Z}$ sú navzájom kolmé. Body O, O' sú súmerne združené podľa roviny ε a ich pravouhlé priemety do ε splývajú ortocentrom $\triangle XYZ$.

Poznámka: Veta vlastne hovorí, že existujú dve pravouhlé axonometrie, pre ktoré je daný trojuholník axonometrickým trojuholníkom.

Dôkaz:

Ak existuje bod O , tak jeho pravouhlý priemet do ε je ortocentrom $\triangle X_a Y_a Z_a$ (Dôsledok 1.1).

Stačí ukázať konštrukciu bodu O :

Chceme, aby $\overrightarrow{OX} \perp \overrightarrow{OY}$, preto O musí ležať na guľovej ploche G s priemerom $|XY|$. Keďže $\angle X_a O_a Y_a > 90^\circ$, tak bod O_a je vnútorným bodom guľovej plochy G .

Ďalej chceme, aby $\overrightarrow{OO_a} \perp \varepsilon$, preto bod O musí ležať na priamke k , ktorá je kolmá na ε a prechádza bodom O_a .

Z toho už dostaneme, že $O \in k \cap G$. Keďže priamka k prechádza vnútorným bodom guľovej plochy G , tak $k \cap G = \{O, O'\}$.

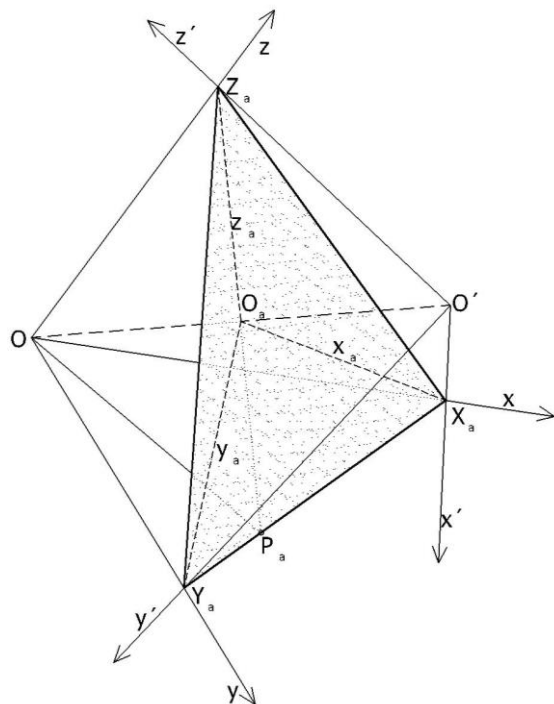
Ešte sa treba predvedieť, že priamky $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ}$, resp. $\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ sú navzájom kolmé. K tomu stačí ukázať, že $z = \overrightarrow{OZ} \perp \overrightarrow{OXY}$.

Označme P_a , ako priesečník $\overrightarrow{X_a Y_a} \cap z_a = \{P_a\}$. Vieme, že $\overrightarrow{ZO O_a} \perp \overrightarrow{X_a Y_a}$, preto $\overrightarrow{P_a O} \perp \overrightarrow{X_a Y_a}$. Z pravouhlého $\triangle O X_a Y_a$ a z Euklidovej vety o výške máme: $|X_a P_a| \cdot |Y_a P_a| = |O P_a|^2$.

Ďalej platí: $\overrightarrow{Y_a P_a} \perp \overrightarrow{O_a P_a}$, $\overrightarrow{P_a Z_a} \perp \overrightarrow{P_a X_a}$, $\overrightarrow{Y_a Z_a} \perp \overrightarrow{O_a X_a}$.

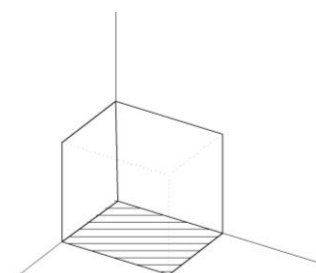
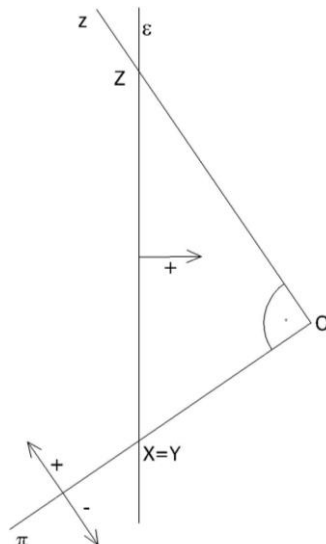
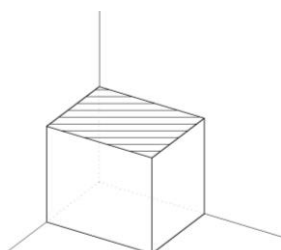
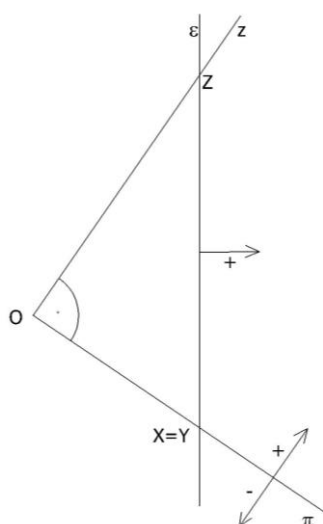
Z tohto možno usúdiť, že $\triangle Y_a P_a Z_a \sim \triangle O_a P_a X_a$ a platí $\frac{|P_a Y_a|}{|P_a Z_a|} = \frac{|P_a O_a|}{|P_a X_a|} \Rightarrow |P_a X_a| \cdot |P_a Y_a| = |P_a O_a| \cdot |P_a Z_a|$ a teda

$|P_a O_a| \cdot |P_a Z_a| = |O P_a|^2$. Ak uvažujeme $\triangle O P_a Z_a$, tak na základe Euklidovej vety o odvesne platí, že $\angle P_a O Z_a = 90^\circ$, t.j. $z \perp \overrightarrow{O P_a}$ a preto $z \perp \overrightarrow{OXY}$. □



V čom sa líšia tieto dve axonometrie?

Ak O je za priemetňou, tak sa jedná o **nadhľad**, ak O je pred priemetňou, tak sa jedná o **podhľad**.



Špeciálne typy axonometrie:

- **izometria:** axonometrický trojuholník je rovnostranný (uhly osí x, y, z s rovinou ε sú zhodné, axonometrické jednotky majú rovnakú veľkosť)
- **dimetria:** axonometrický trojuholník je rovnoramenný (uhly dvoch súradnicových osí s rovinou ε sú zhodné, axonometrické jednotky na týchto osiach majú rovnakú veľkosť)
- **trimetria:** všeobecná poloha

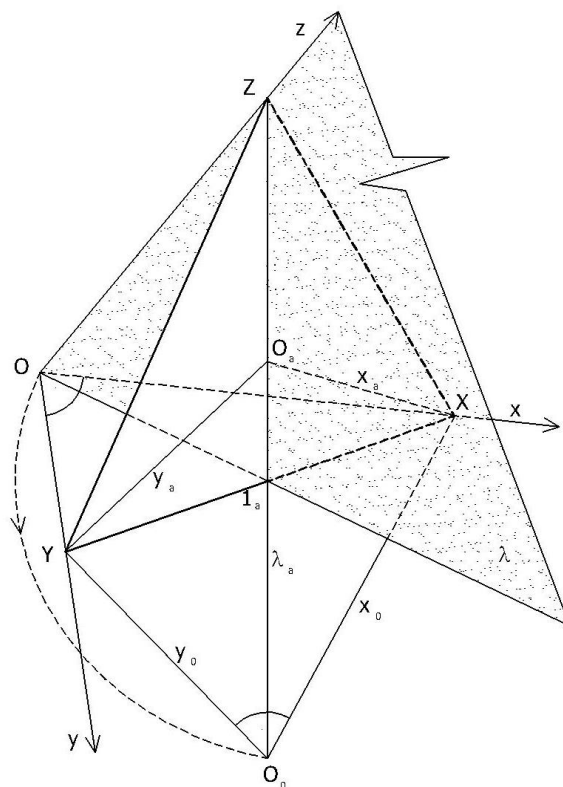
Úloha 1.1

Daný je axonometrický trojuholník ΔXYZ a jednotková dĺžka e . Zostrojte axonometrické jednotky, ak $XYZ = (10, 9, 12) = (|XY|, |YZ|, |XZ|)$.

Riešenie:

Úlohu možno riešiť dvojakým spôsobom:

- 1) pomocné priemetne π, ν, μ otočíme do axonometrickej priemetne ε - konštrukcia axonometrických jednotiek na osi x, y
- 2) axonometrické premietacie roviny súradnicových osí sklopíme do axonometrickej priemetne ε - konštrukcia axonometrickej jednotky na osi z



1) Otočíme rovinu π okolo priamky $\overline{XY} = \pi \cap \varepsilon$ do roviny ε .

Ak chceme nájsť otočenú polohu O_0 bodu O , tak vieme, že tento bod leží v axonometricky premietacej rovine λ , ktorej axonometrický priemet je priamka totožná s axonometrickým priemetom z_a . Pri konštrukcii bodu O_0 ešte využijeme pravý uhol $\angle XOY$, preto O_0 leží na tálesovej kružnici opísanej nad úsečkou XY .

Medzi otočenými polohami a axonometrickými priemetmi bodov je vzťah **pravouhlej osovej afinity** f , ktorej osou je priamka $X_a Y_a$ a dvojicou bodov vzor-obraz O_a, O_0 .

$$f: (\pi_a) \rightarrow (\pi_0), f(X_a Y_a; O_a, O_0)$$

Na otočenú polohu $x_0 = \overline{O_0 X_0}$, $y_0 = \overline{O_0 Y_0}$ nanesieme danú jednotkovú dĺžku e a potom v inverznom zobrazení f^{-1} nájdeme hľadané body: $f^{-1}(E_0^x) = E_a^x$, $f^{-1}(E_0^y) = E_a^y$.

2) Sklopená poloha (O) bodu O sa zostrojí s využitím pravého uhla $\angle ZO1$, kde $1 = \lambda \cap XY$ a pravého uhla $\angle OO_a Z$. Preto bod (O) leží na tálesovej kružnici opísanej nad úsečkou $1_a Z_a$ a na priamke, ktorá prechádza bodom O_a a je kolmá na priamku z_a . Na sklopenú polohu nanesieme požadovanú dĺžku e .

Všimnime si, že uhol $\gamma \cong \angle O_a(Z)(O)$ je nič iné, ako $\angle z\varepsilon$ a vidíme, že $\cos \gamma = \frac{e_a^z}{e} = w$ (t.j. pomer skrátenia).

Podobne, ak $\alpha \cong \angle x\varepsilon$ a $\beta \cong \angle y\varepsilon$, tak $\cos \alpha = \frac{e_a^x}{e} = u$ a $\cos \beta = \frac{e_a^y}{e} = v$. Platí, že $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$, $\cos \gamma = \sin(90^\circ - \gamma)$, kde $(90^\circ - \alpha)$, $(90^\circ - \beta)$, $(90^\circ - \gamma)$ sú v danom poradí uhly priamky $\overline{OO_a}$ so súradnicovými osami x, y, z .

Ak $O_a = (x_o, y_o, z_o)$ a $d = |OO_a| = |O\varepsilon|$, tak $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{x_o}{d}$, $\cos(90^\circ - \beta) = \frac{y_o}{d}$, $\cos(90^\circ - \gamma) = \frac{z_o}{d}$ a

$$\cos^2(90^\circ - \alpha) + \cos^2(90^\circ - \beta) + \cos^2(90^\circ - \gamma) = \frac{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}{d^2} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

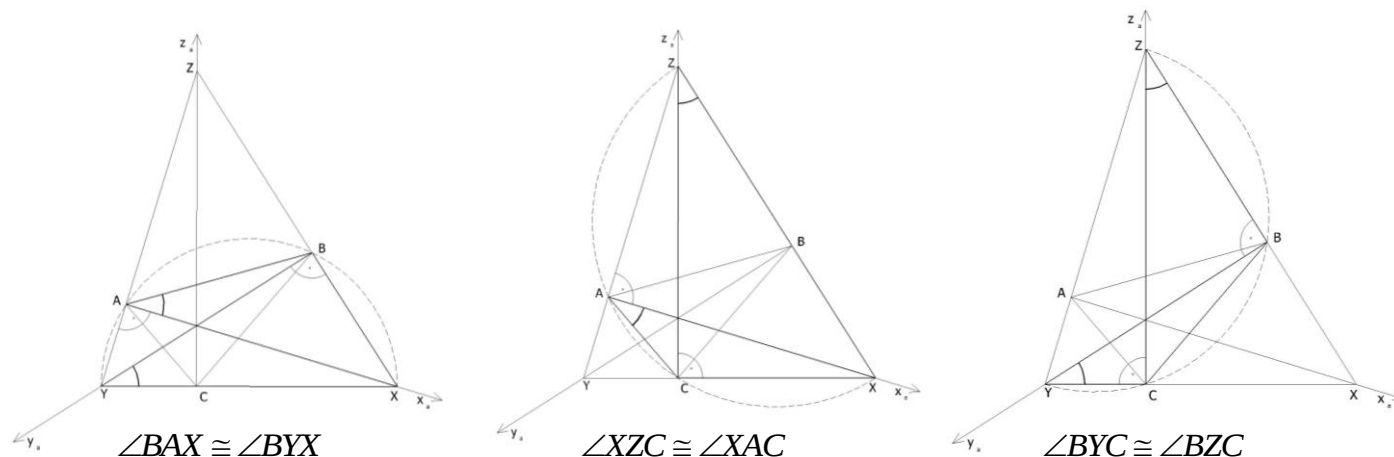
$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2, \text{ t.j. } u^2 + v^2 + w^2 = 2.$$

Veta 1.4

- a) Pre pomery skrátenia v pravouhlej axonometrie platí $u^2 + v^2 + w^2 = 2$.
- b) Axonometrické priemety súradnicových osí sú osami uhlov trojuholníka skrátenia.
- c) Pre strany trojuholníka skrátenia platí: $|BC| : |AC| : |AB| = u^2 : v^2 : w^2$

Dôkaz:

- a) Dokázané pred vetou.
- b) Dôkaz urobíme využitím obvodových uhlov prislúchajúcich tomu istému kružnicovému oblúku.



Keďže $\angle BZC \cong \angle XZC$ a $\angle BYC \cong \angle BYX$, tak $\angle BAX \cong \angle BYX \cong \angle BYC \cong \angle BZC \cong \angle XZC \cong \angle XAC$, t.j. os x je osou uhla $\angle CAB$.

Analogicky aj ďalšie uhly.

c)

Z b) vieme, že $\angle BCX \cong \angle YCA$.

$$\begin{aligned}\angle YAC &= 90^\circ - \angle CAX = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle CAB = 90^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABC - \angle ACB) = \\ &= \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = \angle ABY + \angle ACZ = \angle AXY + \angle AXZ = \angle ZXY\end{aligned}$$

Z (u-u) vety potom vyplýva, že $\triangle BXC \sim \triangle YAC \sim \triangle BAZ \sim \triangle YXZ$, teda

$$|BC| : |BX| = |BZ| : |BA| \Rightarrow |AB| \cdot |BC| = |BZ| \cdot |BX| = |BO|^2$$

$$|BC| : |CX| = |CY| : |CA| \Rightarrow |BC| \cdot |CA| = |CX| \cdot |CY| = |CO|^2$$

$$|AB| : |AZ| = |AY| : |AC| \Rightarrow |AB| \cdot |AC| = |AY| \cdot |AZ| = |AO|^2$$

(posledná rovnosť platí na základe Euklidovej vety o výške). Keďže

$$u = \cos \alpha, \alpha \cong \angle x\epsilon = \angle xx_a \text{ a platí, že } \overrightarrow{OO_a} \perp x_a \text{ a } \overrightarrow{OA} \perp x, \text{ tak } \alpha \cong \angle AOO_a \text{ a } u = \cos \alpha = \frac{d}{|OA|} \Rightarrow |OA| = \frac{d}{u}.$$

Podobne $|OB| = \frac{d}{v}$, $|OC| = \frac{d}{w}$, preto $|AB| \cdot |BC| = \frac{d^2}{v^2}$, $|BC| \cdot |CA| = \frac{d^2}{w^2}$, $|AB| \cdot |AC| = \frac{d^2}{u^2}$ a po vydelení príslušných rovníc dostaneme potrebný pomer. $\square$

Dôsledok 1.2

Pravouhlá axonometria je určená:

- axonometrickou súradnicovou sústavou $\langle O_a; E_a^x, E_a^y, E_a^z \rangle$
- axonometrickým trojuholníkom
- axonometrickým osovým krížom $x_a \cup y_a \cup z_a$
- pomermi skrátania (t.j. trojicou kladných reálnych čísel u, v, w , pre ktoré platí $u^2 + v^2 + w^2 = 2$)

V predposlednom prípade si zvolíme ľubovoľný trojuholník, v ktorom sú priamky axonometrického osového kríža výškami, za axonometrický (ide o posunutie priemetne).

2. Riešenie polohových úloh

Definícia 2.1

- **pôdorysný stopník priamky** $m : P^m = m \cap \pi$
- **nárysý stopník priamky** $m : N^m = m \cap \nu$
- **bokorysný stopník priamky** $m : M^m = m \cap \mu$
- **axonometrický stopník priamky** $m : R^m = m \cap \epsilon$

Ak poznáme obrazy dvoch bodov, napr. $A = (A_a, A_{1a})$, $B = (B_a, B_{1a})$ priamky m , tak priamka je jednoznačne určená so svojim **axonometrickým priemetom** $m_a = \overrightarrow{A_a B_a}$ a **axonometrickým pôdorysom** $m_{1a} = \overrightarrow{A_{1a} B_{1a}}$.

Skúmame rôzne polohy priamky vzhľadom na priemetne, pričom priamky budú dané so svojim axonometrickým priemetom a axonometrickým pôdorysom.

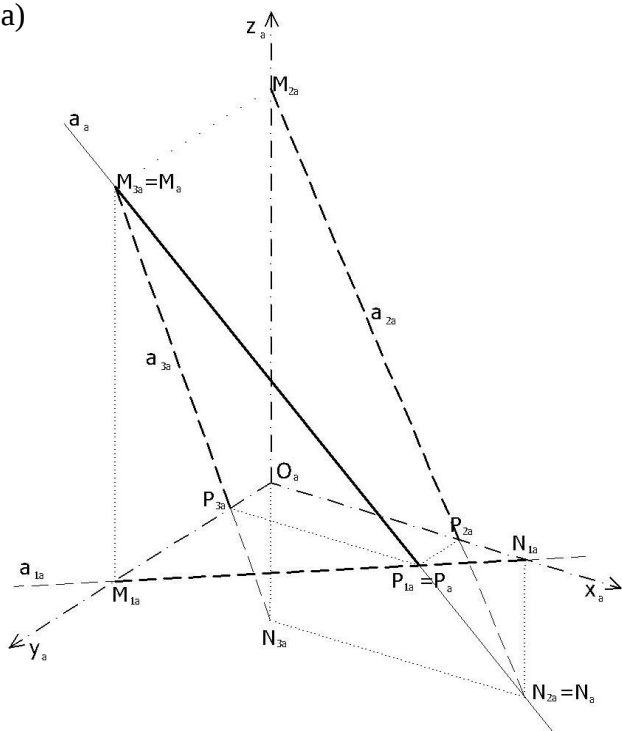
Úloha 2.1

Nájdite stopníky priamky, ak existujú, ak je priamka

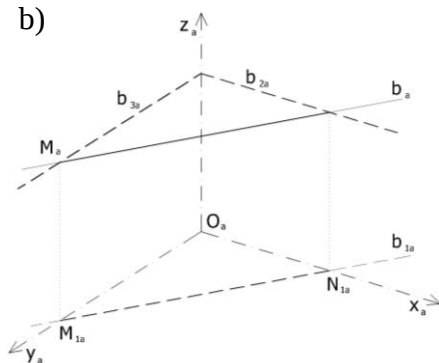
- a) a vo všeobecnej polohe b) $b \parallel \pi$ c) $c \parallel \nu$ d) $d \parallel \mu$ e) $e \perp \pi$ f) $f \perp \varepsilon$

Riešenie:

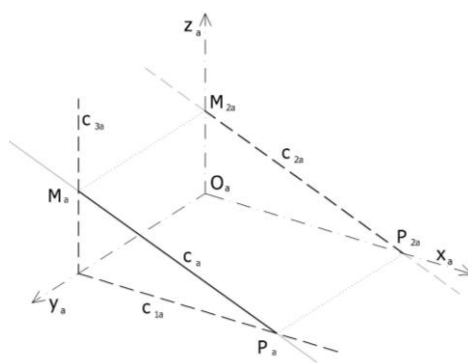
a)



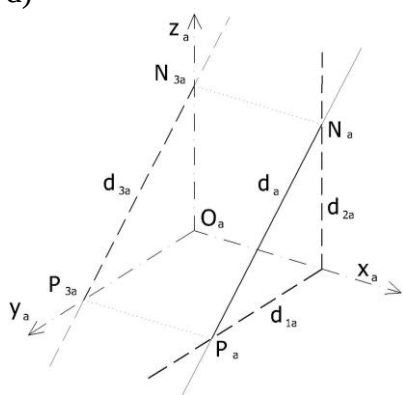
b)



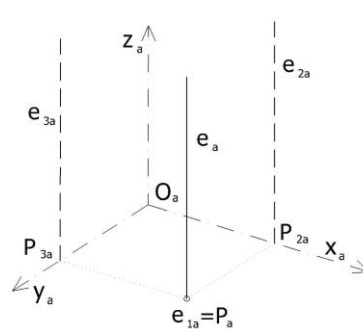
c)



d)



e)



f)

Otázka: Existuje taký prípad, keď priamka nie je určená svojim axonometrickým priemetom a axonometrickým pôdorysom?

Vzájomná poloha dvoch priamok:

- rovnobežné priamky, ktoré nepatria smeru premietania, sa premietajú do priamok, ktoré sú navzájom rovnobežné
- axonometrický priemet a axonometrický pôdorys (nárys, bokorys) priesečníku rôznobežných priamok ležia na 1. (2., 3.) ordinále
- mimobežné priamky nemajú žiadny spoločný bod, teda spoločný bod priemetov priamok je priemetom dvoch rôznych bodov

Axonometrický priemet roviny kolmej na axonometrickú priemetňu ε je priamka. Ak rovina nemá túto vlastnosť, tak priemetom roviny je celá priemetňa.

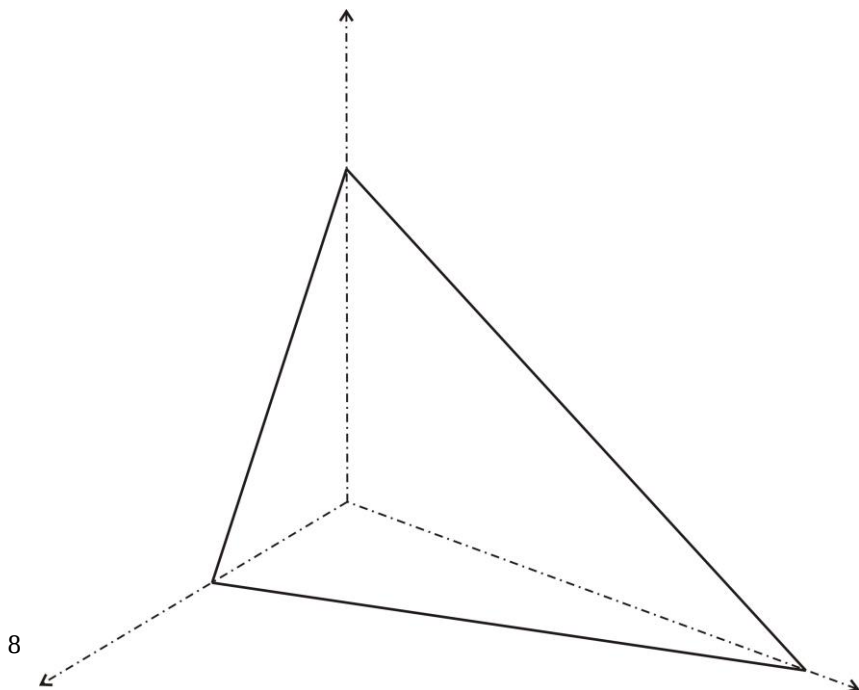
Definícia 2.2

- **pôdorysná (nárysná, bokorysná) stopa roviny α** : $p^\alpha = \alpha \cap \pi$ ($n^\alpha = \alpha \cap \nu$, $m^\alpha = \alpha \cap \mu$)
- **axonometrická stopa roviny α** : $r^\alpha = \alpha \cap \varepsilon$
- **hlavná priamka roviny α** : priamka roviny α rovnobežná s axonometrickou priemetňou ε , t.j. $h^\alpha \parallel r^\alpha$
- **hlavná priamka 1. (2.,3.) osnove roviny α** : priamka roviny α rovnobežná s priemetňou π (ν, μ), t.j. $^I h^\alpha \parallel p^\alpha$ ($^{II} h^\alpha \parallel n^\alpha$, $^{III} h^\alpha \parallel m^\alpha$)
- **spádová priamka roviny α** : priamka roviny α kolmá na axonometrickú priemetňu ε , t.j. $s^\alpha \perp r^\alpha$
- **spádová priamka 1. (2.,3.) osnove roviny α** : priamka roviny α kolmá na priemetňu π (ν, μ), t.j. $^I s^\alpha \perp p^\alpha$ ($^{II} s^\alpha \perp n^\alpha$, $^{III} s^\alpha \perp m^\alpha$)

Úloha 2.2

Dourčte bod A a B tak, aby ležal v danej rovine α , pričom $A = (A_\nu, ?)$, $B = (?, B_\mu)$, $\alpha = \overleftrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$.

Riešenie:



Špeciálne polohy rovín:

$$\alpha \parallel \pi$$

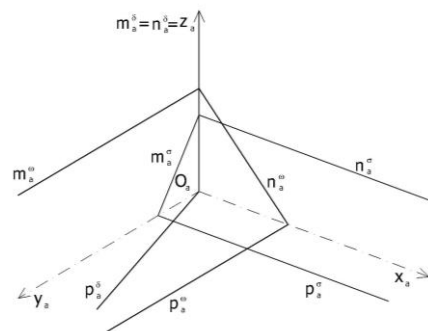
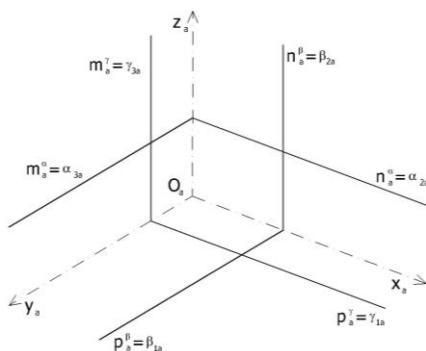
$$\beta \parallel \mu$$

$$\gamma \parallel \nu$$

$$\delta \perp \pi \wedge z \subset \delta$$

$$\sigma \perp \mu$$

$$\omega \perp \nu$$



Veta 2.1

Medzi axonometrickými priemetmi a axonometrickými pôdorysmi bodov tej istej roviny α (nie je kolmá na π ani na ε) je vzťah osovej afinity, ktorej osou je axonometrický priemet pôdorysnej stopy tejto roviny.

Podobne, medzi axonometrickými priemetmi a axonometrickými nárysmi, resp. bokorysmi.

Dôkaz:

Kolmé premietanie do π označme $f: E^3 \rightarrow \pi$, kolmé premietanie do ε označme $g: E^3 \rightarrow \varepsilon$.

$$(\alpha) \xrightarrow{f} (\alpha_1)$$

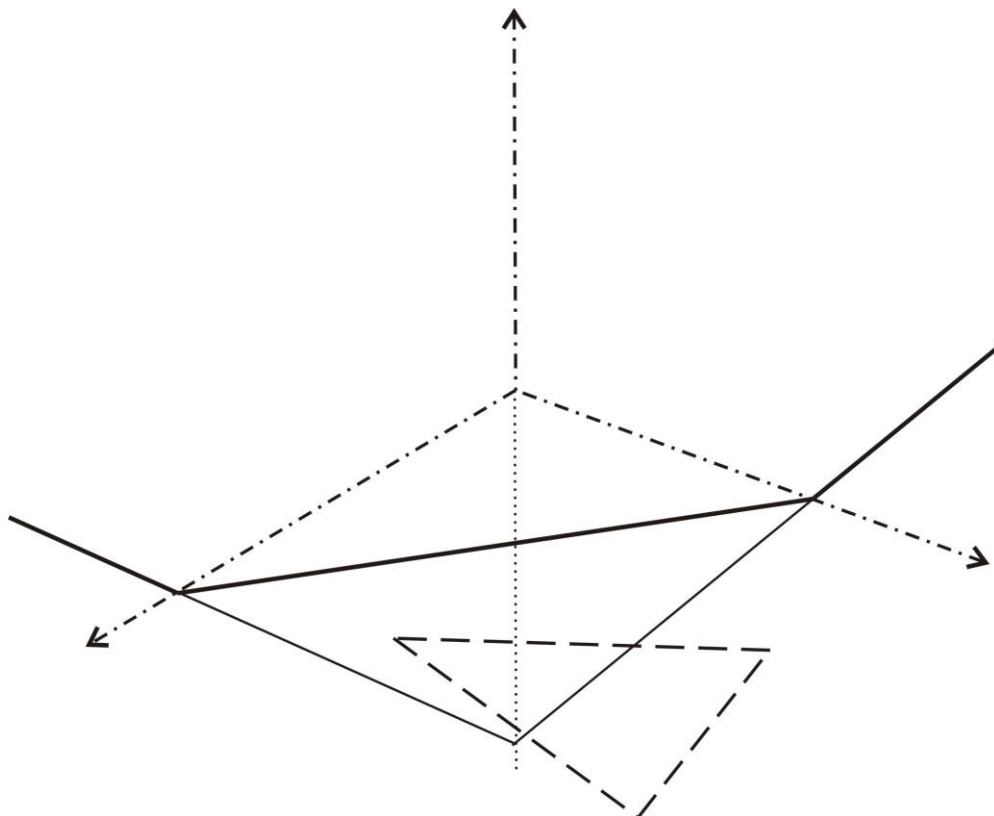
Potom vzťah medzi (α_a) a (α_{1a}) možno vidieť na diagrame:

$$\begin{array}{ccc} (\alpha) & \xrightarrow{f} & (\alpha_1) \\ g \downarrow & & g \downarrow \\ (\alpha_a) & & (\alpha_{1a}) \end{array}$$

Obrazom bodu $A_a \in (\alpha_a)$ je $A_{1a} \in (\alpha_{1a})$, kde $g(f(g^{-1}(A_a))) = A_{1a}$. Stačí dokázať, že toto zobrazenie má silno samodružnú priamku. Naozaj, pre body na priamke p_a^α platí, že $P_a = P_{1a}$. □

Úloha 2.3

Zostrojte axonometrický priemet $\triangle ABC$ v rovine $\alpha = \overleftrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$, ak sú dané axonometrické pôdorysy týchto bodov.



Úloha 2.4

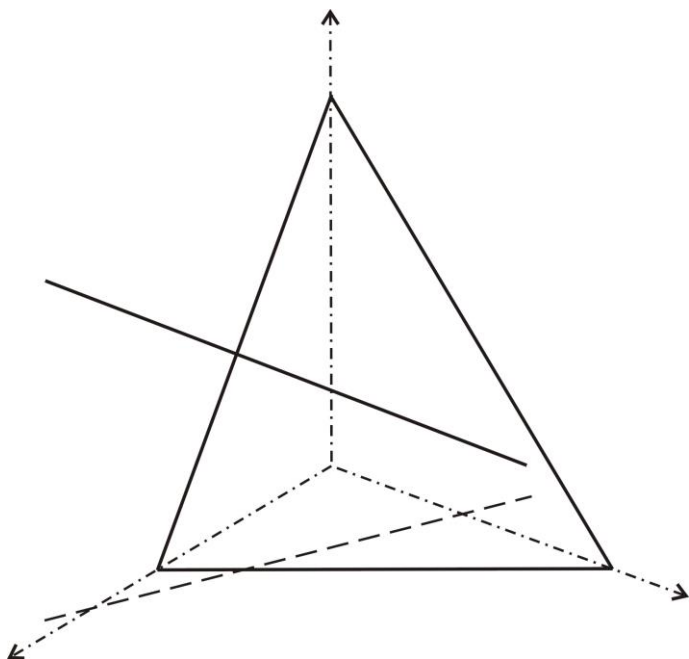
Zostrojte priesečník priamky s rovinou, ak

a) priamka je $a = (a_a, a_{1a})$ a rovina je axonometrická priemetňa ε .

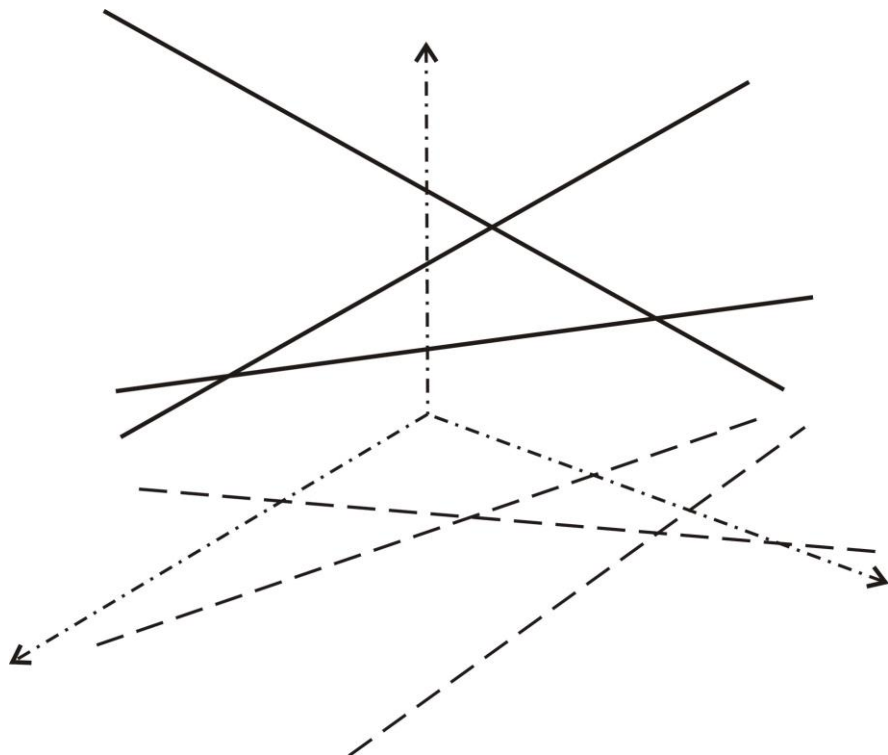
b) priamka je $c = (c_a, c_{1a})$ a rovina je daná dvoma rôznobežkami $\alpha = \overrightarrow{ab}$, $a = (a_a, a_{1a})$, $b = (b_a, b_{1a})$.

Riešenie:

a)



b)



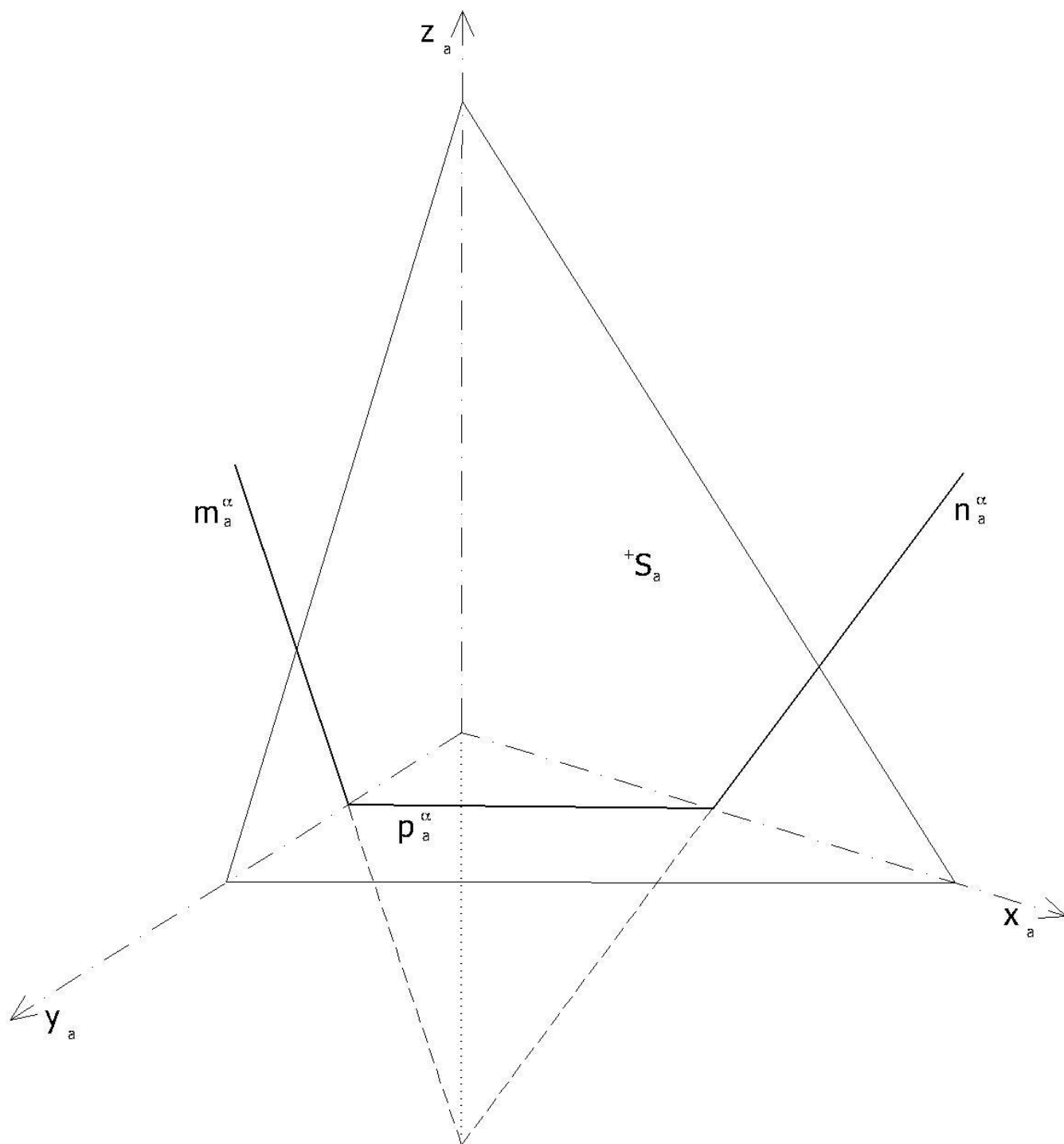
Veta 2.2

Medzi rovnobežnými priemetmi dvoch rovinných rezov tej istej hranolovej (kružnicovej valcovej) plochy rovinami, z ktorých žiadna nie je osnovová vzhľadom na plochu, ani premietacia v danom premietaní, je vzťah osovej afinity s osou v priemete priesečnice rovín rezu.

Úloha 2.5

V P.A. zostrojte časť valcovej plochy V medzi rovinami ν a α , ak podstava valcovej plochy V je kružnica $k \subset \nu$, $k(S, r)$ a rovina je daná $\alpha = \overrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$.

Riešenie:

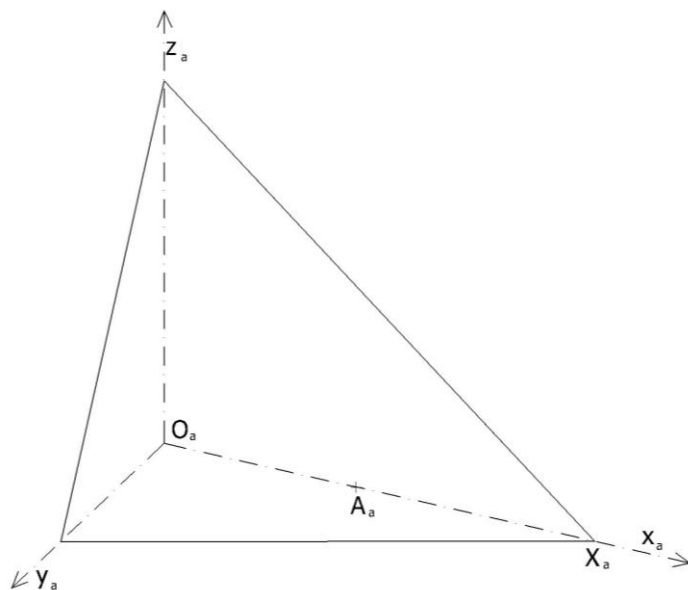


3. Riešenie metrických úloh

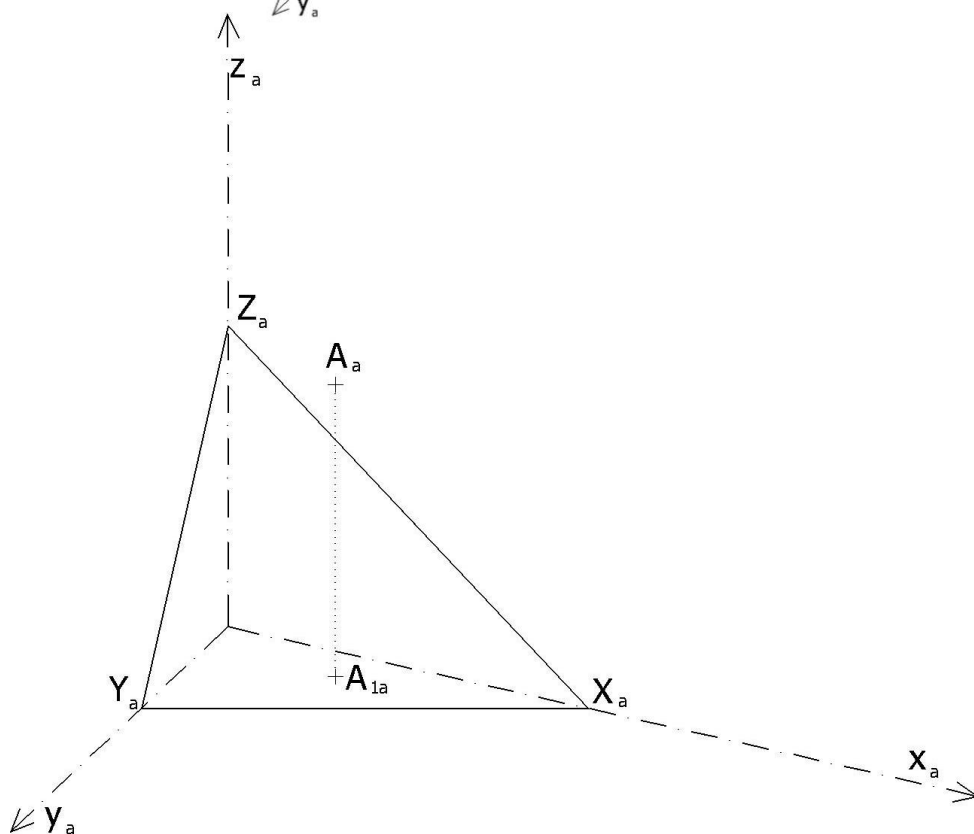
3.1. Vzdialenosť bodu od priemetne

Nech $A = (A_a, A_{1a})$. Na zistenie vzdialenosti $|A\varepsilon|$ treba rozlíšiť dva prípady:

- 1.) Ak bod A je bodom niektorej osi, tak stačí uvažovať axonometricky premietaciu rovinu tejto osi, sklopiť ju priemetne a potom $|A\varepsilon| = |A_a(A)|$.



- 2.) Ak bod A nie je bodom osi x, y, z , tak $|A\varepsilon| = |\varepsilon'\varepsilon|$, kde $\varepsilon' \parallel \varepsilon$ a $A \in \varepsilon'$.



3.2. Otáčanie roviny do axonometrickej priemetne

Metrické úlohy sa zväčša riešia otočením roviny do priemetne ε okolo jej axonometrickej stopy. Platí totiž veta, ktorej platnosť je zrejmá z pravouhlého premietania.

Veta 3.1

Medzi axonometrickými priemetmi útvarov roviny a ich otočenými polohami do axonometrickej priemetne je vzťah pravouhlej osovej afinity, ktorej osou je axonometrická stopa roviny.

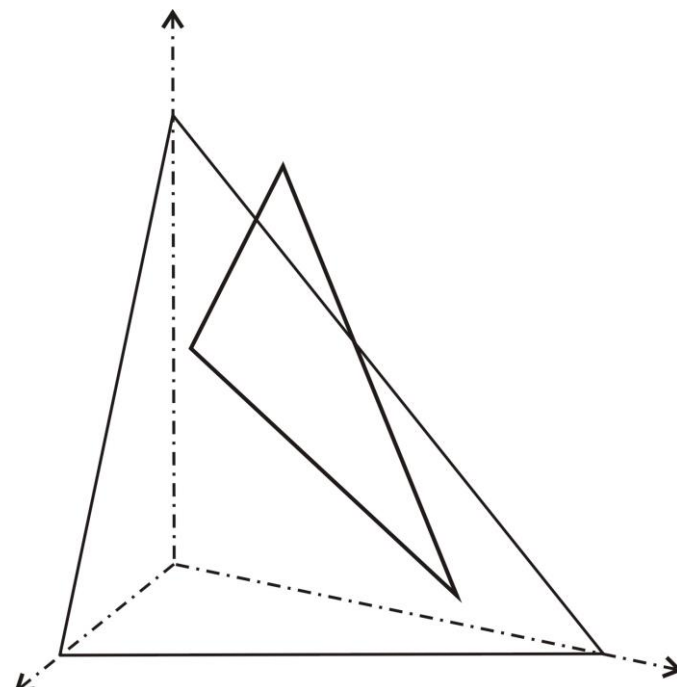
Zložitosť konštrukcie závisí od polohy danej roviny:

- 1.) Ak rovina útvaru je niektorá súradnicová rovina π, ν, μ , tak konštrukcia je zrejماً z konštrukcie axonometrických jednotiek v 1. kapitole.

Úloha 3.1

Nájdite skutočnú veľkosť trojuholníka ABC , ktorý leží v rovine ν .

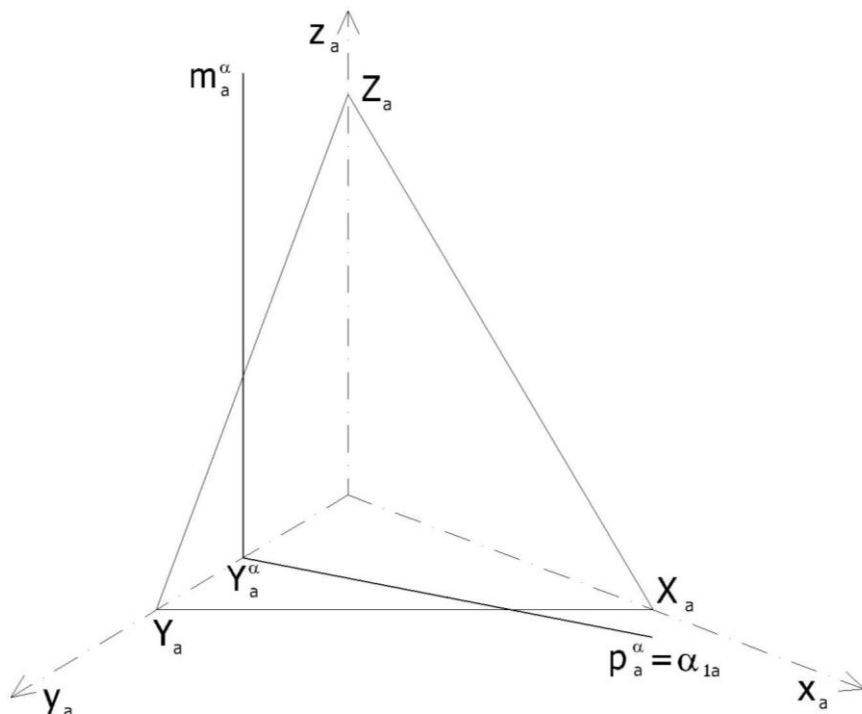
Riešenie:



- 2.) Ak rovina α útvaru je kolmá na niektorú pomocnú priemetňu π, ν, μ , napr. π , tak treba si uvedomiť, že pre stopy takej roviny platí:

$$n^\alpha \perp p^\alpha, \quad m^\alpha \perp p^\alpha, \quad n^\alpha \parallel m^\alpha \parallel z.$$

Existuje teda pravouhlá osová afinita $f: (\alpha_a) \rightarrow (\alpha_0)$, $f(r_a^\alpha; Y_a^\alpha, Y_0^\alpha)$, kde $Y^\alpha = \alpha \cap y$ a otočenú polohu tohto bodu zostrojíme pomocou pravého uhla $\angle 1Y^\alpha 2$, pričom $1 = \alpha \cap XY$ a $2 = \alpha \cap YZ$.

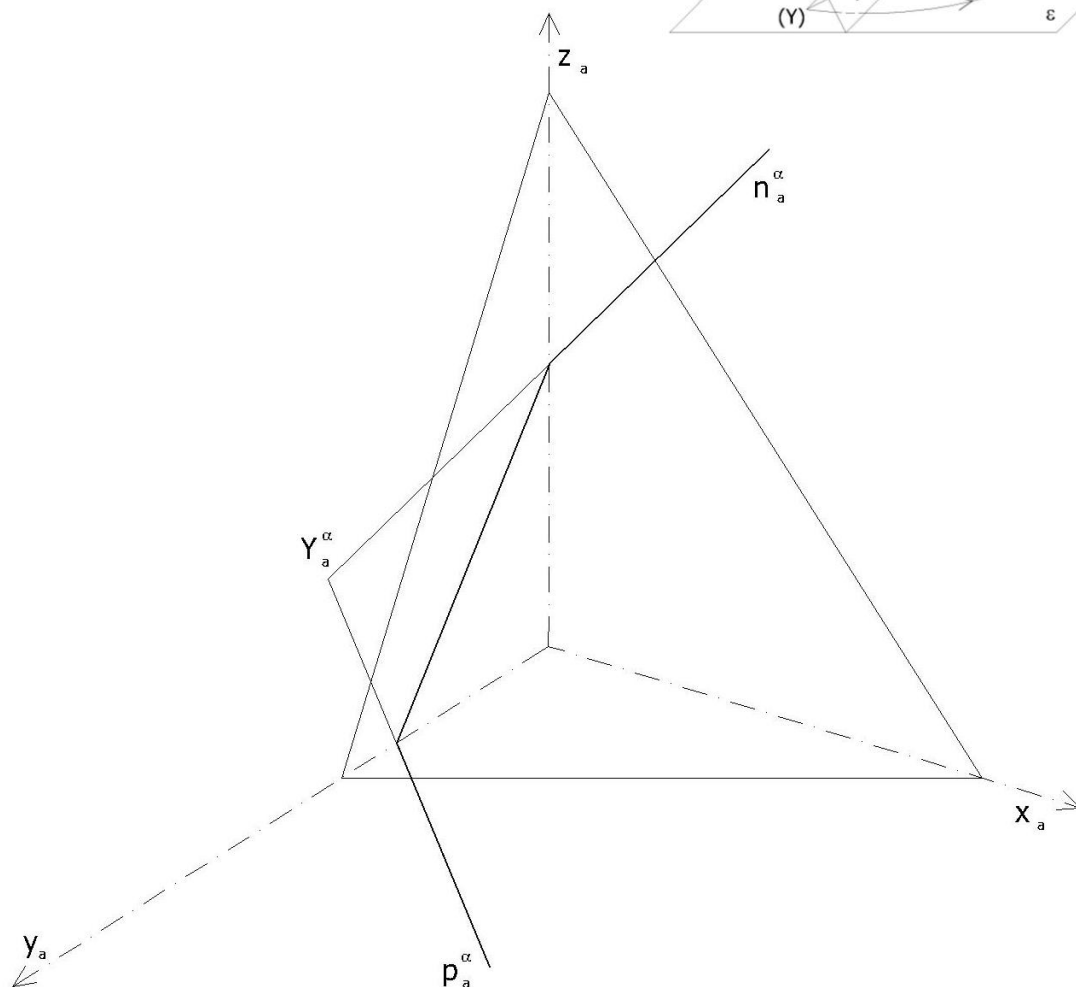
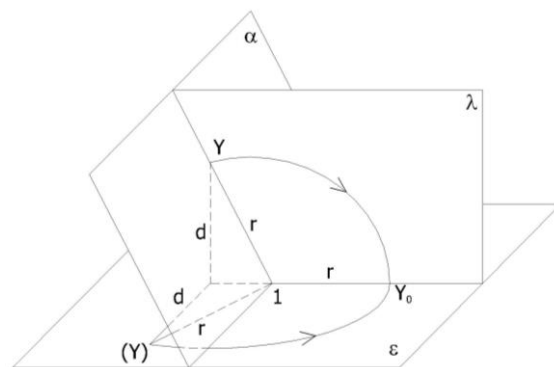


3.) Ak rovina α útvaru je vo všeobecnej polohe, tak konštrukciu otočenej polohy útvaru vysvetlíme na nasledujúcej úlohe.

Úloha 3.2

Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC v rovine $\alpha = \overleftrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$, ak sú dané body $A = (?, A_{1a})$, $B = (?, B_{1a})$.

Riešenie:



3.3. Dĺžka úsečky

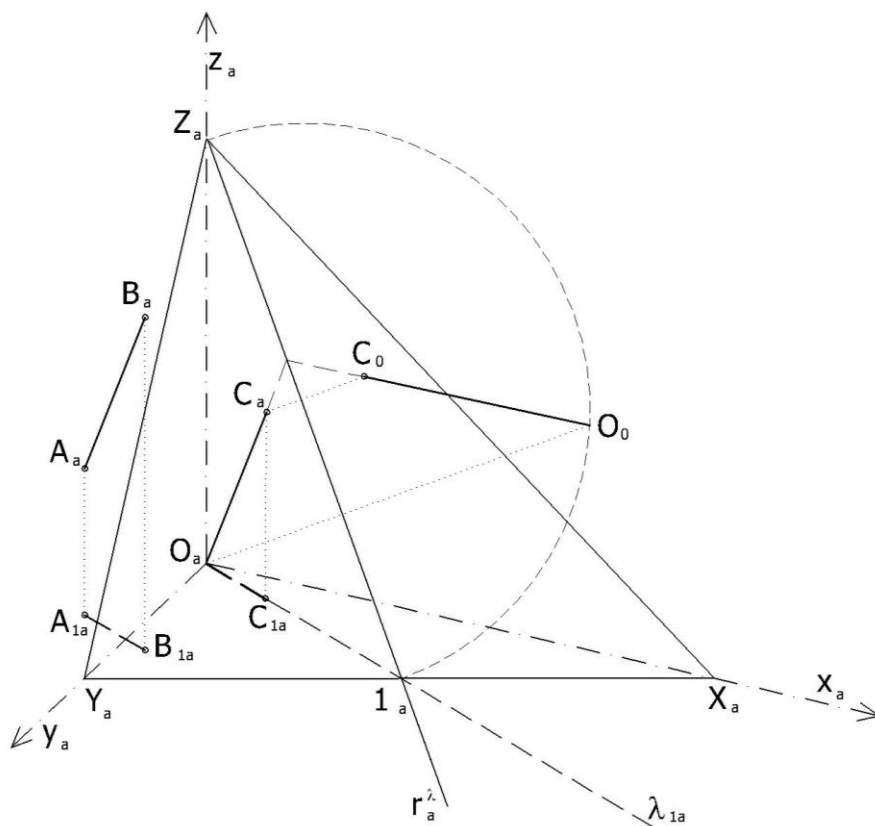
Uvedieme dve metódy:

- 1.) Otočenie premietacej roviny priamky incidentnej s úsečkou $\overline{AB}$ do axonometrickej priemetne.

Ak posúvame úsečku $\overline{AB}$, tak vzdialenosť posunutých bodov $\overline{A'B'}$ je zhodná so vzdialenosťou bodov A, B . Ak to posunutie vykonáme tak, že jeden z bodov A, B posunieme do bodu O , tak môžeme konštrukciu vzdialenosti zjednodušiť.

Teda uvažujme bod C taký, že jeho axonometrický priemet resp. axonometrický pôdorys tvorí s bodmi A_a, B_a, O_a , resp. A_{1a}, B_{1a}, O_{1a} rovnobežník. Ak naša úloha je nájsť dĺžku úsečky $\overline{AB}$, tak stačí nám nájsť dĺžku úsečky $\overline{CO}$.

Uvažujeme prvú premietáciu rovinu λ priamky OC . Stopy tejto roviny (keďže je tá rovina kolmá na π) sú na seba kolmé. Otočíme túto rovinu do ε okolo jej axonometrickej stopy, čo je priamka $Z_a 1_a$, kde $1_a = \lambda_{1a} \cap X_a Y_a$. Potrebujeme nájsť otočenú polohu nejakého bodu, napr. bodu O . Rovina otáčania bodu O je kolmá na priemetnu ε , teda sa to zobrazí do priamky kolmej na $Z_a 1_a$ a prechádzajúcej bodom O_a . Okrem toho uhol $\angle(1_0 Z)$ je pravý, teda uhol $\angle(1_0 O_0 Z_0)$ je tiež pravý. Preto bod O_0 leží na kružnici opísanej nad priemerom $Z_a 1_a$ a na kolmici k priamke $Z_a 1_a$ idúcej bodom O_a . Využitím osovej afinity (os afinity je $Z_a 1_a$, dvojica bodov O_a, O_0) medzi otočenými polohami a axonometrickými priemetmi môžeme zostrojiť bod C_0 a potom skutočná veľkosť danej úsečky je $|O_0 C_0|$.



Uvažujeme prvú premietáciu rovinu λ priamky OC . Stopy tejto roviny (keďže je tá rovina kolmá na π) sú na seba kolmé. Otočíme túto rovinu do ε okolo jej axonometrickej stopy, čo je priamka $Z_a 1_a$, kde $1_a = \lambda_{1a} \cap X_a Y_a$. Potrebujeme nájsť otočenú polohu nejakého bodu, napr. bodu O . Rovina otáčania bodu O je kolmá na priemetnu ε , teda sa to zobrazí do priamky kolmej na $Z_a 1_a$ a prechádzajúcej bodom O_a . Okrem toho uhol $\angle(1_0 Z)$ je pravý, teda uhol $\angle(1_0 O_0 Z_0)$ je tiež pravý. Preto bod O_0 leží na kružnici opísanej nad priemerom $Z_a 1_a$ a na kolmici k priamke $Z_a 1_a$ idúcej bodom O_a . Využitím osovej afinity (os afinity je $Z_a 1_a$, dvojica bodov O_a, O_0) medzi otočenými polohami a axonometrickými priemetmi môžeme zostrojiť bod C_0 a potom skutočná veľkosť danej úsečky je $|O_0 C_0|$.

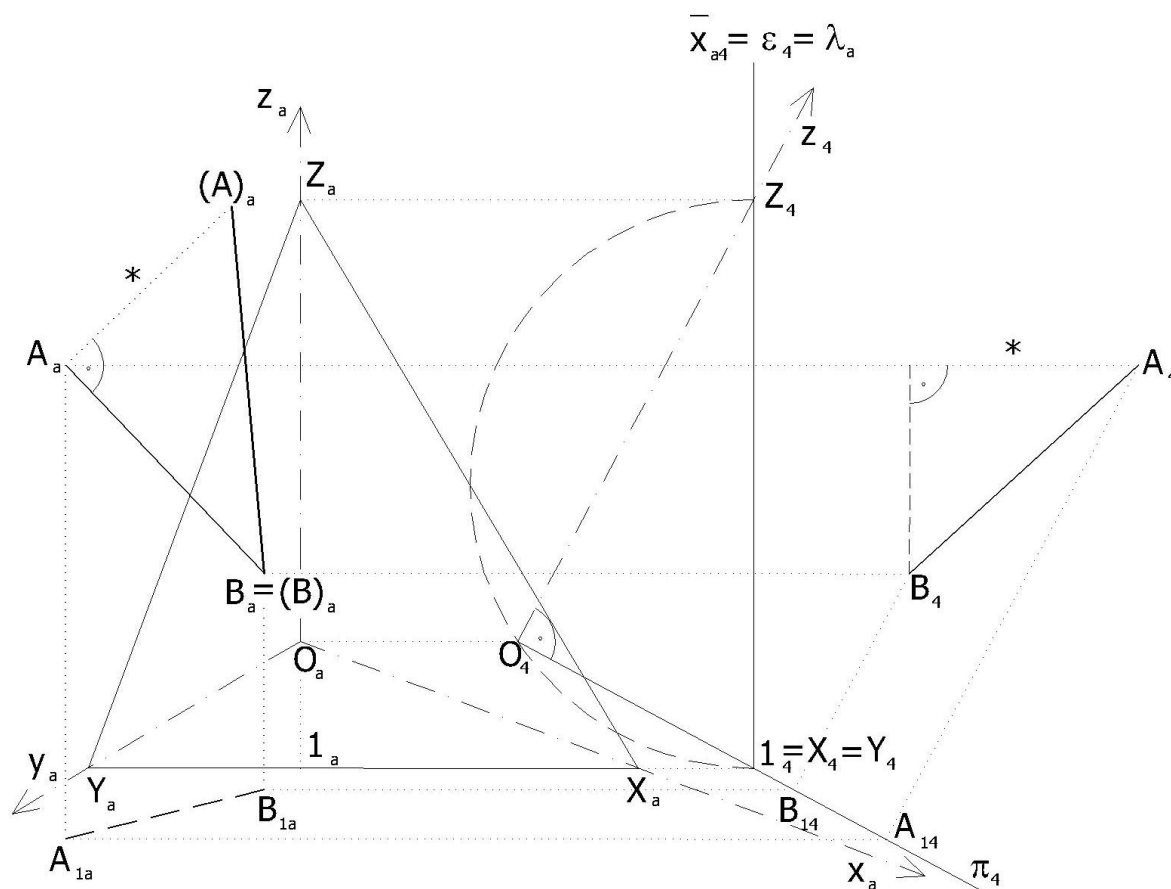
- 2.) Pomocou 4. priemetne, značme λ , čím pravouhlú axonometriu prevedieme na Mongeovo zobrazenie pre roviny ε a λ .

Jeden priemet v Mongeovom zobrazení bude totožný s axonometrickým priemetom v pravouhlej axonometrii, ďalší priemet budeme značiť indexom 4.

Zvoľme si teda ľubovoľnú rovinu λ , kolmú napr. na priamku XY (teda $\lambda \perp \varepsilon, \lambda \perp \pi$). Táto rovina nech je nová priemetňa a pri označení $\lambda \cap \varepsilon = \{\bar{x}\}$ platí $\bar{x}_4 = \lambda_a = \varepsilon_4$, $X_4 = Y_4 \in \varepsilon_4$ a $Z_4 \in \varepsilon_4$.

Z kolmosti $\lambda \perp \pi$ vyplýva, že π_4 je priamka. Pravouhlý trojuholník $ZO1$ (kde bod 1 je priesečníkom priamky XY s kolmo premietaciou rovinou osi $z = ZO$ na rovinu ε) sa v 4. priemetni objaví v skutočnej veľkosti. Keďže uhol $\angle(ZO1) = 90^\circ$, aj $\angle(Z_4 O_4 1_4) = 90^\circ$ a teda bod O_4 leží na telesovej kružnici nad priemerom $Z_4 1_4$ ($1_4 = X_4 = Y_4$) a na ordinále t.j. na kolmici na os $\bar{x}_4$. Preto $\pi_4 = O_4 1_4$ a body A_{14} a B_{14} ležia na tejto priamke a na ordinále idúce bodmi A_{1a} a B_{1a} . Štvrtý priemet bodov A, B možno zostrojiť z vlastnosti, že $A_a A_4 \perp \bar{x}_4$ a $A_4 A_{14} \parallel O_4 Z_4$ (keďže $AA_1 \parallel OZ$).

Úlohu nájsť dĺžku úsečky AB v Mongeovom zobrazení dourčíme skolpením roviny κ ($a \subset \kappa, \kappa \perp \varepsilon$) do úrovne ε' , kde $B \in \varepsilon', \varepsilon' \parallel \varepsilon$. Potom skutočná veľkosť úsečky AB je dĺžka $|(A)_a(B)_a|$.



3.4. Kolmica na rovinu α (ktorá nie je kolmá na ε , ani s ňou rovnobežná)

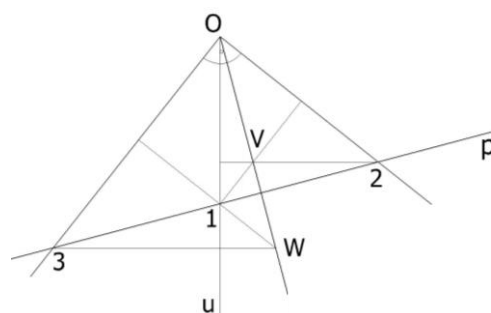
Ak chceme zostrojiť kolmicu k na danú rovinu α , tak viem, že každá priamka tejto roviny je kolmá na priamku k , teda aj axonometrická stopa r^α roviny α , pričom platí $r_a^\alpha = r^\alpha$. Keďže axonometrický priemet kolmo premietanej roviny priamky k je priamka totožná s axonometrickým priemetom k_a priamky k , z toho celého potom vyplýva:

Veta 3.2

Axonometrický priemet priamky kolmej na rovinu, ktorá nie je rovnobežná s axonometrickou priemetňou, je kolmý na axonometrický priemet axonometrickej stopy roviny.

Teda pre $k \perp \alpha$ platí $k_a \perp r_a^\alpha$. Na dourčenie priamky treba ešte zostrojiť napr. jej axonometrický pôdorys, pre ktorý platí, že $k_1 \subset \pi$ a $k_1 \perp p_1^\alpha$. Uvedieme tri spôsoby, pomocou ktorých môžeme v π zostrojiť navzájom kolmé priamky.

- 1.) Otočenie roviny π do priemetne ε , čo sme uviedli v 1. kapitole.
- 2.) Pomocou ortocentra trojuholníka $\Delta O12$ alebo $\Delta O13$, pričom $p^\alpha \cap u = \{1\}$, $p^\alpha \cap x = \{2\}$, $p^\alpha \cap y = \{3\}$, kde u je taká priamka, ktorá prechádza bodom O kolmo na priamku XY a jej axonometrický priemet sa splýva s axonometrickým priemetom osi z .



PRAVOUHLÁ AXONOMETRIA

V rovine π poznáme dva pravé uhly, preto dve výšky v $\Delta O12$ a v $\Delta O13$, môžeme zostrojiť nasledovne

- Keďže $O2 \perp O3$ (lebo $x \perp y$), výška trojuholníka $O12$ (resp. $O13$) idúca vrcholom 1 je rovnobežná s priamkou $O3$ (resp. s priamkou $O2$).

- Výška trojuholníka $O12$ (resp. $O13$) idúca vrcholom 2 (resp. 3) je kolmá na $O1$ a vieme, že $O1 \perp XY$, teda tieto výšky sú rovnobežné s priamkou XY .

Priesečník týchto výšok príslušného trojuholníka je ortocentrum V (resp. W) trojuholníka $\Delta O12$ (resp. $\Delta O13$). Tretia výška, ktorá prechádza bodom O , je incidentná s týmto ortocentrom a je kolmou na priamku p^α .

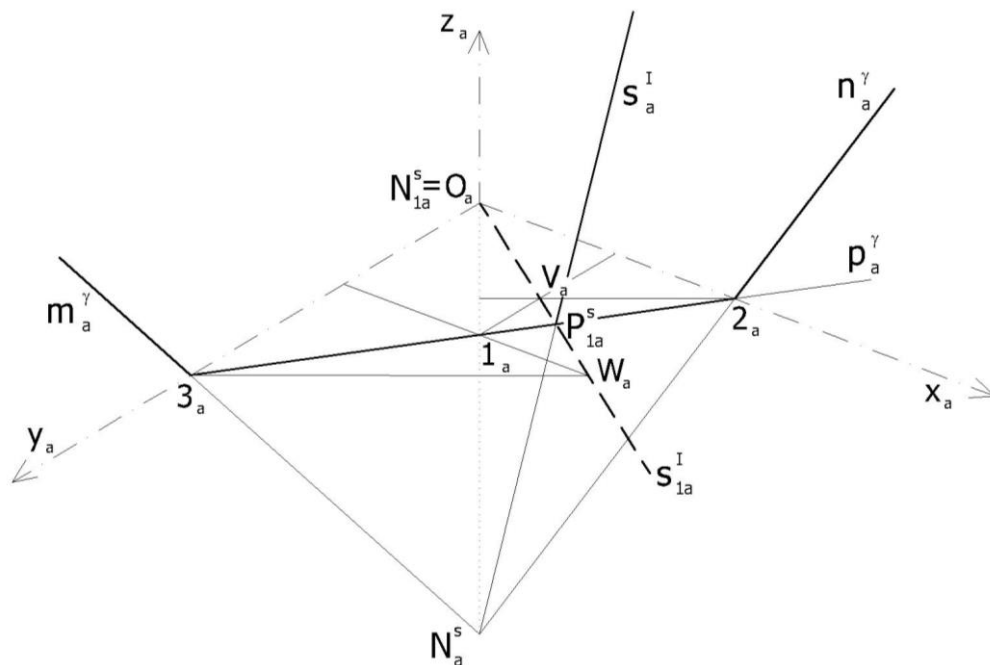
Keďže sme tu využili iba rovnobežnosť a incidenciu, ktoré sa zachovávajú pri rovnobežnom premietení, túto

konštrukciu môžeme využiť priamo pri axonometrickom pôdoryse a teda pre axonometrický pôdorys kolmice k platí:

$$k_{1a} = \overrightarrow{O_a V_a} = \overrightarrow{O_a W_a}.$$

Poznámka: Túto konštrukciu môžeme využiť aj pri hľadaní axonometrického pôdorysu spádovej priamky prvej osnovy roviny α , nakoľko platí, že $^I s_1^\alpha \perp p_1^\alpha$.

- 3.) Pomocou roviny $\beta \perp \pi$, ktorej pôdorysná stopa je totožná s p^α .

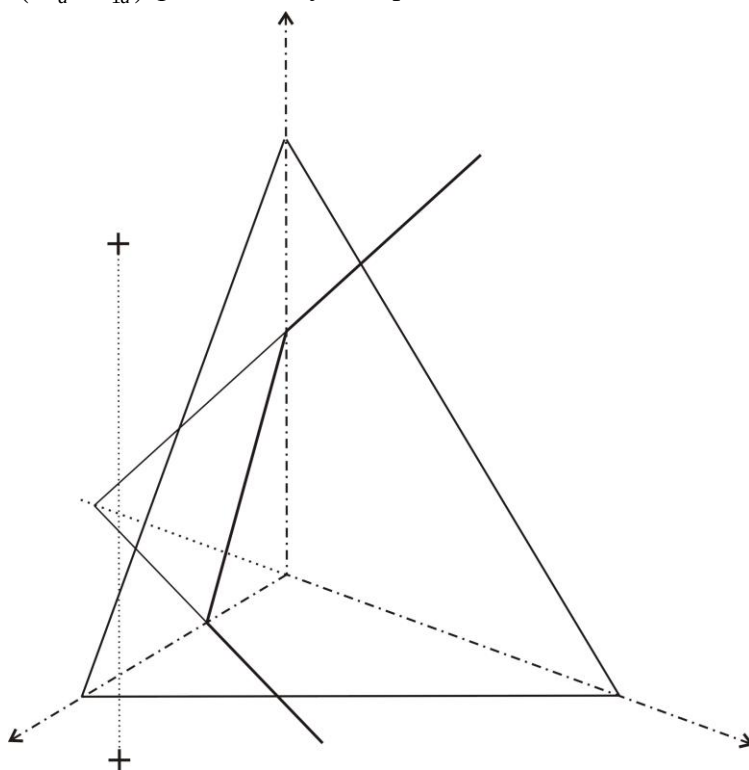


Pre priamku l , ktorá je kolmá na rovinu β platí, že $l \parallel \pi$ a preto jej axonometrický priemet a axonometrický pôdorys sú navzájom rovnobežné a teda $l_a \parallel l_{1a} \parallel k_{1a}$.

Úloha 3.3

Zostrojte bod M' súmerne združený s bodom $M = (M_a, M_{1a})$ podľa roviny $\alpha = \overleftrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$.

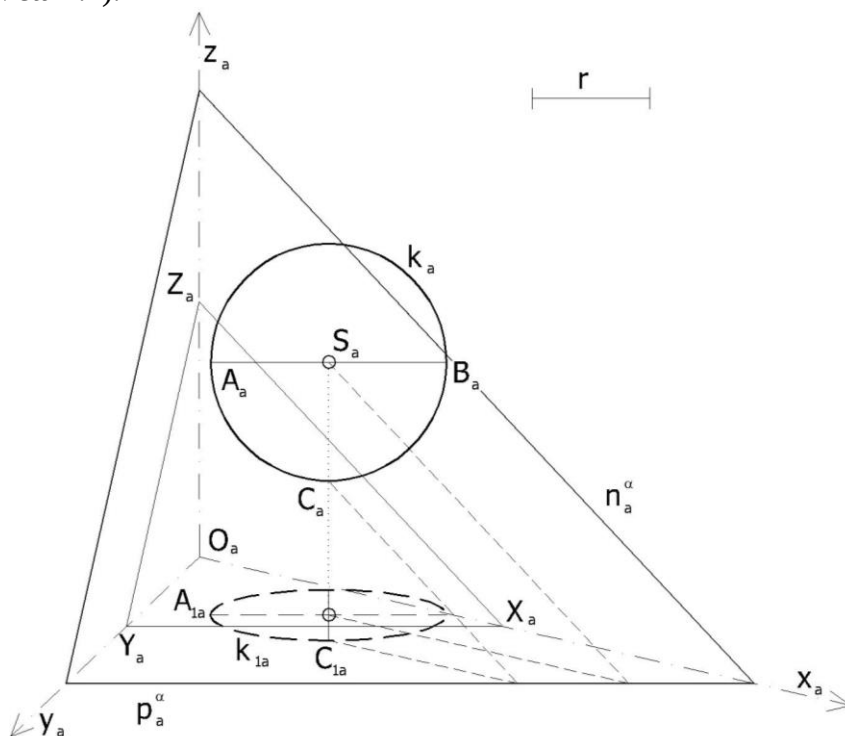
Riešenie:



3.5. Obráz kružnice $k(S, r)$

Priemet kružnice závisí od polohy roviny, v ktorej sa kružnica nachádza:

- Ak rovina je kolmá na ε , tak axonometrickým priemetom kružnice je úsečka.
- Ak rovina je rovnobežná, alebo totožná s ε , tak axonometrickým priemetom kružnice je kružnica $k_a(S_a, r)$ zhodná s danou kružnicou. Na obrázku je zostrojený aj axonometrický pôdorys tejto kružnici, čo je elipsa s hlavnou osou $A_{1a}B_{1a}$ rovnobežnou so stopou p_a^α a dĺžkou $2r$. Pri jej konštrukcie môžeme využiť aj vzťah osovej afinity medzi axonometrickými priemetmi a axonometrickými pôdorysmi bodov tej istej roviny (Veta 2.1).



- Ak rovina nemá ani jednu vyššie písanú polohu, priemetom kružnice je elipsa. Konštruovať jej axonometrický priemet môžeme pomocou otáčanie roviny do priemetne (odsek 3.2), ale kvôli vlastnostiam rovnobežného priemetu kružnice, môžeme túto konštrukciu trocha zjednodušiť.

Stačí si uvedomiť, že axonometrickým priemetom hlavnej osi elipsy k_a je rovnobežná s osou otočenie, t.j. s osou afinity z Vety 3.1, čo je axonometrickým priemetom axonometrickej stopy roviny kružnice. Ak nájdeme axonometrický priemet ešte jedného bodu kružnice, tak prúžkovou konštrukciou môžeme dourčiť vedľajšiu os elipsy k_a . Tento bod môžeme zostrojiť z vlastnosti kružnice, že je to množina bodov, z ktorých vidíme priemer kružnice pod uhlom 90° . Stačí preto nájsť axonometrické priemety dvoch navzájom kolmých priamok roviny, v ktorej leží uvažovaná kružnica.

Zložitosť konštrukcie navzájom kolmých priamok závisí od polohy danej roviny:

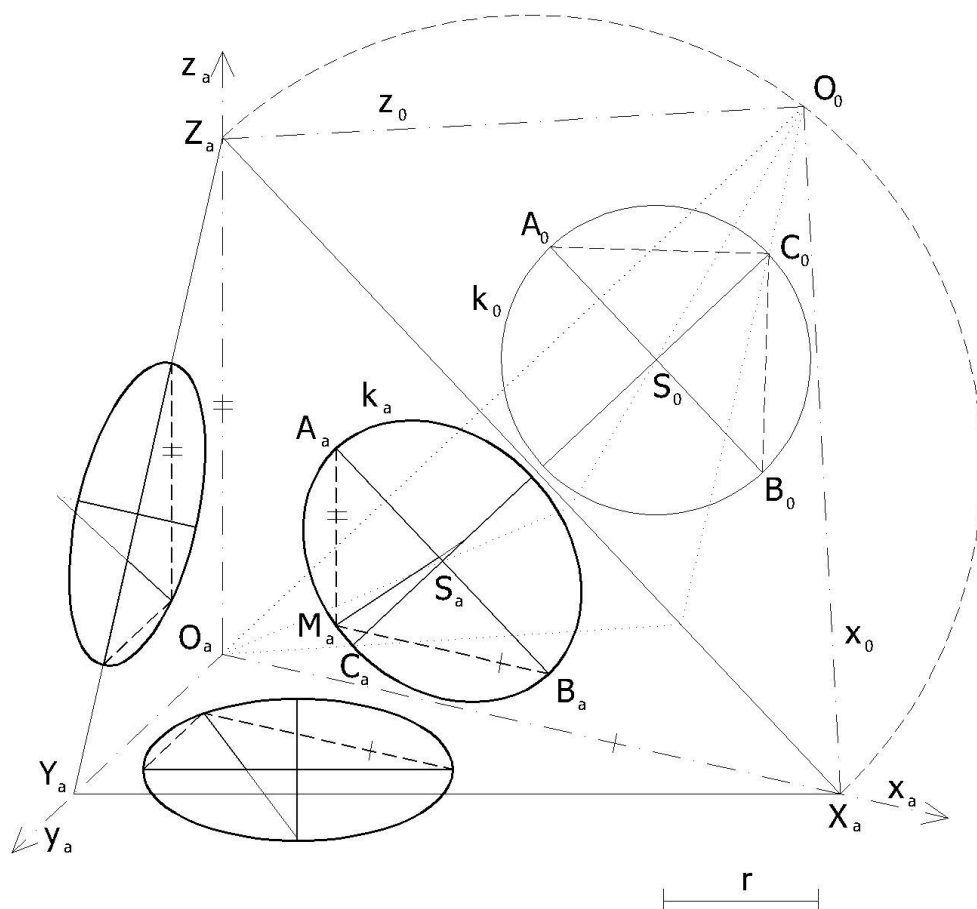
- 1.) rovina kružnice je niektorá pomocná priemetňa π, ν, μ :

Postup napíšeme pre $k \subset \nu$.

Hlavná os A_aB_a elipsy k_a je rovnobežná s X_aZ_a (t.j. s osou afinity medzi axonometrickými priemetmi útvarov roviny a ich otočenými polohami-Veta 3.1) a dĺžka hlavnej osy je polomer r kružnice k . Vieme, že

afinita z Vety 3.1 zobrazí os x_a a z_a do $x_0 \perp z_0$. Ak vedieme bodmi A_0, B_0 priamky, ktoré sú rovnobežné s osami x_0, z_0 , tak tie priamky sa pretínajú na kružnici k_0 (keďže je to talesova kružnica nad priemerom A_0B_0). Ale to vlastne znamená, že ak bodmi A_a, B_a zostrojíme priamky rovnobežné s axonometrickými priemetmi x_a, z_a osi x, z , tak ich priesečník M_a je bodom elipsy.

Teda prúžkovou konštrukciou vieme nakresliť elipsu k_a .

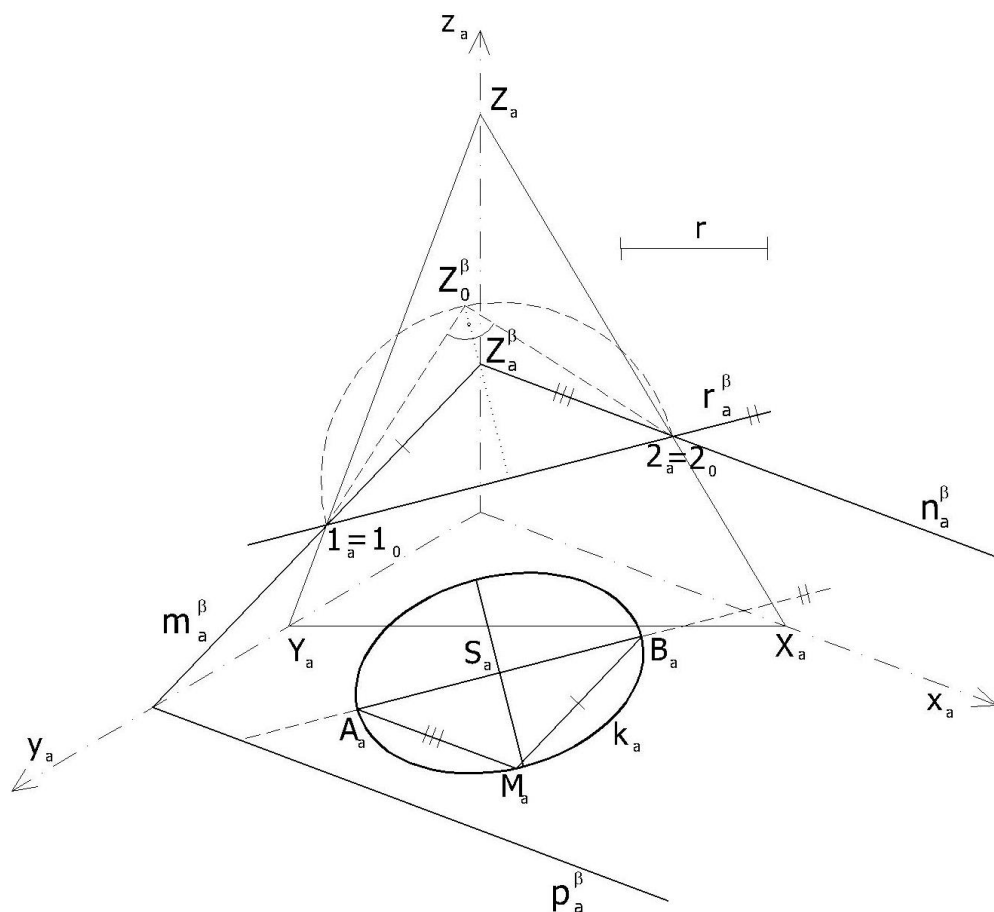


2.) rovina kružnice je kolmá na niektorú pomocnú priemetňu π, ν, μ :

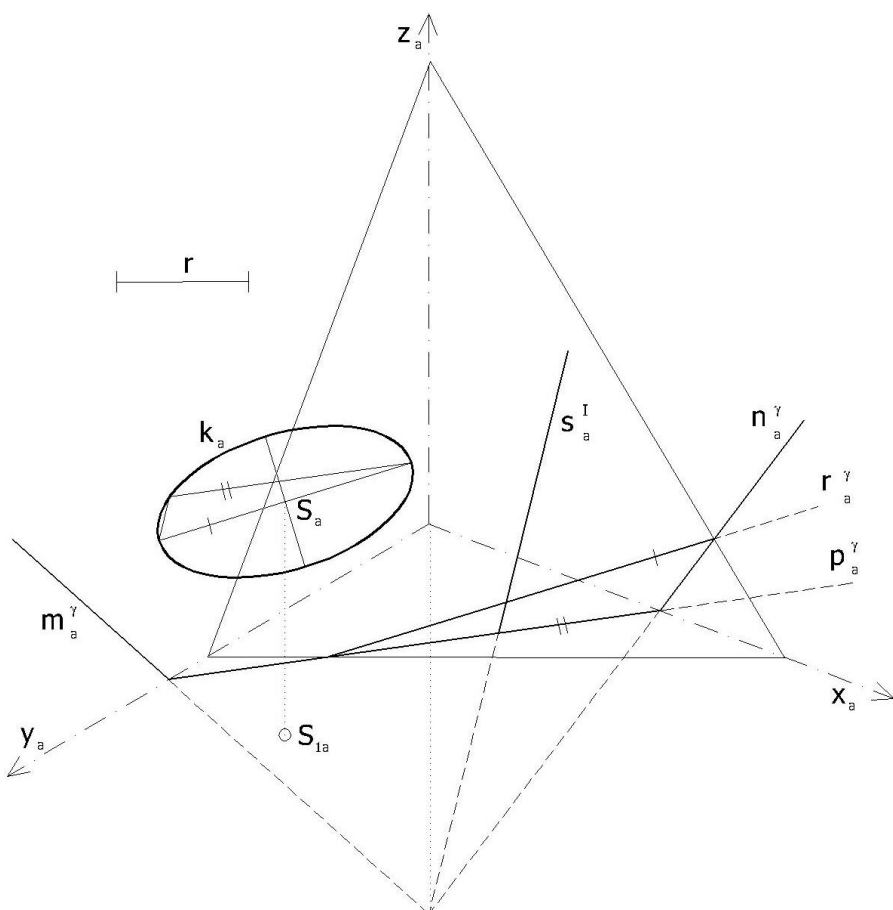
Postup napíšeme pre $k \subset \beta$, kde $\beta \perp \mu$.

Keby sme úlohu chceme riešiť otočením roviny β do priemetne a využiť osovú afinitu medzi týmito dvoma polohami, tak os afinity je $\beta \cap \varepsilon$, t.j. axonometrická stopa $1_a 2_a$ roviny β . Potrebujeme nájsť ešte otočenú polohu nejakého bodu roviny β , nech je to bod $Z^\beta \in z$. Rovina otáčania toho bodu je kolmá na axonometrickú priemetňu, preto otočená poloha tohto bodu leží na kolmici na axonometrickú stopu roviny α a prechádza bodom Z_a^β . Okrem toho, keďže rovina $\beta \perp \mu$, tak platí $n^\alpha \perp m^\alpha$, $p^\alpha \perp m^\alpha$, $p^\alpha \parallel n^\alpha \parallel x$, a preto otočené polohy týchto stôp sú na seba kolmé, t.j. $m_0^\beta \perp n_0^\beta$. Preto Z_0^β leží na talesovej kružnici opísanej nad priemerom $1_0 2_0$. Potom už môžeme zostrojiť kružnicu k_0 so stredom v bode S_0 a polomerom r a pomocou afinity aj elipsu k_a .

Konštrukciu možno opäť skrátiť, lebo $n^\alpha \perp m^\alpha$ a preto poznáme obrazy dvoch na seba kolmých priamok v rovine β . Teda hlavná os elipsy je rovnobežná s osou afinity, t.j. s priamkou r_a^β a veľkosť hlavnej polosi je polomer r . Pre bod M_a elipsy k_a platí: $A_a M_a \parallel n_a^\beta$ a $B_a M_a \parallel m_a^\beta$ a prúžkovou konštrukciou vieme nakresliť elipsu k_a .



3.) rovina kružnice má všeobecnú polohu:



Uvedieme už len tú skrátenu konštrukciu. Hlavná os elipsy k_a je rovnobežná s axonometrickým priemetom axonometrickej stopy roviny γ a dĺžka hlavnej polosi je polomer r . Obrazy navzájom kolmých priamok sú priamky p_a^γ a s_a^I (spádová priamka), ich priesečník bude bodom elipsy k_a .

4. Guľová plocha

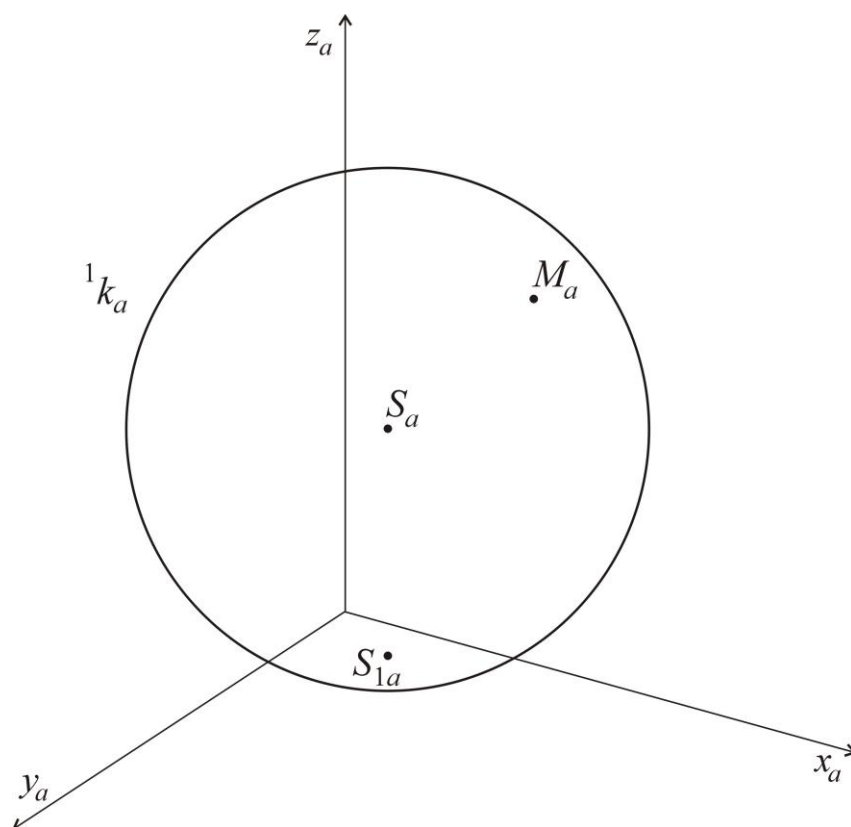
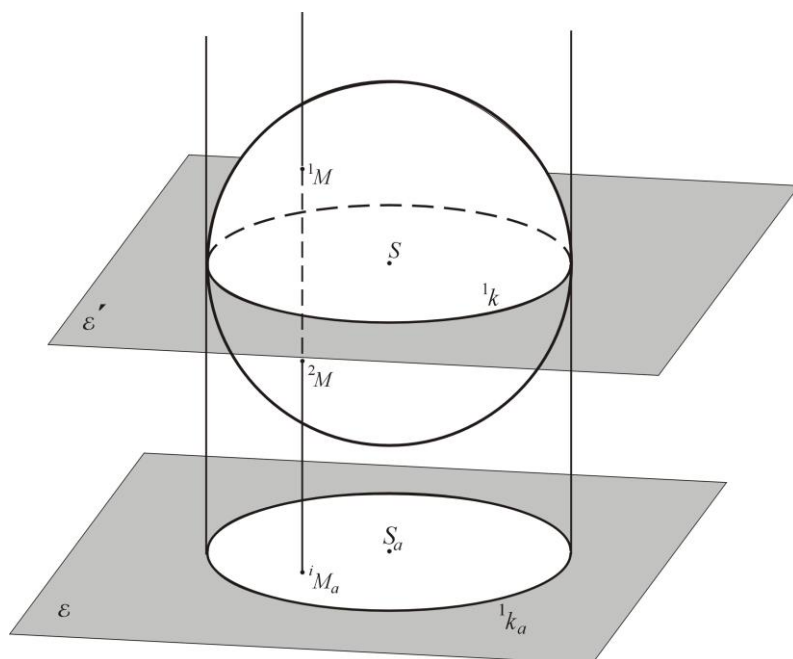
Keďže v pravouhlej axonometrii premietneme na priemetňu kolmo, axonometrický priemet guľovej plochy je kruh so stredom axonometrického priemetu stredu plochy a polomerom je polomer guľovej plochy.

Úloha 4.1

Zobrazte guľovú plochu so stredom v bode $S(S_a, S_{1a})$ a polomerom r . Dourčte bod M guľovej plochy, ak je daný jeho axonometrický priemet M_a . Pravouhlá axonometria je daná axonometrickým osovým krížom.

Riešenie:

Axonometrickú priemetňu ε si zvolíme tak, aby $S \in \varepsilon$.



Axonometrický priemet guľovej plochy je teda kruh $^1k_a(S_a, r)$. Ak je daný bod M_a (samozrejme tento bod je vnútorným bodom kruhu 1k_a), tak tento bod je axonometrickým priemetom dvoch bodov 1M a 2M guľovej plochy. Dourčíme ich pomocou voľby pomocnej priemetne λ (útvary v tejto priemetni budeme značiť indexom 4), ktorá je kolmá na priamku X_aY_a a je incidentná s bodom M_a . Z odseku 3.3 už vieme, že axonometrickým priemetom roviny λ je priamka a že ako treba zostrojiť bod O_4 . Rovina λ pretína guľovú

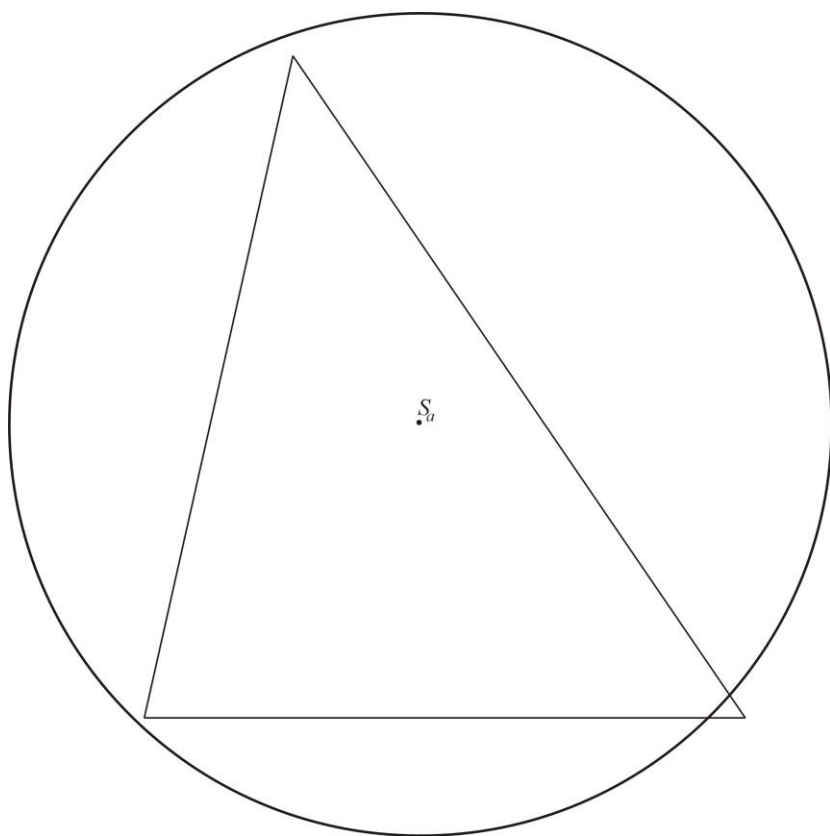
PRAVOUHLÁ AXONOMETRIA

plochu v kružnici l , na ktorej ležia body 1M a 2M . Axonometrickým priemetom l_a kružnice l je úsečka na priamke λ_a a štvrtým priemetom l_4 je kružnica nad úsečkou l_a . Na tejto kružnici a ešte na ordinále ležia body 1M_4 a 2M_4 . Body 1M_1 a 2M_1 sú bodmi roviny π , z čoho vyplýva, že $^1M_{14}$ a $^2M_{14}$ ležia na priamke π_4 a na rovnobežkách s priamkou z_4 idúci bodmi 1M_4 a 2M_4 . Z toho už nie je problém nájsť axonometrické pôdorysy bodov 1M a 2M . Jeden bod leží v kladnom polpriestore s hraničnou rovinou ε , preto je viditeľný a druhý bod leží v zápornom polpriestore, preto nie je viditeľný.

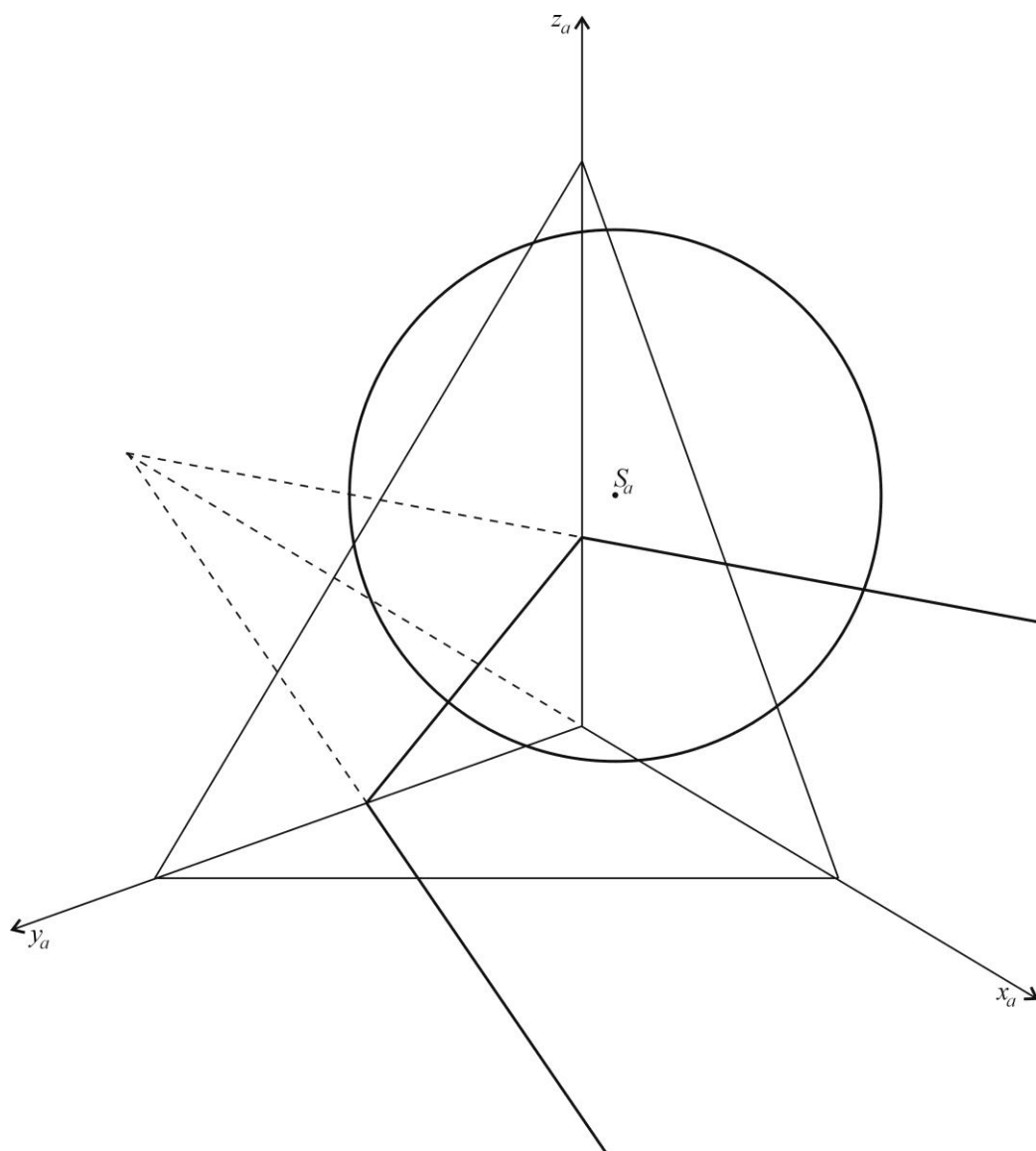
Úloha 4.2

Zobrazte guľovú plochu so stredom v bode $S(S_a, ?)$, $S \in \varepsilon$ a polomerom r . Zostrojte hlavnú kružnicu v rovine $\pi' \parallel \pi$, t.j. kružnicu so stredom v bode S . Zistite body $p \cap G$, ak $S \in p$ a $p \parallel z$. Pravouhlá axonometria je daná axonometrickým trojuholníkom.

Riešenie:



Úloha 4.3 Zostrojte rovinný rez guľovej plochy $G = (S, r)$ rovinou $\alpha = (p^\alpha, n^\alpha)$.



Súvislosti medzi rovnobežným osvetlením a rovnobežným premietaním

rovnobežné osvetlenie	rovnobežné premietanie
premietacia priamka bodu	svetelný lúč bodu
priemetňa, napr. π	záchytná rovina, napr. π
priemet bodu	hodený (vrhnutý) tieň bodu
premietací útvar útvaru U , označme to jako $P(U)$	svetelný útvar útvaru U , označme to jako $S(U)$
priemet útvaru U , teda $P(U) \cap \pi$	hodený (vrhnutý) tieň útvaru U , teda $S(U) \cap \pi$

Nové pojmy pre rovnobežné osvetlenie:

hranica vlastného tieňa, hranica vrhnutého tieňa

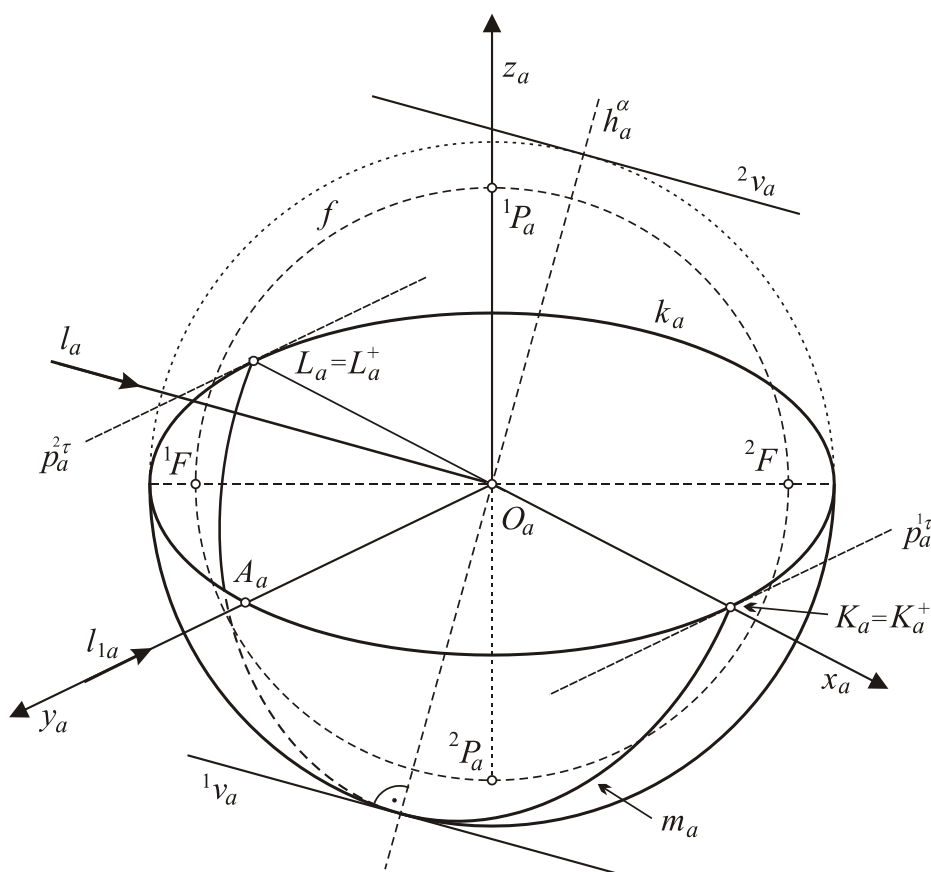
Guľová polplocha $\bar{G}$ je určená hranou k v rovine π so stredom O v začiatku sústavy súradníc a polomerom r . Smer osvetlenia je určený svetelným lúčom l bodu O a leží v súradnicovej rovine $\mu = \leftrightarrow yz$. Pravouhlá axonometria je určená axonometrickým osovým krížom.

Riešenie úlohy.

1. Konštrukcia hranice vlastného tieňa

Dotykovým svetelným útvarom guľovej plochy $\bar{G} = (O, r)^1$ v danom ravnobežnom osvetlení je rotačná valcová plocha V s osou l a polomerom r . Hranica vlastného tieňa guľovej plochy $\bar{G}$ je prienikom oboch plôch: $\bar{G} \cap V$. Je to hlavná kružnica m guľovej plochy v rovine α kolmej na svetelný lúč l .

Axonometrickým priemetom kružnice m je elipsa, ktorej hlavná os leží na priemete hlavnej priamky roviny kružnice a má dĺžku zhodnú s priemerom guľovej plochy. Na obrázku je označený priemet tejto hlavnej priamky (h_a^α), vrcholy na tejto osi označené nie sú. Sú to spoločné body obrysu priemetov plôch $\bar{G}$ a V ; obrysové tvoriace priamky valcovej plochy sú označené 1v , 2v . Elipsu m_a dourčíme tak, že zostrojíme axonometrické priemety bodov hranice vlastného tieňa na kružnici k . Urobíme to na základe nasledujúcej úvahy.



Obr. 1

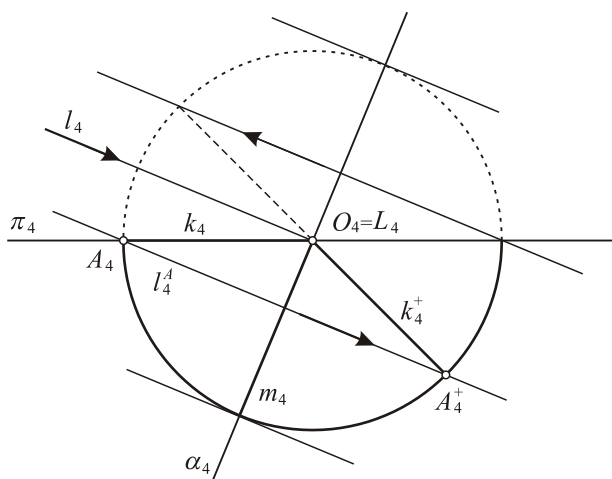
Guľová plocha $\bar{G}$ a jej opísaná rotačná valcová plocha 1V s osou v súradnicovej osi z sa dotýkajú v bodoch kružnice k , čo znamená, že body hranice vlastného tieňa na oboch plochách sa pretínajú v bodoch tejto kružnice. Tvoriace priamky valcovej plochy 1V , ktoré patria hranici vlastného tieňa tejto plochy ležia v dotykových svetelných rovinách $^i\tau$ plochy a prechádzajú dotykovými bodmi K, L pôdorysných stôp $p^{i\tau}$

¹ Pri ravnobežnom osvetlení guľovej polplochy využijeme známe poznatky o ravnobežnom osvetlení guľovej plochy. Guľovú plochu, ktorá je nosičom danej guľovej polplochy G budeme označovať $\bar{G}$.

s kružnicou k . Odtiaľ vyplýva, že body K, L sú i bodmi hranice vlastného tieňa príslušnej guľovej plochy. Priemet hranice vlastného tieňa je určený hlavnou osou a priemetom niektorého z týchto bodov. Vedľajšiu os elipsy m_a zostrojíme napr. prúžkovou konštrukciou.² Hranicou vlastného tieňa na guľovej polploche $\bar{G}$ je polkružnica kružnice m patriaca tejto polploche (t. j. polkružnica s krajnými bodmi K, L).

2. Konštrukcia hodeného tieňa polplochy $\bar{G}$ do jej vnútra

Okrem konštrukcie hranice vlastného tieňa treba pri osvetlení vziať do úvahy skutočnosť, že časť kružnice k vrhá tieň dovnútra polplochy $\bar{G}$. Je to polkružnica $\widehat{LAK} \subset k$. Svetelným útvarom tejto polkružnice je valcová polplocha s osou v svetelnom lúči l stredu O polplochy $\bar{G}$. Všetky tvoriace priamky tejto valcovej polplochy (svetelné lúče bodov polkružnice $\widehat{LAK}$) majú s polplochou $\bar{G}$ spoločný ešte ďalší bod (okrem svetelných lúčov v krajných bodoch L, K , ktoré ležia v dotykových rovinách príslušnej guľovej plochy a sú teda jej dotyčnicami), ktorý je hodeným tieňom príslušného bodu polkružnice. Oba body K, L sú krajnými bodmi i hranice hodeného tieňa dovnútra polplochy $\bar{G}$. Ak označíme hodené tieňe bodov horným indexom „+“, tak *ideálny* hodený tieň kružnice k bude mať označenie k^+ .³ Pre krajné body polkružnice platí: $K = K^+, L = L^+$. Z nasledujúceho zobrazenia celej konfigurácie do roviny kolmej na súradnicovú os x je zrejmé, že svetelná valcová plocha kružnice k pretína guľovú plochu $\bar{G}$ v dvoch *hlavných kružniciach* guľovej plochy k a k^+ ; roviny oboch kružníc sú súmerne združené podľa roviny α hranice m vlastného tieňa guľovej plochy $\bar{G}$. (Obr. 2) Hodeným tieňom polkružnice $\widehat{LAK}$ ($L_4 = K_4$) dovnútra polplochy $\bar{G}$ je preto polkružnica, ktorej axonometrický priemet je vo vzťahu perspektívnej afinity s poleipsou k_a . (Odôvodnite!) Na záver stačí zostrojiť hodený tieň jedného bodu, napr. bodu $A \in y \cap k$.



Obr. 2

3. Konštrukcia hodeného tieňa A^+ bodu A dovnútra guľovej polplochy

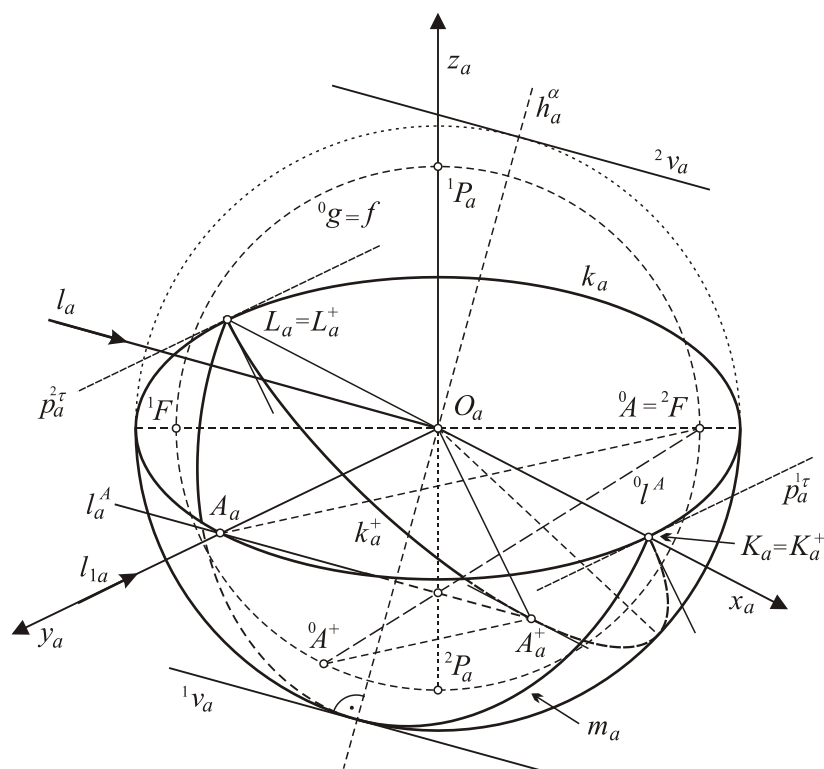
Nech je l^A svetelný lúč bodu A . Treba zostrojiť druhý priesečník priamky l^A s guľovou polplochou $\bar{G}$. Platí:

$$l^A \cap \bar{G} = l^A \cap (\mu \cap \bar{G}) = l^A \cap g = \{A, A^+\}$$

K tomu nie je potrebné obraz hlavnej kružnice g príslušnej guľovej plochy konštruovať. Úsečky OA, O^2P ($^2P \in z \cap \bar{G}$) sú navzájom kolmé polpriemery kružnice g . Elipsa g_a je vo vzťahu perspektívnej afinity s ohniskovou kružnicou f guľovej plochy $\bar{G}$ prislúchajúcej sústave rovín rovnobežných s rovinou π ; osou tejto afinity je priamka z_a a dvojicou bodov vzor – obraz je napríklad dvojica $A_a, h(A_a) = ^2F = ^\circ A$ (úsečky $O_a^2P_a, O_a^2F$) sú navzájom kolmé polomery kružnice f a h je označenie afinity. (Obr. 3)

² Táto os bola samozrejme konštruovaná, ale triviálna konštrukcia je na obrázku (pre lepšiu prehľadnosť) vynechaná. Vedľajšia os leží prirodzene na axonometrickom priemete spádovej priamky roviny α ($s_a^\alpha = l_a$).

³ Pod ideálnym hodeným tieňom kružnice k na guľovú plochu $\bar{G}$ budeme rozumieť druhú časť prieniku svetelného útvaru kružnice k v danom osvetlení s touto guľovou plochou (označenie k^+).



Obr. 3

Potom platí:

$$h: l_a^A \mapsto {}^\circ l^A$$

$$h: g_a \mapsto \circ g = f, \text{ t. j. } h: l_a^A \cap g_a \mapsto \circ l^A \cap f = \{\circ A, \circ A^+\} \Rightarrow h^{-1}(\circ A^+) = A_a^+$$

Polpriemery OA , OK sú navzájom kolmé (ich axonometrické priemety sú združenými polpriemermi elipsy k_a), teda $O_a A_a^+$, $O_a K_a^+$ sú združené polpriemery axonometrického priemetu hodeného tieňa k^+ časti kružnice k dovnútra guľovej polplochy. V krajných bodoch priemeru KL a polpriemeru OA^+ sú zostrojené i dotyčnice kružnice k^+ .⁴ Ich axonometrické priemety sú rovnobežné s príslušnými združenými priemermi elipsy k_a^+ .

⁴ Prirodzene sú polpriemery OA^+ , OK^+ navzájom kolmé ($OA^+ \subset \mu \wedge x \perp \mu \wedge OK^+ \subset x$).