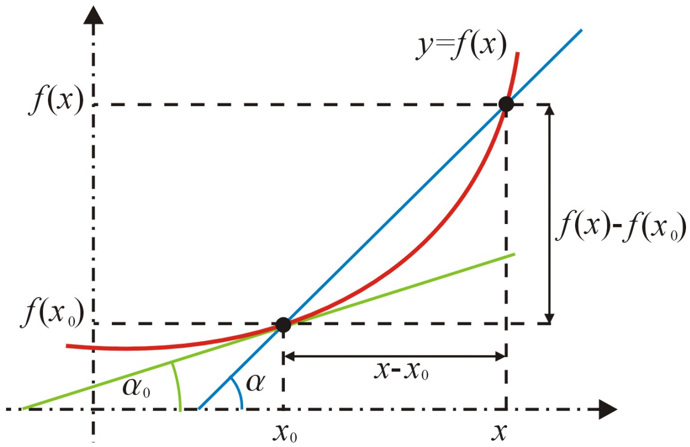
4. Derivácie funkcií a jej aplikácie

Derivácia elementárnych funkcií

Definícia 4.1: Derivácia funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ **-** (ozn. $f'(x_0)$): reálne číslo

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Vzorec	podmienky	Vzorec	podmienky
$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$, c – konštanta	$(x)' = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$	$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Vlastnosti derivácie:

- $\big(c\,f(x)\big)' = c\,f'(x)$ pre $c \in \mathbb{R}$

- $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$
- $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ pre $g(x) \neq 0$
- $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\, g'(x)$

Definícia 4.2: Derivácia druhého rádu funkcie f - (ozn. f''): funkcia, ktorá vznikne ako derivácia prvej derivácie funkcie, t.j. $(f')' = f''$

Cvičenie 4.1. Pomocou definície nájdite deriváciu funkcie f v bode x_0:

a) $f(x) = x^3 - 3, \quad x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad x_0 = 2$

c) $f(x) = x^3 \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

d) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad x_0 = 0$

e) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad x_0 = 1$

f) $f(x) = e^{2x}, \quad x_0 = 0$

Cvičenie 4.2. Nájdite derivácie daných funkcií:

a) $y = x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

b) $y = x^2 + 2 - \sin x$

c) $y = e^x + 2\ln x - 8x^6$

d) $y = x^4 + \cos x$

e) $y = (x+3)\log_2 x$

f) $y = (x^2 + 3x - 5)e^x$

g) $y = \dfrac{\sin x}{x^3 + 1}$

h) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$

i) $y = \dfrac{2^x + x}{\operatorname{arctg} x}$

j) $y = \operatorname{tg}(x^3 - \sin x)$

k) $y = 2\ln(3\sqrt[3]{x} + 2x^5)$

l) $y = 3^{x^2 - \cos x - 2}$

m) $y = \ln\left(\dfrac{1}{\arccos x}\right)$

n) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3x^6 + 5x - 2}{\arcsin x}\right)$

o) $y = 3^{x \log_3 x}$

p) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

q) $y = e^{\sin x} \sin x$

r) $y = \sqrt{\dfrac{(x+2)\cos x^2}{x(x^3 - 8)}}$

s) $y = \ln \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

t) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x+4)^5}\sqrt{(x-1)^3}}$

u) $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} e^x}$

v) $y = \arccos \ln(x^8 - \sin x)$

w) $y = \dfrac{5x^2}{x^2 + 1}\sin^3 x \cos^4 x$

z) $y = \log_6 \sin e^{2x}$

Cvičenie 4.3. Vypočítajte $f''(0)$ a $f''(1)$, ak

a) $f(x) = x^5 - 7x + 12$ b) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$

c) $f(x) = \mathrm{tg}2x$ d) $f(x) = xe^{-x^2}$

Aplikácie derivácií: L'Hospitalovo pravidlo

Pre limitu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$ platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokiaľ platia nasledujúce vlastnosti:

- existuje okolie bodu a, v ktorom funkcie f a g majú deriváciu,
- $g'(x) \neq 0$ v tom okolí,
- existuje limita $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

V prípade neurčitej limity typu $0\cdot\infty$, môžeme súčin $f(x)\cdot g(x)$ písať v tvare $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ alebo $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ a dostanema teda limity typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$, na čo už vieme aplikovať L´Hospitalovo pravidlo.

Cvičenie 4.4. Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^8-x}{x^8-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{6}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+1}{2x^4+6x-5}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2^x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\mathrm{cotg}x}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ o) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x\sin x$

p) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\, e^{\frac{1}{x^2}}$ q) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}x\ln\dfrac{1}{x}$ r) $\lim\limits_{x\to\infty}x\,\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Výsledky: a) 2 b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ e) $\frac{5}{2}$ f) 3 g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{-1}{2}$ i) 0 j) 1 k) 0 l) 0 m) 0 n) 2 o) 0 p) ∞ q) 0 r) 0

Aplikácie derivácií: Priebeh funkcie

Monotónnosť:

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode intervalu (a,b) deriváciu, potom

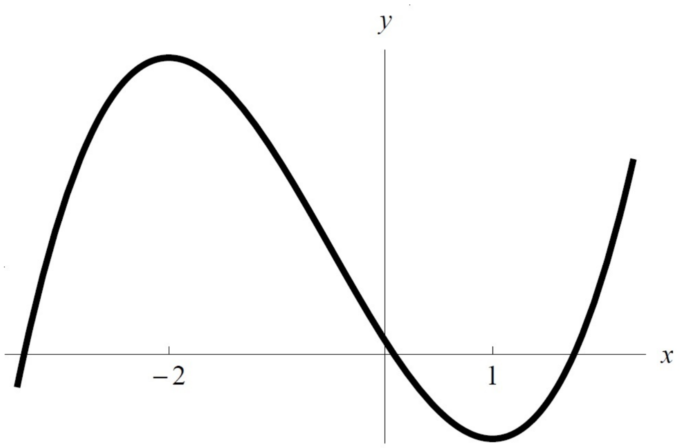
a.) ak $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **rastúca** na intervale (a,b),

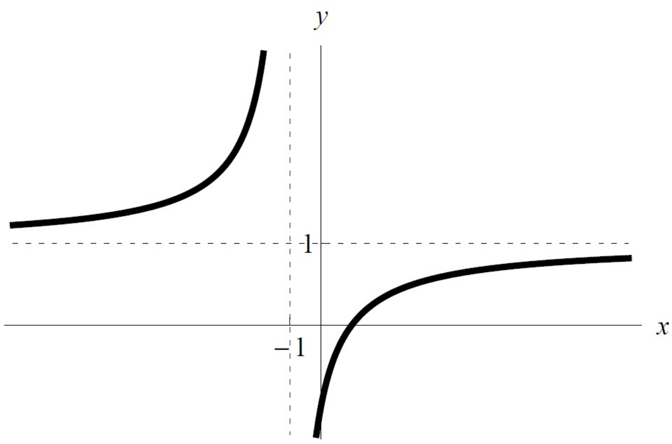
b.) ak $f'(x) < 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **klesajúca** na intervale (a,b),

c.) ak $f'(x) \geq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **neklesajúca** na intervale (a,b),

d.) ak $f'(x) \leq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **nerastúca** na intervale (a,b).

Na obrázku vľavo je graf funkcie $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, vpravo $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$



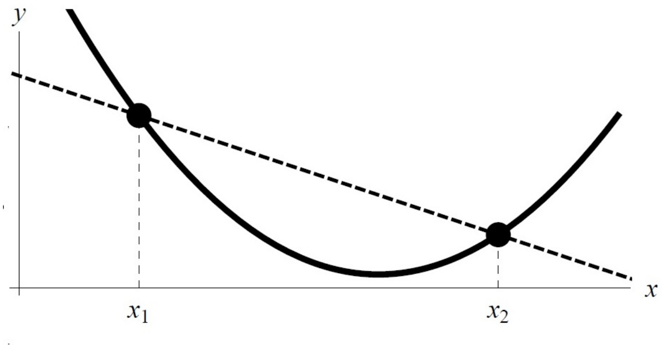


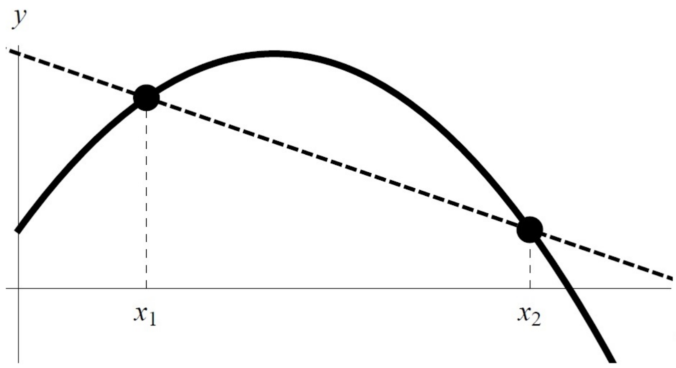
Konvexnosť-konkávnosť:

Definícia 4.3:

- **Konvexná funkcia na intervale I:** pre všetky body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a pre každú konštantu $t \in (0,1)$ platí, že
$$f\big(t x_1 + (1-t) x_2\big) \leq t\, f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$
(obrázok vľavo), t.j. ak graf funkcie na intervale (x_1, x_2) leží **pod** priamkou, ktorá spája body $f(x_1)$ a $f(x_2)$

- **Konkávna funkcia na intervale I:** pre všetky body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a pre každú konštantu $t \in (0,1)$ platí, že
$$f\big(t x_1 + (1-t) x_2\big) \geq t\, f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$
(obrázok vpravo), t.j. ak graf funkcie na intervale (x_1, x_2) leží **nad** priamkou, ktorá spája body $f(x_1)$ a $f(x_2)$





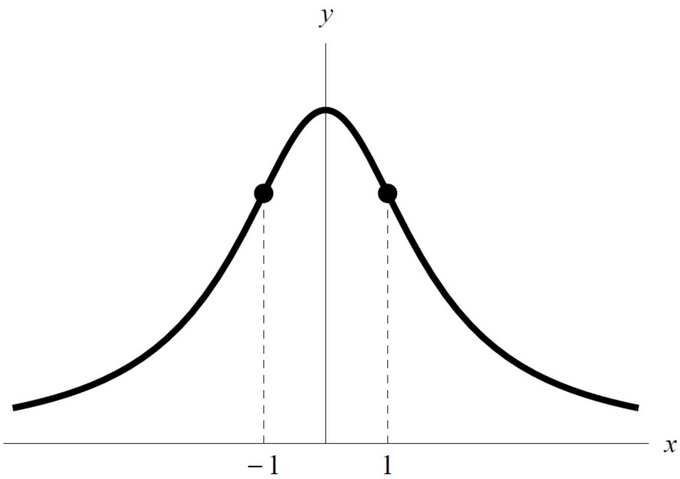
- **Inflexný bod:** bod, v ktorom sa konvexnosť mení na konkávnosť alebo naopak

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode intervalu (a,b) prvú a druhú deriváciu, potom

a.) ak $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **konvexná** na intervale (a,b),

b.) ak $f''(x) \leq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **konkávna** na intervale (a,b)

Na obrázku je graf funkcie $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

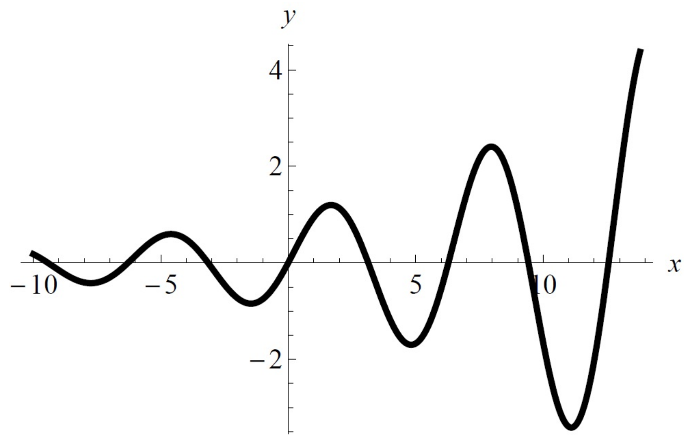


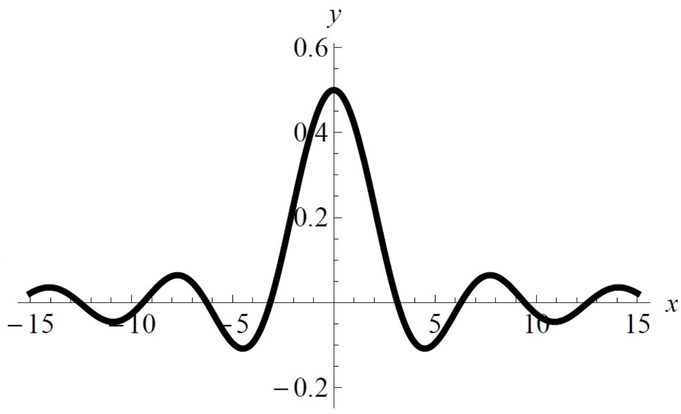
Lokálne, globálne extrémy:

Definícia 4.4:

- **Lokálne minimum**, resp. **lokálne maximum funkcie** f **v bode** x_0**:** (obrázok vľavo) ak existuje ε-ové okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu x_0, že pre všetky $x \in O_\varepsilon(x_0)$ platí

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{resp.} \quad f(x_0) \geq f(x).$$





- **Globálne minimum**, resp. **globálne maximum funkcie f v bode x_0:** (obrázok vpravo) ak $f(x_0) \leq f(x)$, resp. $f(x_0) \geq f(x)$ platí pre všetky body z definičného oboru funkcie f.

Hľadanie extrémov pomocou prvej derivácie:

Ak pre okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$ platí, že

$$f'(x) > 0 \quad \text{pre} \quad x < x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam rastúca)}$$

a

$$f'(x) < 0 \quad \text{pre} \quad x > x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam klesajúca)},$$

tak v bode x_0 má funkcia **lokálne maximum**.

Ak pre okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$ platí, že

$$f'(x) < 0 \quad \text{pre} \quad x < x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam klesajúca)}$$

a

$$f'(x) > 0 \quad \text{pre} \quad x > x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam rastúca)},$$

tak v bode x_0 má funkcia **lokálne minimum**.

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode $x_0 \in (a,b)$ deriváciu a nech má v tomto bode lokálny extrém. Potom $f'(x_0) = 0$.

!!!Opačná implikácia nemusí platiť!!!

Definícia 4.5:

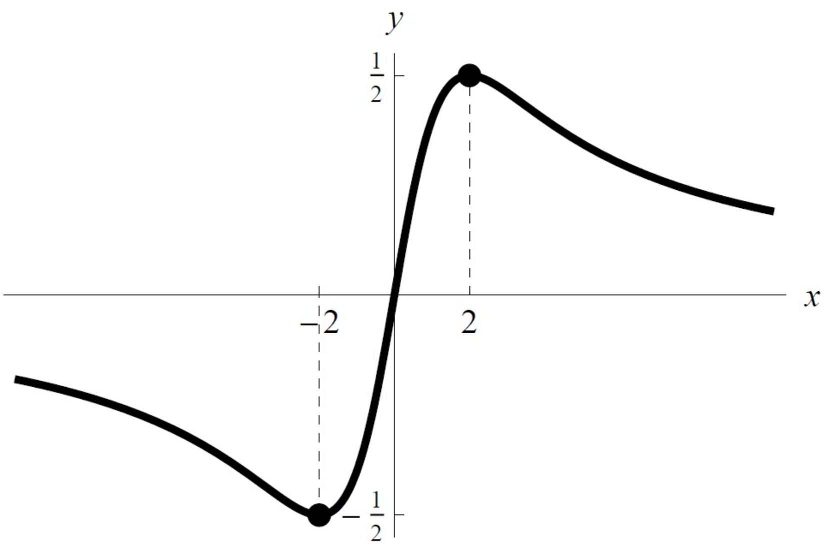
- **Stacionárny bod:** bod, pre ktorý platí $f'(x_0) = 0$

Hľadanie extrémov pomocou druhej derivácie:

Nech $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ má v bode $x_0 \in (a,b)$ prvú aj druhú deriváciu a nech $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Potom a.) ak $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 **lokálne maximum**,

b.) ak $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 **lokálne minimum**.

Na obrázku je graf funkcie $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$



Asymptoty grafu funkcie:

Asymptota je priamka, ku ktorej sa graf funkcie blíži, ale nikdy nepretína - dotyčnica v nekonečnu.
Definícia 4.6:

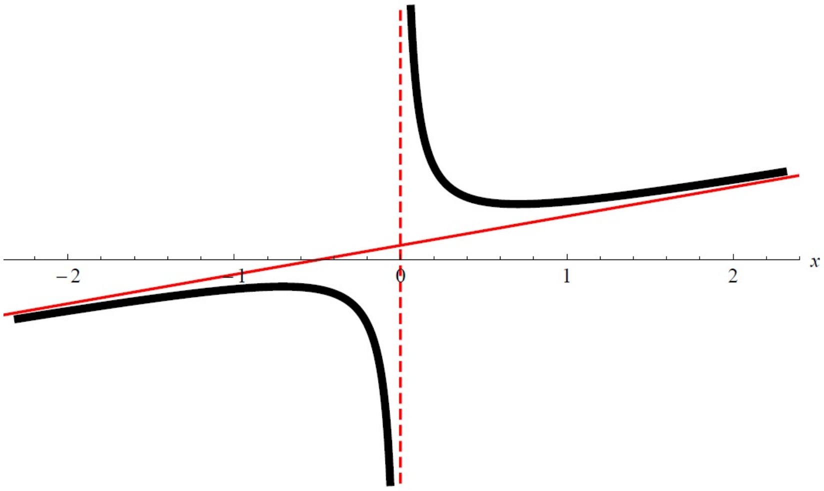
- **Asymptota bez smernice:** priamka daná rovnicou $x = a$, ak sa nastane aspoň jeden z nasledujúcich prípadov

  1) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$

- **Asymptota so smernicou:** priamka daná rovnicou $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big)$$

Na obrázku je graf funkcie $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{8x}$



Priebeh funkcie:

Vlastnosti, ktoré treba vyšetriť:

1) definičný obor
2) všetky body nespojitosti a intervaly spojitosti
3) priesečníky s osou x a y
4) párnosť/nepárnosť, periodičnosť
5) intervaly monotónnosti, intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexné body, lokálne extrémy
6) asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou
7) nakresliť graf

Na obrázku je graf funkcie $f(x) = x + \dfrac{2x}{x^2-1}$

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
2) body nespojitosti sú $x = -1$ a $x = 1$, intervaly spojitosti sú $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$
3) funkcia pretína os x a y len v bode so súradnicami $(0, 0)$
4) je nepárna, lebo

$$f(-x) = -x + \frac{2(-x)}{(-x)^2-1} = -\left(x + \frac{2x}{x^2-1}\right) = -f(x)$$

nie je periodická

	$(-\infty, x_1)$	$x = x_1$	$(x_1, -1)$	$(-1,1)$	$(1, x_2)$	$x = x_2$	(x_2, ∞)
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	LOK. MAX.	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	LOK. MIN.	$\nearrow$

5) – **Monotónnosť, lokálne extrémy:**

$$f'(x) = \frac{\left(x^2 - (2+\sqrt{5})\right)\left(x^2 - (2-\sqrt{5})\right)}{(x^2-1)^2}$$

na obrázku šípka $\nearrow$ znamená rastúcosť, šípka $\searrow$ znamená klesajúcosť,

$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{5}}$, $x_2 = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$

– **Konvexnosť/konkávnosť, inflexné body:**

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

na obrázku znak $\bigcup$ znamená konvexnosť, $\bigcap$ znamená konkávnosť,

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$x = 0$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	INFLEX. BOD	$\cap$	$\cup$

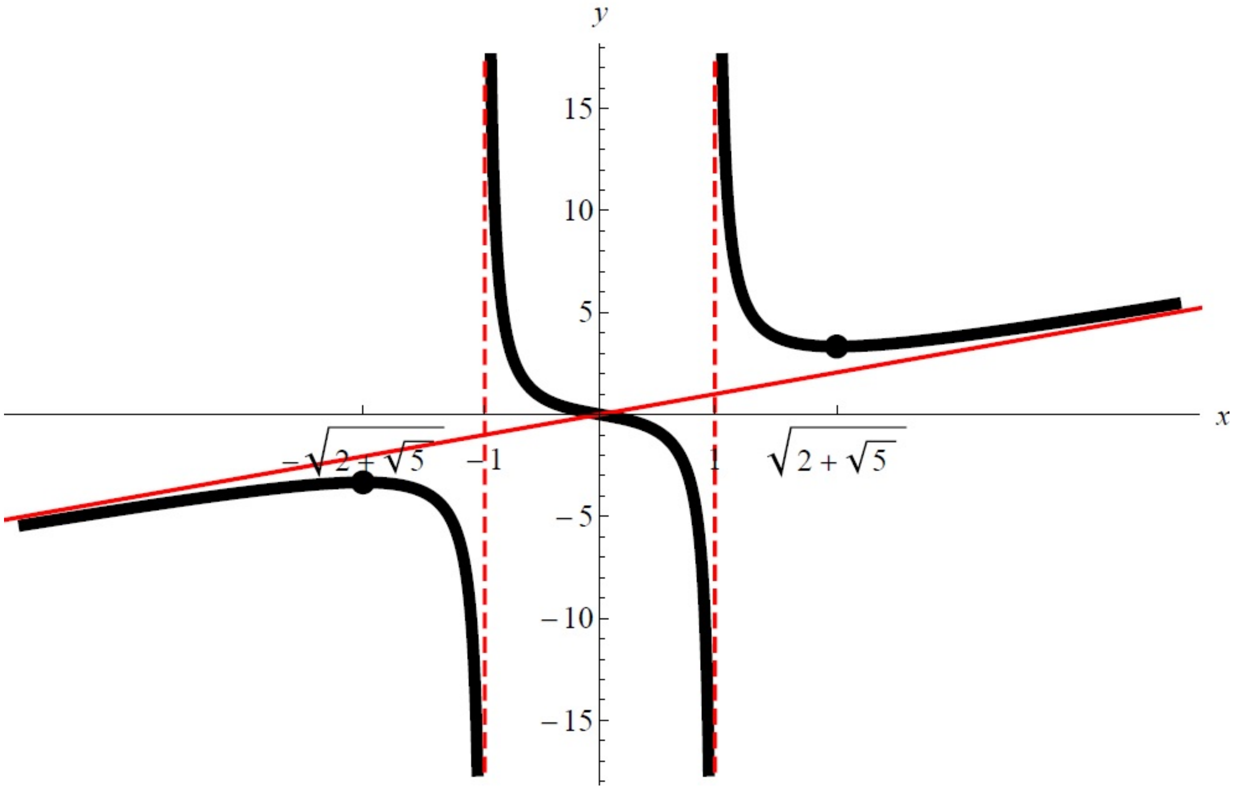
– **Asymptoty:** Asymptoty bez smernice sú priamky $x = 1$ a $x = -1$

	$(-\infty,-1)$	$x \to -1-$	$x \to -1+$	$(-1,1)$	$x \to 1-$	$x \to 1+$	$(1,\infty)$
$f(x)$		$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$		$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$	

Asymptota so smernicou je priamka $y = x$, keďže

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$$



Cvičenie 4.5. Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$ a načrtnite jej graf:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ e) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$ f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

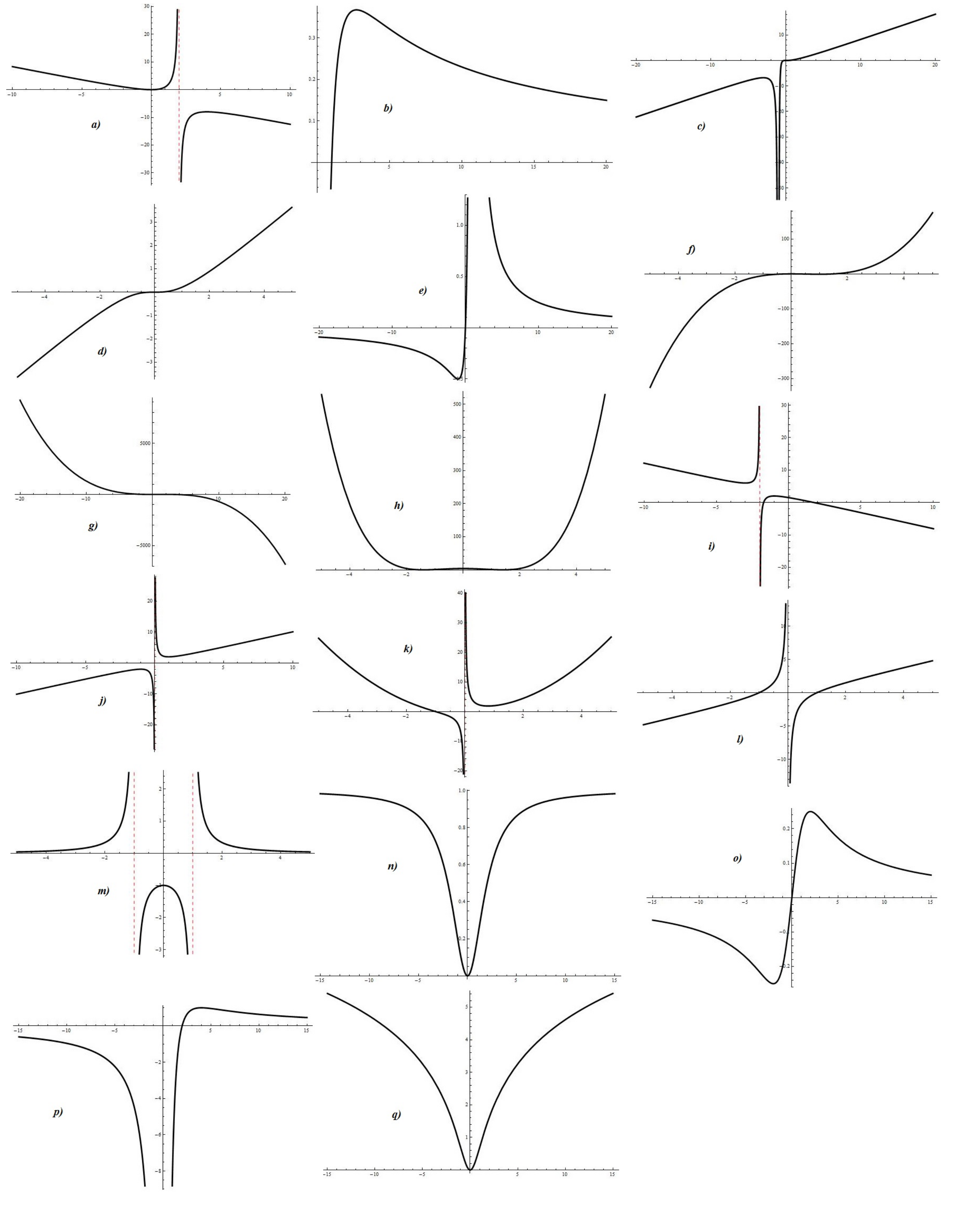
g) $f(x) = 2 - x^3 + 3x^2$ h) $f(x) = (2-x^2)^2$ i) $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+2}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ k) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ l) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ n) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ o) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

p) $f(x) = \dfrac{8(x-2)}{x^2}$ q) $f(x) = \ln(1+x^2)$ r) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} + x$

Výsledky:


a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
k)
l)
m)
n)
o)
p)
q)