5. Neurčitý a určitý integrál

Na intervale $\langle a,b\rangle$ je definovaná nezáporná funkcia f. Počítajme obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie f, osou x a priamkami $x=a$, $x=b$.
Môžeme postupovať nasldovne:

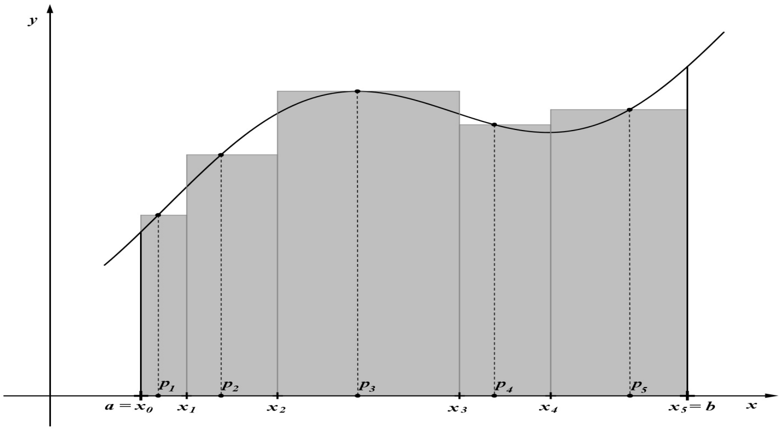
1. Rozdelíme bodmi $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ interval $\langle a,b\rangle$ na n podintervalov.

2. V každom podintervale $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ zvolíme ľubovoľný bod p_i.

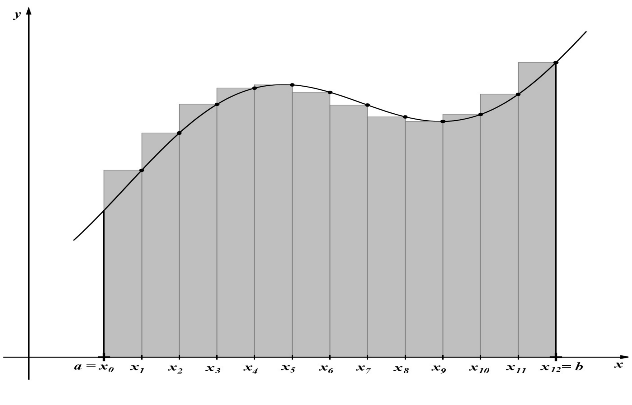
3. V každom podintervale nahradíme príslušnú časť plochy obdĺžnikom so základňou dĺžky x_i-x_{i-1} a výškou $f(p_i)$.

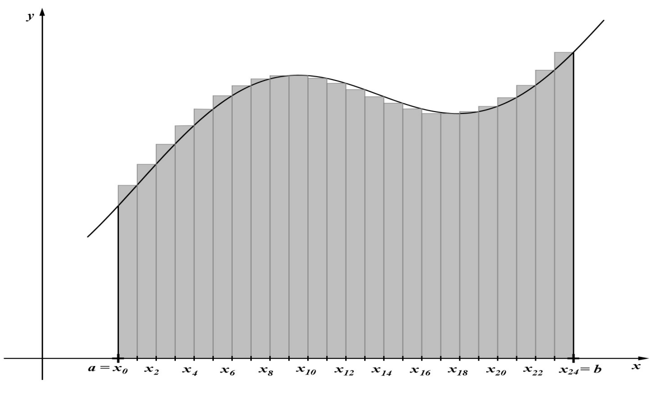
4. Sčítame obsahy všetkých takýchto obdĺžnikov

$$S=f(p_1)(x_1-x_0)+f(p_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(p_n)(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}f(p_i)(x_i-x_{i-1})\,.$$



Dostávame približnú hodnotu hľadaného obsahu. Ak zhustíme deliace body, hodnota S sa viac priblíži skutočnej hodnote. Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka d najldhšieho podintervalusa bude blížiť k nule. Dostávame vždy presnejší " odhad"pre S.





Nech f je spojitá funkcia v intervale $\langle a,b\rangle$ *a F je funkcia primitívna k f v intervale* $\langle a,b\rangle$. **Určitý integrál** *funkcie f v intervale* $\langle a,b\rangle$ *je* **číslo** *F(b)-F(a).* Tento fakt zapisujeme nasledovne

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Uvedený vzťah sa volá **Newtonova-Leibnizova formula**.
Neurčitý a určitý integrál sú vo svojej podstate naprosto odlišné matematické objekty. Kým neurčitý integrál je množina funkcií, určitý integrál je číslo.

Neurčitý integrál

Definícia 5.1:

- **Funkcia** F **je primitívnou funkciou k funkcii** f **na intervale** (a,b): ak $\forall x \in (a,b)$ platí: $F'(x) = f(x)$

Vlastnosti primitívnych funkcií:

- Ak F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale (a,b), tak $F+c$ je tiež primitívnou funkciou k funkcii f na intervale (a,b), pričom $c \in \mathbb{R}$.
- Ak F a G sú primitívne funkcie k funkcii f na intervale (a,b), tak existuje reálne číslo c tak, že $F(x) = G(x) + c$ pre všetky $x \in (a,b)$.

Definícia 5.2:

- **Neurčitý integrál funkcie** f **na intervale** (a,b) - (ozn. $\int f(x)\,dx$): množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale na intervale (a,b)

Vlastnosti neurčitého integrálu:

- Ak k funkcii f existuje primitívna funkcia na intervale (a,b), tak pre všetky $x \in (a,b)$ platí: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- Ak f' existuje na intervale (a,b), tak $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- Ak majú funkcie f aj g v intervale (a,b) primitívne funkcie, tak v tomto intervale platí

  $$\int \Big(f(x) \pm g(x)\Big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \qquad \int \Big(kf(x)\Big)dx = k\int f(x)dx$$

  kde k je ľubovolné reálne číslo.

Základné neurčité integrály

Vzorec	podmienky
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$x \neq 0,\ a \in \mathbb{R}, a \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int a^x dx = a^x \frac{1}{\ln a} + c$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0, a \neq 1$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert + c$	$x \neq \{-1, 1\}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2+a} \right\rvert + c$	$x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Cvičenie 5.1. Vypočítajte integrály:

1. $\int(3x^2+2x-1)\,dx.$ **2.** $\int\left(\frac{2}{x\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}\right)\,dx.$

3. $\int x^2(x^2+1)\,dx.$ **4.** $\int(x^3+1)^2\,dx.$

5. $\int\frac{x^3+3x-1}{x}\,dx.$ **6.** $\int\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}\,dx.$

7. $\int\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx.$ **8.** $\int\frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x}\,dx.$

9. $\int(\cos x+2\sqrt[5]{x^3})\,dx.$ **10.** $\int\left(\sin x+\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\right)\,dx.$

11. $\int\left(2^x+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\,dx.$ **12.** $\int\left(10^{-x}+\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)\,dx.$

13. $\int\frac{x^2}{3(1+x^2)}\,dx.$ **14.** $\int\operatorname{cotg}^2 x\,dx.$

15. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx.$ **16.** $\int\frac{dx}{x^2+7}.$

17. $\int 4^{2-3x}\,dx.$ **18.** $\int\frac{x}{(x+1)^2}\,dx.$

Výsledky:

1. $x^3+x^2-x+c.$ **2.** $-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x}+c.$

3. $\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+c.$ **4.** $\frac{x^7}{7}+\frac{x^4}{2}+x+c.$

5. $\frac{x^3}{3}+3x-\ln|x|+c.$ **6.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+c.$

7. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+c.$

8. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6x+24\sqrt{x}+8\ln|x|+c.$

9. $\sin x+\frac{5}{4}x\sqrt[5]{x^3}+c.$ **10.** $-\cos x+\frac{3}{2}\arcsin x+c.$

11. $\frac{2^x}{\ln 2}+2\sqrt{x}+c.$ **12.** $x+\operatorname{arctg} x-\frac{1}{10^x\ln 10}+c.$

13. $\frac{1}{3}(x-\operatorname{arctg} x)+c.$ **14.** $-x-\operatorname{cotg} x+c.$

15. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+c.$ **16.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+c.$

17. $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}+c.$ **18.** $\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c.$

Substitučná metóda

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I, nech funkcia φ má deriváciu v intervale (a,b) a nech pre každé $x\in(a,b)$ je $\varphi(x)\in I$. Potom

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx=F\big(\varphi(x)\big)+c$$

Postup pri používaní substitučnej metódy:

1. V integrovanej funkcii hľadáme takú funkciu φ, ktorá sa tam vyskytuje spolu so svojou deriváciou, alebo jej číselným násobkom.

2. Zavedieme novú premennú t, pre ktorú je $t=\varphi(x)$.

3. Upravíme daný interál na tvar $\int f(t)dt$ kde $dt = \varphi'(x)dx$ a počítame $\int f(t)dt = F(t) + c$.
4. Vo výsledku nahradíme $t = \varphi(x)$: $F\big(\varphi(x)\big) + c$

Niekedy,ak je funkcia φ monotónna, tretí bod tohoto postupu je výhodné realizovať tak, že si vyjadríme inverznú funkciu $x = \varphi^{-1}(t)$ a(alebo) $dx = (\varphi^{-1})'(t)dt$ a dosadíme do pôvodného integrálu.

Príklad: Ukážeme platnosť vzťahu $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$.

Riešenie:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,a\,dx = \left| \begin{array}{c} t = ax+b \\ dt = a\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t) + c = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Ak F je primitívnou funkciou k funkcii f, tak v príslušných intervaloch platí

$$\int x f(x^2)dx = \frac{1}{2}F(x^2) + c, \qquad \int \frac{f(\ln x)}{x}dx = F(\ln x) + c,$$

$$\int \frac{f(\mathrm{arctg} x)}{1+x^2}dx = F(\mathrm{arctg} x) + c, \qquad \int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2F(\sqrt{x}) + c,$$

$$\int f(\sin x)\,\cos x\,dx = F(\sin x) + c, \qquad \int \frac{f(\mathrm{tg} x)}{\cos^2 x}dx = F(\mathrm{tg} x) + c.$$

Cvičenie 5.2. Použitím algebraickej úpravy (ak je potrebná) a substitúcie lineárnej funkcie vypočítajte integrály:

19. $\int \sin 3x\,dx$.

20. $\int \frac{dx}{5-3x}$.

21. $\int e^{3-2x}\,dx$.

22. $\int \sqrt[3]{3x-2}\,dx$.

23. $\int (4-7x)^{11}\,dx$.

24. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$.

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

26. $\int \frac{dx}{x^2+16}$.

Cvičenie 5.3. Použitím naznačenej substitúcie vypočítajte integrály:

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}, \qquad t = x^2 - 4.$

28. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx, \qquad t = \sin x.$

29. $\int \sqrt{\cos^3 x}\,\sin x\,dx, \qquad t = \cos x.$

30. $\int x e^{x^2}\,dx, \qquad t = x^2.$

31. $\int \frac{dx}{x\ln x}, \qquad t = \ln x.$

32. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx, \qquad t = x^3 + 1.$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}, \qquad t = \frac{\sqrt{x}}{2}.$

34. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}, \qquad t = x^2.$

35. $\int \frac{dx}{e^x-1}, \qquad t = e^{-x}.$

36. $\int \frac{e^x\sqrt{\mathrm{arctg}\, e^x}}{1+e^{2x}}\,dx, \qquad t = \mathrm{arctg}\, e^x.$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad t = \frac{1}{x}.$

38. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}, \qquad t = \sqrt{x+1}.$

Výsledky:

19. $-\frac{1}{3}\cos 3x + c.$

20. $-\frac{1}{3}\ln|3x-5| + c.$

21. $-\frac{1}{2}e^{3-2x} + c.$

22. $\frac{1}{4}(3x-2)\sqrt[3]{3x-2} + c.$

23. $-\frac{(4-7x)^{12}}{84} + c.$

24. $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + c.$

25. $\arcsin\frac{x}{3} + c.$

26. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + c.$

27. $\sqrt{x^2-4} + c.$

29. $-\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + c.$

31. $\ln|\ln x| + c.$

33. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2} + c.$

35. $\ln|e^{-x}-1| + c.$

37. $\arccos\frac{1}{x} + c.$

28. $\ln|1+\sin x| + c.$

30. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c.$

32. $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3} + c.$

34. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + c.$

36. $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + c.$

38. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}.$

Metóda per partes (integrovanie po častiach)

Nech funkcie u a v majú derivácie na intervale (a,b). Potom platí:

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)dx.$$

Ako voliť funkciu u' a v v metóde per partes?

1. Nemal by byť problém vypočítať funkcie $u(x) = \int u'(x)dx$ a $v'(x)$.
2. Integrál $\int u(x)v'(x)dx$ by mal byť ľahší ako pôvodný integrál.

Metódu integrovania per partes používame o.i. pri integráloch typu $\displaystyle\int P(x)\,f(x)\,dx$, kde $P(x)$ je polynóm (!!!môže byť aj $P(x)=1$) a f je trigonometrická, exponenciálna, logaritmická alebo cyklometrická funkcia. Pritom volíme:

1. $u' = f$ a $v = P$, ak f je trigonometrická alebo exponenciálna funkcia a postup opakujeme n-krát, kde n je stupeň polynómu P,

2. $u' = P$ a $v = f$, ak f je cyklometrická alebo logaritmická funkcia.

Cvičenie 5.4. Použite naznačené metódy per partes na výpočet integrálov:

63. $\int \ln x \, dx, \qquad u' = 1, \quad v = \ln x.$

64. $\int \frac{\ln x \, dx}{x^2}, \qquad u' = \frac{1}{x^2}, \qquad v = \ln x.$

65. $\int x \cos x \, dx, \qquad u' = \cos x, \qquad v = x.$

66. $\int x e^{-2x} \, dx, \qquad u' = e^{-2x}, \qquad v = x.$

67. $\int \operatorname{arccotg} x \, dx, \qquad u' = 1, \qquad v = \operatorname{arccotg} x.$

68. $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx, \qquad u' = \frac{1}{\sin^2 x}, \qquad v = x.$

69. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx, \qquad u' = \frac{\cos x}{\sin^3 x}, \qquad v = x.$

71. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx, \qquad u' = 1, \qquad v = \sqrt{1 - x^2}.$

72. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx, \qquad u' = \operatorname{tg}^2 x, \qquad v = x.$

Cvičenie 5.5. Použitím metódy per partes vypočítajte integrály:

73. $\int x \ln x \, dx.$

74. $\int x \sin 3x \, dx.$

75. $\int 5x e^{-4x} \, dx.$

76. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$

77. $\int \arccos x \, dx.$

79. $\int (2x + 1) \cos(\frac{\pi}{3} - 5x) \, dx.$

80. $\int \frac{x \, dx}{5^x}.$

81. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx.$

82. $\int 4x^3 \ln(x^5) \, dx.$

Cvičenie 5.6. Opakovaným použitím metódy per partes vypočítajte integrály:

83. $\int x^2 \sin x \, dx.$

84. $\int e^x \cos 2x \, dx.$

85. $\int (x^2 + 5) \cos x \, dx.$

87. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx.$

88. $\int x \ln^2 x \, dx.$

89. $\int \ln^2 x \, dx.$

90. $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} \, dx.$

91. $\int \sin(\ln x) \, dx.$

92. $\int x^2 e^{3x} \, dx.$

93. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx.$

94. $\int x^3 \cos x \, dx.$

Výsledky

63. $x\ln x - x + c.$

64. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$

65. $x\sin x + \cos x + c.$

66. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$

67. $x\,\mathrm{arccotg}\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$

68. $-x\,\mathrm{cotg}\,x + \ln|\sin x| + c.$

69. $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,x + c.$

71. $\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$

72. $x\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + c.$

Vo výsledkoch nasledujúcich cvičení je ešte pred výsledkom uvedená voľba funkcie u' v metóde per partes, ktorou je možné integrál riešiť. Funkciu v si čitateľ doplní:

73. $u' = x,\ I = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$

74. $u' = \sin 3x,\ I = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c.$

75. $u' = e^{-4x},\ I = -\frac{5}{4}xe^{-4x} - \frac{5}{16}e^{-4x} + c.$

76. $u' = x,\ I = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + c.$

77. $u' = 1,\ I = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$

79. $u' = \cos(\frac{\pi}{3} - 5x),\ I = -\frac{2x+1}{5}\sin(\frac{\pi}{3} - 5x) + \frac{2}{25}\cos(\frac{\pi}{3} - 5x) + c.$

80. $u' = 5^{-x},\ I = -\frac{x5^{-x}}{\ln 5} - \frac{5^{-x}}{\ln^2 5} + c.$

81. $u' = \frac{1}{\sqrt{x}},\ I = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c.$

82. $u' = 4x^3,\ I = 5x^4\ln x - \frac{5}{4}x^4 + c.$

83. $u' = \sin x,\ I = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c.$

84. u' je jedno, $I = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + c.$

85. $u' = \cos x,\ I = (x^2+3)\sin x + 2x\cos x + c.$

87. $u' = e^{-x},\ I = -e^{-x}(x^2+5) + c.$

88. $u' = x,\ I = \frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x) + \frac{1}{4}x^2 + c.$

89. $u' = 1,\ I = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c.$

90. u' je jedno, $I = -\frac{8}{17}e^{-2x}(\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}) + c.$

91. $u' = 1,\ I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c.$

92. $u' = e^{3x},\ I = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + c.$

93. $u' = \cos 2x,\ I = \frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x + \frac{2x+5}{4}\cos 2x + c.$

94. $u' = \cos x,\ I = (x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + c.$

Integrovanie racionálnych funkcií

Definícia 5.3:

- **Racionálna funkcia** f: $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x), Q_m(x)$ sú polynómy stupňa $m, n \in \mathbb{N}$,
- **Rýdzoracionálna funkcia** f: ak pre racionálnu funkciu platí, že $n < m$,
- **Elementárne (parciálne) zlomky**: zlomky v tvare

$$\textbf{I.)}\ \frac{a}{x-r},\qquad \textbf{II.)}\ \frac{a}{(x-r)^n},\qquad \textbf{III.)}\ \frac{ax+b}{x^2+px+q},\qquad \textbf{IV.)}\ \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$$

Vlastnosti racionálnych funkcií:

- Ak pre racionálnu funkciu f platí, že $n \geq m$, tak ju úpravou (delením $P_n(x) : Q_m(x)$) prevedieme na tvar $f(x) = R_k(x) + \dfrac{S_l(x)}{Q_m(x)}$, pričom funkcia $\dfrac{S_l(x)}{Q_m(x)}$ už je rýdzoracionálnou funkciou.
- Každú rýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. To, že aké elementárne zlomky sa objavia v rozklade, závisí od menovateľa $Q_m(x)$. Platí totiž:
  - Polynóm $Q_m(x)$ možno zapísať jediným spôsobom v tvare

    $$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

    kde $a_1,\dots,a_k$ sú navzájom rôzne reálne korene polynómu $Q_m(x)$, polynómy $x^2+p_1x+q_1,\dots,x^2+p_sx+q_s$ nemajú reálne korene a sú navzájom rôzne, $n_1,\dots,n_k,m_1,\dots,m_s \in \mathbb{N}$
  - Sčítance vystupujúce v súčte elementárnych zlomkov možno rozdeliť na skupiny patriace k jednotlivým členom rozkladu polynómu $Q_m(x)$, tj. na skupinu elementárnych zlomkov patriacu k členu $(x-a_1)^{n_1}$, ..., skupinu elementárnych zlomkov patriacu k členu $(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$, pričom:
    * skupina patriaca k členu tvaru $(x-\alpha)^i$ pozostáva z parciálnych zlomkov

      $$\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$$

    * skupina patriaca k členu tvaru $(x^2+\beta x+\gamma)^j$ pozostáva z parciálnych zlomkov

      $$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}, \dots, \frac{B_jx+C_j}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}$$

- $$\frac{2x^2+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$
- $$\frac{2x-3}{x(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{C_1}{x+3} + \frac{C_2}{(x+3)^2} + \frac{C_3}{(x+3)^3}$$
- $$\frac{x^3-8}{x^2(x^2+2)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

Integrovanie elementárnych zlomkov :

I.)

$$\int \frac{a}{x-r}dx = \left| \begin{array}{c} t = x-r \\ dt = dx \end{array} \right| = a\int \frac{dt}{t} = a\ln|t| + c = a\ln|x-r| + c\,.$$

II.) Pre $n > 1$:

$$\int \frac{a}{(x-r)^n}dx = \left| \begin{array}{c} t = x-r \\ dt = dx \end{array} \right| = a\int t^{-n}dt = a\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + c\,.$$

III.)

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}$$

1.

$$\frac{a}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{c} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)dx \end{array} \right| = \frac{a}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + c$$

2.

$$\int \frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}dx = \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+K^2} = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{K}\right)^2+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \frac{x+\frac{p}{2}}{K} \\ dt = \frac{1}{K}dx \end{array} \right| = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{K} + c\,,$$

kde $K^2 = \dfrac{4q-p^2}{4}$

IV.) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou.

Cvičenie 5.7. Vypočítajte integrály rýdzoracionálnych funkcií:

95. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

96. $\int \frac{dx}{x^2-1}$.

97. $\int \frac{dx}{x^3+x}$.

98. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

99. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

100. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

101. $\int \frac{2\,dx}{x^2+2x+5}$.

102. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.

103. $\int \frac{dx}{x^3+1}\,dx$.

104. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$.

Cvičenie 5.8. Vypočítajte integrály racionálnych funkcií:

105. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx.$

106. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx.$

107. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}.$

108. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx.$

109. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx.$

110. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx.$

Výsledky:

95. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + c.$

96. $\ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + c.$

97. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$

98. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+2)^4}\right| + c.$

99. $\frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c.$

100. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + c.$

101. $\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c.$

102. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + c.$

103. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$

104. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$

105. $x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + c.$

106. $5x + \ln\left|\frac{\sqrt{x}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right| + c.$

107. $x + 3\ln(x^2-6x+10) + 8\operatorname{arctg}(x-3) + c.$

108. $x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c.$

109. $x - \frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4) + \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c.$

110. $x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$

Určitý integrál

Súvis medzi určitým a neurčitým integrálom - Newtonov-Leibnizov vzorec
Nech f je integrácie schopná funkcia na intervale $\langle a,b\rangle$ a F je jej primitívna funkcia. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Vlastnosti určitého integrálu

Ak $a \le b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Ak funkcie sú spojité v intervaloch, v ktorých integrujeme, tak platí

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b (cf(x)+dg(x))dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx, \qquad c,d \in \mathbb{R}$$

Cvičenie 5.9. Vypočítajte určité integrály.

1. $\int\limits_{-1}^{1} (x+1)^2\,dx,$

2. $\int\limits_{0}^{1} (x^2-2x+3)\,dx,$

3. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx,$

4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2},$

5. $\int\limits_{-7}^{5} |x+1|\,dx,$

7. $\int\limits_{1}^{9} \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx,$

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x + \cos x\,dx.$

9. Funkcia f je definovaná

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \langle 0,1\rangle \\ \sqrt{x}, & x \in \langle 1,2\rangle. \end{cases}$$

Vypočítajte $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx.$

Výsledky:

1. $\frac{8}{3}$, **2.** $\frac{7}{3}$, **3.** 2, **4.** $\frac{\pi}{4}$,
5. 36, **7.** $\frac{64}{3}$, **8.** 0.
9. $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-1)$.

Metódy počítania určitého integrálu

Metóda per partes pre určité integrály

Nech funkcie f a g majú spojité derivácie v intervale $\langle a,b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Substitučná metóda pre určité integrály

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (t=\varphi(x)) = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)dt.$$

Pri počítaní určitých integrálov zo zložitejších funkcií môžeme postupovať v zásade dvomi spôsobmi:

- Oddelíme fázu výpočtu primitívnej funkcie od fázy výpočtu určitého integrálu.
- Neoddelíme fázu výpočtu primitívnej funkcie od fázy výpočtu určitého integrálu.

Cvičenie 5.10. Vypočítajte určité integrály.

10. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$,

11. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$,

12. $\int_9^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$,

13. $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2}\, dx$,

14. $\int_0^\pi x\cos(2x-\frac{\pi}{2})\, dx$,

15. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

16. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$,

17. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$,

18. $\int_1^3 \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$,

19. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$,

20. $\int_0^1 \frac{3x}{1+x^2}\, dx$,

21. $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} xe^{x^2}\, dx$,

22. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$,

23. $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$,

24. $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$,

25. $\int_0^1 \sqrt{x^5+2x}(5x^4+2)\, dx$,

26. $\int_0^\pi \sin 2x\cos^2 2x\, dx$,

27. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$,

28. $\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$,

29. $\int_0^\pi \cos^2 x\, dx$,

30. $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega x)\, dx$,

31. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$,

32. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x}\, dx$,

33. $\int_{-\pi}^0 \sin 3x\cos 2x\, dx$,

34. $\int_0^\pi \cos 3x\cos 4x\, dx$,

35. $\int_{-\pi}^\pi \sin^2 3x\, dx$,

36. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$,

37. $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{x^2+1}\, dx$,

38. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x-x^2}$,

39. $\int_{-1}^0 \frac{x\, dx}{x^2-3x+2}$,

40. $\int_0^1 \frac{3x^2}{x^2+2x+1}\, dx$,

41. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{5x^2}{x^2+1}\, dx$,

42. $\int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\, dx$,

43. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+2}\, dx$,

44. $\int_0^1 \frac{12\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$,

45. $\int_0^1 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$,

46. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{5}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$,

47. $\int_0^2 \frac{x\, dx}{x^2+4x+3}$,

48. $\int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2 2x}\, dx$,

49. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\, dx$,

50. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{cotg}^2 x + 1}\, dx$,

51. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}\, dx$,

52. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\, dx$,

53. $\int\limits_1^2 x \ln x\, dx$,

54. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\, dx$,

55. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x\, dx$,

56. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$,

57. $\int\limits_0^4 (x-1)\sqrt{2x+1}\, dx$,

58. $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{dx}{\cos^3 x}$,

59. $\int\limits_0^1 \ln(x^2+1)\, dx$,

60. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$,

61. $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx$,

62. $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$,

63. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$,

64. $\int\limits_0^{\ln 2} x \cosh x\, dx$,

65. $\int\limits_0^1 x^3 e^{2x}\, dx$.

Výsledky:

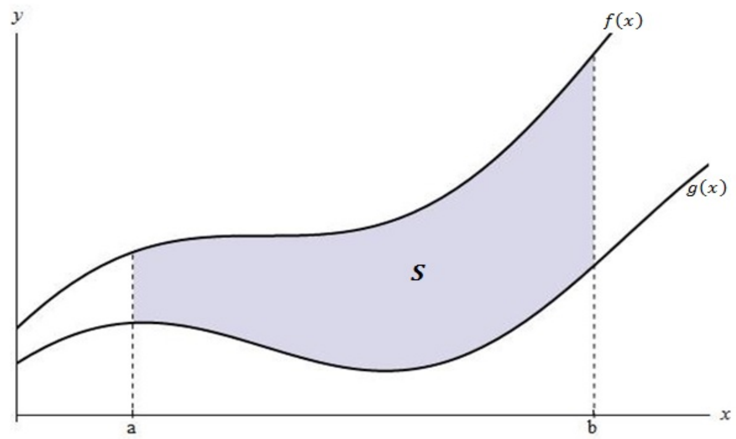
10. $\frac{2}{9}$,
11. $\sqrt{2}-1$,
12. 3,
13. $-\frac{1}{3}$,
14. $-\frac{\pi}{2}$,
15. $\frac{\pi}{12}$,
16. $\frac{\pi}{12}$,
17. $\frac{\pi}{6}$,
18. $\sin(\ln 3)$,
19. $\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)$,
20. $\frac{3}{2}\ln 2$,
21. $\frac{1}{2}$,
22. $2\ln 2$,
23. $2-\sqrt{3}$,
24. $\frac{2}{\ln 2}$,
25. $2\sqrt{3}$,
26. 0,
27. 2,
28. 4,
29. $\frac{\pi}{2}$,
30. 0,
31. $\frac{\pi}{2}$,
32. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$,
33. $-\frac{6}{5}$,
34. 0,
35. π,
36. $\ln\sqrt{3}$,
37. $4-\ln 3$,
38. $2\ln 3$,
39. $3\ln 2 - 2\ln 3$,
40. $\frac{9}{2} - 6\ln 2$,
41. $5\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$,
42. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$,
43. $2\ln 3 - 3\ln 2$,
44. 2π,
45. $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$,
46. $-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{3}$,
47. $\ln\frac{5\sqrt{5}}{9}$,
48. 2,
49. 4,
50. $2\ln(\sqrt{2}+1)$,
51. $\ln 2$,
52. $2-\frac{\pi}{2}$,
53. $2\ln 2-\frac{3}{4}$,
54. $2\ln 2 - 1$,
55. $\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$,
56. $\frac{1}{2}$,
57. $\frac{168}{15}$,
58. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3})$,
59. $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$,
60. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$,
61. $\frac{\pi}{2}-1$,
62. -4π,
63. $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$,
64. $\frac{3}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}$,
65. $\frac{e^2+3}{8}$.

Použitie určitého integrálu v geometrii

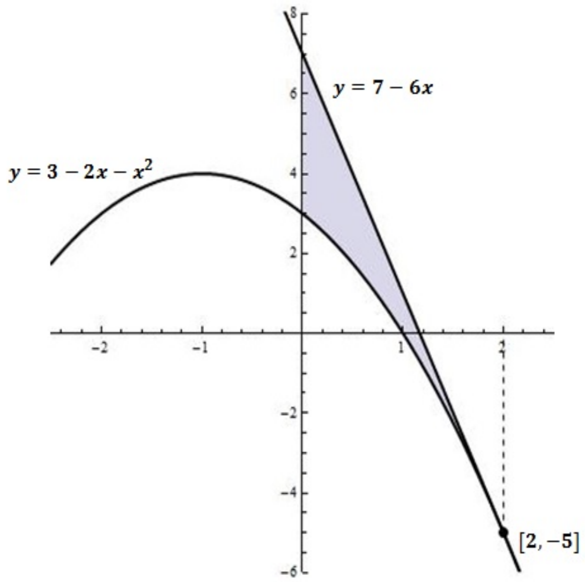
Obsah rovinnej oblasti

Obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f(x) \geq g(x)$ (a priamkami $x = a, x = b$) na intervale $\langle a, b \rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx\,.$$



Príklad: Nájdeme obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y. Príklad je znázornený na nasledujúcom obrázku.



Riešenie: Spomínaná dotyčnica má rovnicu $y = 7 - 6x$ (oddôvodnite!). V intevale integrácie $\langle 0, 2 \rangle$ platí $7 - 6x \geq 3 - 2x - x^2$, preto

$$P = \int_0^2 (7 - 6x - (3 - 2x - x^2))dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx = \frac{8}{3}$$

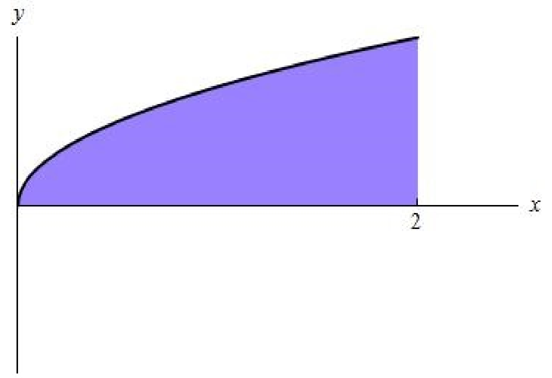
Cvičenie 5.11. Vypočítajte obsahy rovinných oblastí ohraničených uvedenými krivkami. **148.** Parabolou $y=4x-x^2$ a osou o_x. **149.** Parabolou $y=x^2+1$ a priamkou $x+y=3$. **150.** Parabolou $y=x^2-2$ a priamkou $y=2$. **151.** Osou o_x a krivkou $y=x^2-x^3$. **152.** Krivkami $y=x^2$ a $y=x^3$. **153.** Krivkou $y=cos\,x$ a priamkou $y=-\pi$ pre $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$. **154.** Krivkou $y=sin(\frac{\pi}{2}x)$ a priamkou $y=x$. **155.** Krivkami $y=sin\,x$ a $y=cos\,x$ pre $x\in\langle\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\rangle$. **156.** Krivkami $y=2^x$ a $y=2x-x^2$,priamkou $x=2$ a osou o_y. **157.** Parabolami $y=4x^2, y=\frac{x^2}{9}$ a priamkou $y=2$. **158.** Krivkami $y=ln\,x$ a $y=ln^2x$. **159.** Parabolou $y=x^2-2x+2$,jej dotyčnicou v bode $T=[3,5]$ a osou o_y. **160.** Krivkou $y=e^{-x}sin\,x$ a osou o_x v intervale $\langle 0,\pi\rangle$.

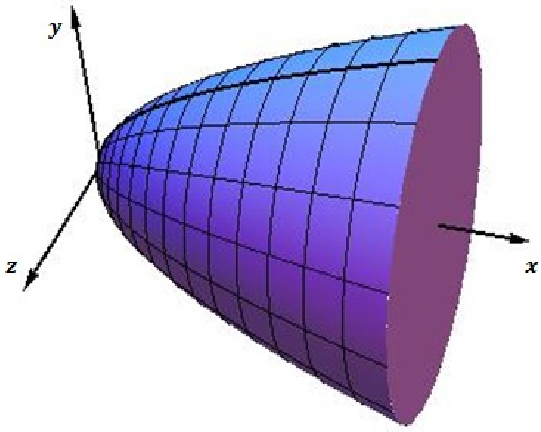
Výsledky
148. $\frac{32}{3}$, **149.** $\frac{9}{2}$, **150.** $\frac{32}{3}$, **151.** $\frac{1}{12}$, **152.** $\frac{1}{12}$, **153.** $2\pi^2$, **154.** $\frac{4}{\pi}-1$, **155.** $2\sqrt{2}$, **156.** $\frac{3}{ln\,2}-\frac{4}{3}$, **157.** $\frac{20\sqrt{2}}{3}$, **158.** $3-e$, **159.** 9, **160.** $\frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

Objem telies

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f\geq 0$ (a priamkami $x=a, x=b$) a osou o_x v intervale $\langle a,b\rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

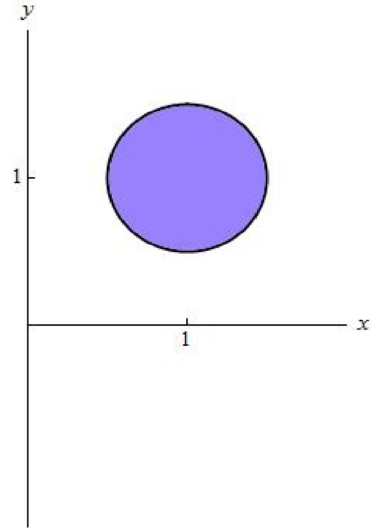


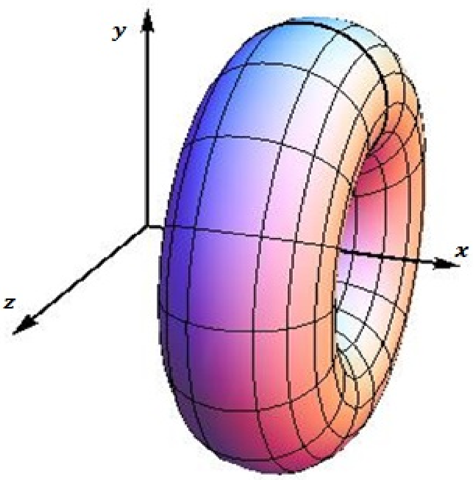


Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f\geq g\geq 0$ (a priamkami $x=a, x=b$) v intervale $\langle a,b\rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V=\pi\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx$$

Cvičenie 5.12. Vypočítajte objemy telies určených rotáciou rovinných oblastí ohranyčených danými krivkami okolo osi o_x **176.** Parabolou $y=x^2$ a priamkou $y=4$. **177.** Parabolou $y=3x-x^2$ a priamkou $y=x$. **178.** Parabolou $y=x^2+1$ a priamkou $y=x+3$. **179.** Krivkami $y=\sqrt{x}$ a $y=\frac{x^2}{8}$. **180.** Krivkou $y=sin\,x$ a osou o_x v intervale $\langle 0,\pi\rangle$. **181.** Krivkami $y=sin\,x, y=cos\,x$ a osou o_y v intervale $\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle$. **182.** Krivkou $y=e^x\sqrt{x}$ a priamkami $x=1, y=0$. **183.** Krivkou $y=sin\,x$ a priamkou $y=\frac{2}{\pi}x$.





Výsledky
176. $\frac{256\pi}{5}$, **177.** $\frac{56\pi}{15}$, **178.** $\frac{117\pi}{5}$, **179.** $\frac{24\pi}{5}$, **180.** $\frac{\pi^2}{2}$, **181.** $\frac{\pi}{2}$, **182.** $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$, **183.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Dĺžka krivky

Dĺžku rovinnej krivky, ktorá je grafon funkcie f, ktorá má spojitú deriváciu v intervale $\langle a,b\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$D = \pi\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Cvičenie 5.13. Vypočítajte dĺžky daných kriviek. **196.** $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}, x\in\langle 0,3\rangle$, **197.** $y=\frac{x^2}{4}, x\in\langle 0,2\sqrt{2}\rangle$, **198.** $y=ln(sin\,x), x\in\langle\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\rangle$, **199.** $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}, x\in\langle 0,1\rangle$, **200.** $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}ln\,x, x\in\langle 1,2\rangle$, **201.** $y=ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right), x\in\langle a,b\rangle$, **202.** $y=ln\,x, x\in\langle\sqrt{3},\sqrt{8}\rangle$, **203.** $y=arcsin\,x+\sqrt{1-x^2}, x\in\langle 0,1\rangle$, **204.** $y=2\sqrt{x}, x\in\langle 1,2\rangle$,

Výsledky
196. 12, **197.** $ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{6}$, **198.** $\frac{1}{2}ln\,3$, **199.** $\frac{2}{3}(\sqrt[4]{8}-1)$, **200.** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}ln\,2$, **201.** $ln\left(\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}\right)$, **202.** $1+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}$, **203.** $4-2\sqrt{2}$, **204.** $\sqrt{6}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}ln\frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}$.

Obsah povrchu rotačnej plochy

Obsah povrchu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie f v intervale $\langle a,b\rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Cvičenie 5.14. Vypočítajte obsahy povrchov rotačných plôch, ktoré vzniknú rotáciou danej krivky okolo osi o_x. **214.** $y=kx, x\in\langle a,b\rangle, 0<a<b, k>0$, **215.** $y=x^3, x\in\langle 0,1\rangle$, **216.** $y=\sqrt{x}, x\in\langle 0,2\rangle$, **217.** $y=e^{-x}, x\in\langle 0,\infty\rangle$, **218.** $y=\frac{x^2}{2}, x\in\langle 0,\frac{3}{4}\rangle$,

Výsledky
214. $\pi k\sqrt{k^2+1}(b^2-a^2)$, **215.** $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$, **216.** $\frac{13\pi}{3}$, **217.** $\pi(\sqrt{2}+ln(1+\sqrt{2}))$, **215.** $\pi\left(\frac{255}{1024}-\frac{ln\,2}{8}\right)$.