

3. Reálne funkcie jednej reálnej premennej

Základné vlastnosti

Definícia 3.1:

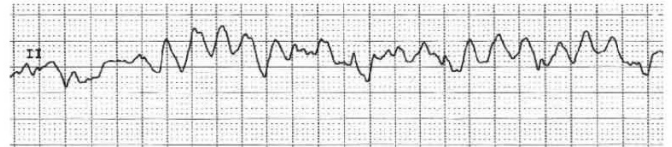
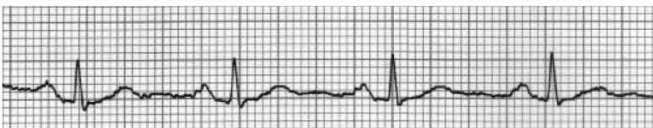
- **Funkcia (zobrazenie)** - (ozn. $f : M \rightarrow P$): predpis, podľa ktorého každému prvku $x \in M$ je priradený práve jeden prvok $y \in P$ (x - **vzor** ; y - **obraz**), t.j. $x \mapsto y = f(x)$
Je to akoby čierna skrinka, do ktorej vchádza x a vychádza $f(x)$



- **Reálna funkcia jednej reálnej premennej** : funkcia $f : M \rightarrow P$, kde $M, P \subset \mathbb{R}$
- **Obraz množiny** $C \subset M$ - (ozn. $f(C)$): množina všetkých prvkov z množiny P , ktoré sú obrazmi prvkov z C
- **Definičný obor funkcie** f - (ozn. $D(f)$): množina M
- **Obor hodnôt funkcie** f - (ozn. $H(f)$): obraz množiny M , t.j. $f(M)$
- **Postupnosť** - (ozn. $f(n) = a_n$): funkcia definovaná na množine prirodzených čísel
- **Rovnosť funkcie** f a g - (ozn. $f = g$): $D(f) = D(g)$ a pre všetky prvky $x \in D(f)$ platí, že $f(x) = g(x)$
- **Graf funkcie** f : množina bodov $[x, y]$ v rovine, pre ktoré platí $y = f(x)$

Spôsob zadávania funkcií:

- analyticky: predpisom $y = f(x)$
- graficky: napr. EKG, barometer
- tabuľkou: ak máme konečný počet bodov, napr. zápis meraní

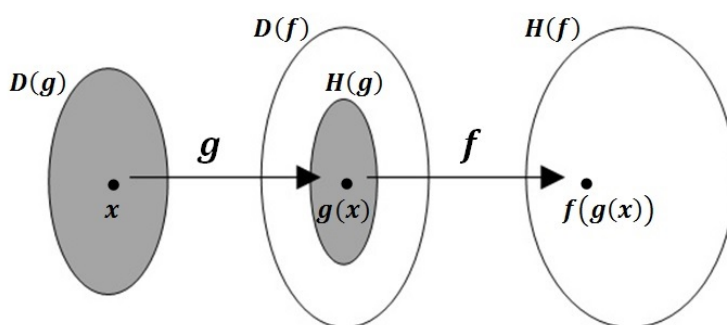


Základné operácie s funkciami: Nech sú dané funkcie $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : D(g) \rightarrow \mathbb{R}$. Potom môžeme definovať

- **súčet funkcií f a g :** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **rozdiel funkcií f a g :** $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **súčin funkcií f a g :** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **podiel funkcií f a g :** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$ pričom $g(x) \neq 0$
- **superpozícia (zloženie) funkcií f a g :** Nech pre každé $x \in D(g)$ je hodnota $g(x) \in D(f)$. Potom na množine $D(g)$ môžeme definovať funkciu

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

kde f je tzv. **vonkajšia zložka** a g je tzv. **vnútorná zložka**.



Cvičenie 3.1. Nájdite definičné obory funkcií $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$, $h(x) = \frac{x^2+2x}{x-x^2}$,
 $i(x) = \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$, $j(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$, $k(x) = \sqrt{|x-1|-2}$, $l(x) = \frac{1}{|x|-3}$,
 $m(x) = \frac{2}{\sqrt{1-|x+1|}}$. Nájdite hodnoty týchto funkcií v bode $x = 5$.

Cvičenie 3.2. Zistite, či sa rovnajú funkcie

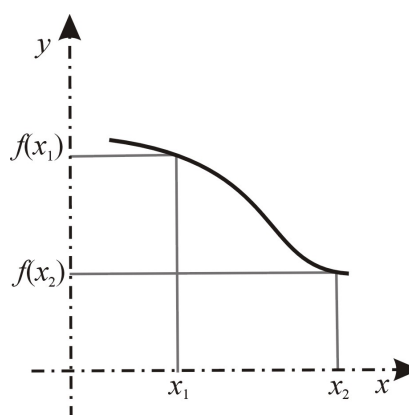
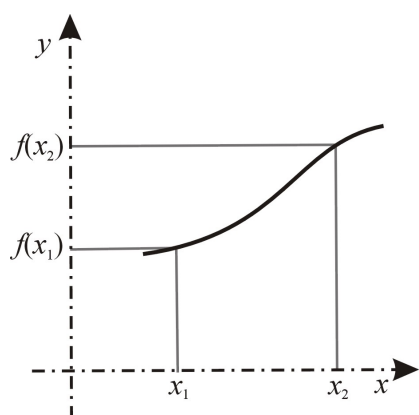
- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = 1, g(x) = \frac{x}{x}$ | b) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x}{x^2}$ |
| c) $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2, h(x) = \sqrt{x^2}$ | d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, g(x) = x+1$ |
| e) $f(x) = x , g(x) = x$ | f) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}x}, g(x) = \operatorname{ctg}x$ |
| g) $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2), g(x) = \ln(x+2)(x-2)$ | |
| h) $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2), g(x) = \ln \frac{x+2}{x-2}$ | |
| i) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}, g(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt{x^2}}, h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ | |

Cvičenie 3.3. Nájdite $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$, ak

- a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \sin x$
 c) $f(x) = 2 \ln x$, $g(x) = x^3 - 2$ d) $f(x) = 1 + e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$
 d) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$ e) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \operatorname{tg} x$

Definícia 3.2: Základné vlastnosti funkcie $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$:

- **monotónnosť** : ak pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$ s vlastnosťou $x_1 < x_2$
 -**rastúca**: $f(x_1) < f(x_2)$ -**klesajúca**: $f(x_1) > f(x_2)$

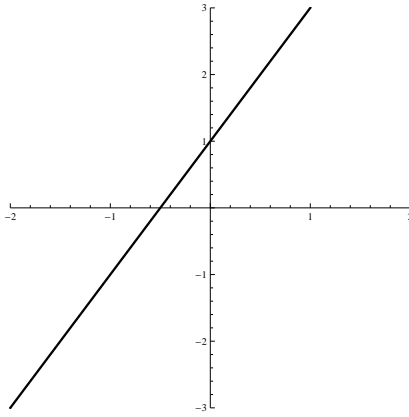
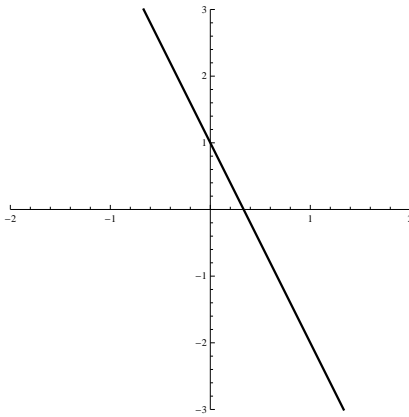
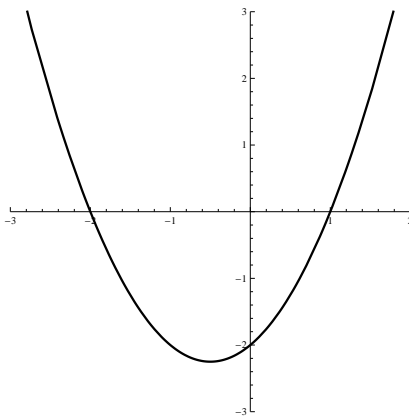


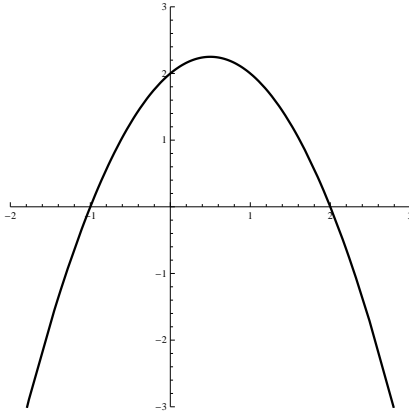
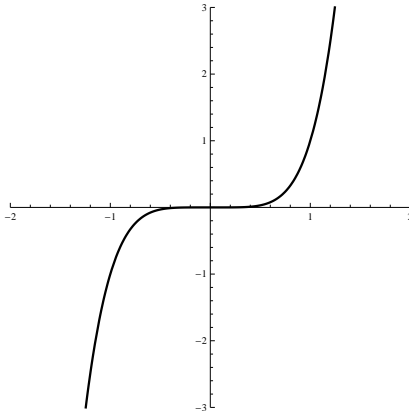
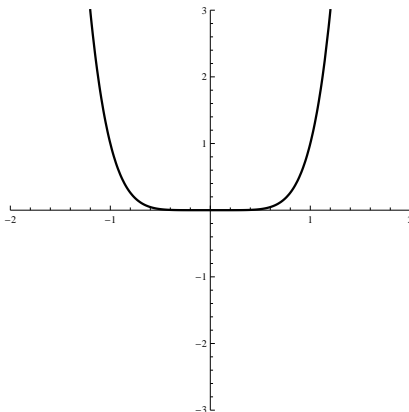
- **ohraničenosť zhora a/alebo zdola** : ak množina oboru hodnôt je ohraničená zhora a/alebo zdola, tak hovoríme, že funkcia je zhora a/alebo zdola ohraničená, t.j. ak

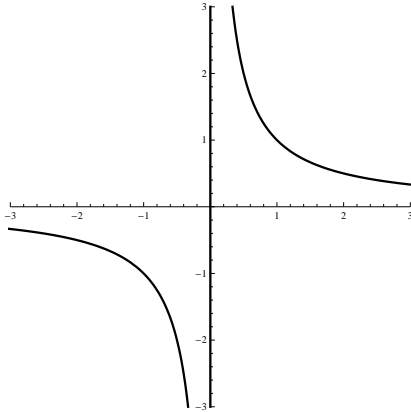
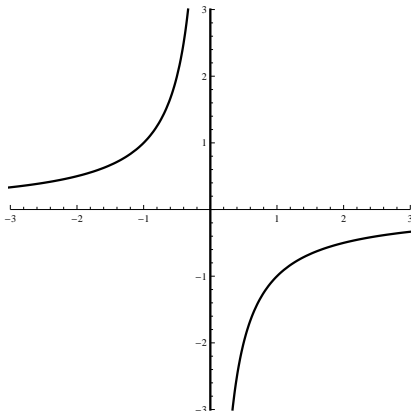
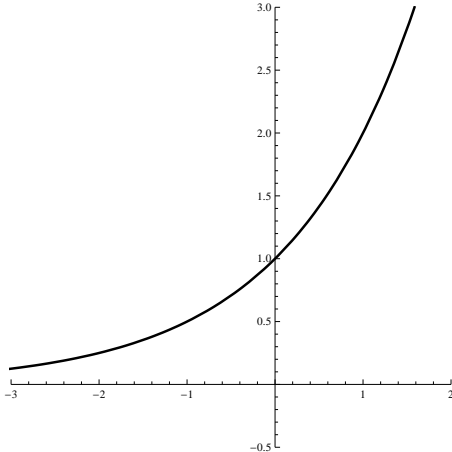
$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(f) : f(x) \leq k \quad \text{a/alebo} \quad \exists l \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(f) : f(x) \geq l$$

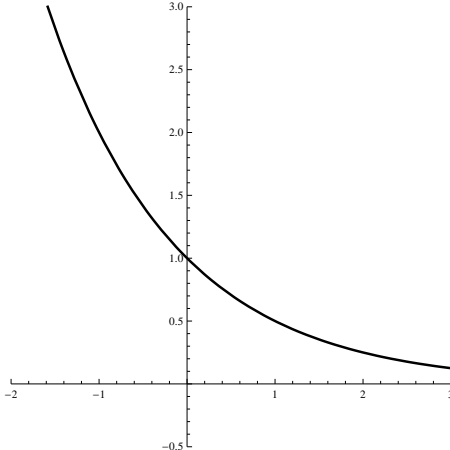
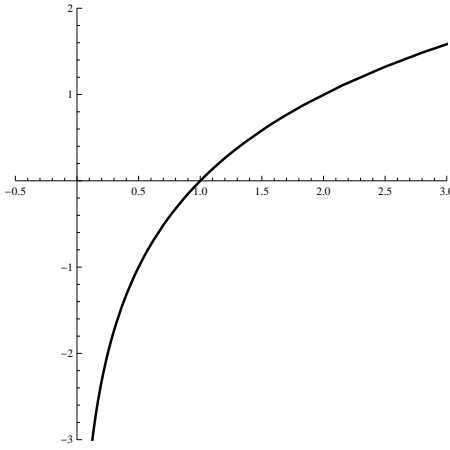
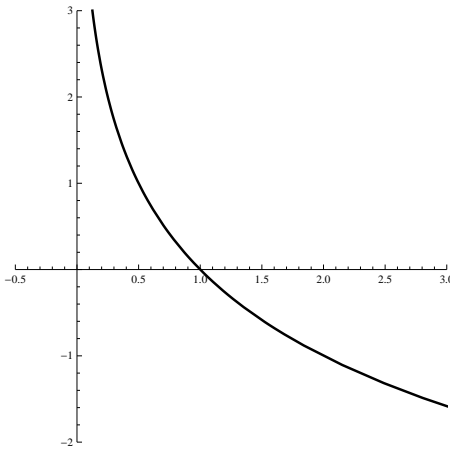
- **párnosť/nepárnosť** : ak pre všetky $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$
 - **párna**: $f(-x) = f(x)$ - graf je súmerný podľa osi y
 - **nepárna**: $f(-x) = -f(x)$ - graf je súmerný podľa začiatku súradnicového systému
- **periodičnosť** : nech $p > 0$ (**základná perióda**) a pre všetky $x \in D(f)$ aj $x + p \in D(f)$ a aj $x - p \in D(f)$, potom funkcia f je **periodická s periódou** p , ak $f(x + p) = f(x) = f(x - p)$

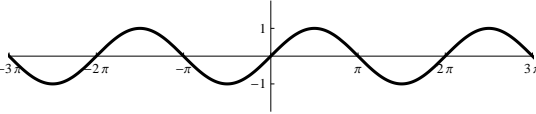
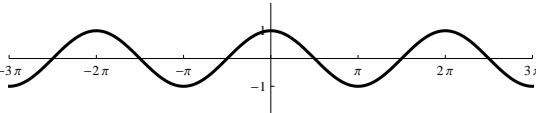
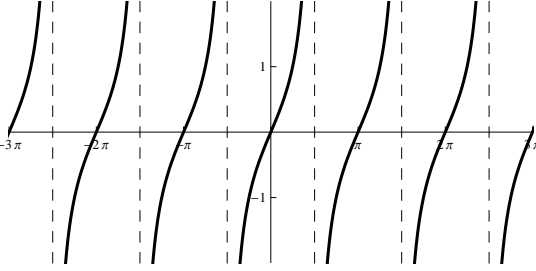
Prehľad elementárnych funkcií a ich základné vlastnosti:

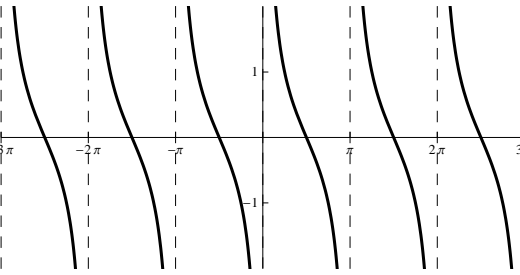
Vlastnosti funkcie f :	Graf funkcie f :
<p>$y = ax + b, a > 0$ - lineárna funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \mathbb{R}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: rastúca na celom svojom definičnom obore • párnosť/nepárnosť: ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je nepárna 	
<p>$y = ax + b, a < 0$ - lineárna funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \mathbb{R}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: klesajúca na celom svojom definičnom obore • párnosť/nepárnosť: ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je nepárna 	
<p>$y = ax^2 + bx + c, a > 0$ - kvadratická funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \langle y^V, \infty \rangle$ • ohraničenosť: zdola ohraničená, zhora neohraničená • monotónnosť: klesajúca na $(-\infty, x^V)$, rastúca na $\langle x^V, \infty \rangle$ • párnosť/nepárnosť: ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je párna 	

Vlastnosti funkcie f :	Graf funkcie f :
<p>$y = ax^2 + bx + c, a < 0$ - kvadratická funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = (-\infty, y^V)$ • ohraničenosť: zdola neohraničená, zhora ohra- ničená • monotónnosť: rastúca na $(-\infty, x^V)$, klesajúca na (x^V, ∞) • párnosť/nepárnosť: ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je párna 	
<p>$y = x^n, n$ je nepárne číslo - mocninová funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \mathbb{R}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: rastúca na celom svojom definič- nom obore • párnosť/nepárnosť: nepárna 	
<p>$y = x^n, n$ je párne číslo - mocninová funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \langle 0, \infty$ • ohraničenosť: zdola ohraničená, zhora neohra- ničená • monotónnosť: klesajúca na $(-\infty, 0)$, rastúca na $\langle 0, \infty$ • párnosť/nepárnosť: párna 	

Vlastnosti funkcie f :	Graf funkcie f :
<p>$y = \frac{k}{x}, k > 0$ - nepriama úmernosť</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: klesajúca na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ • párnosť/nepárnosť: nepárna 	
<p>$y = \frac{k}{x}, k < 0$ - nepriama úmernosť</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: rastúca na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ • párnosť/nepárnosť: nepárna 	
<p>$y = a^x, a > 1$ - exponenciálna funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = (0, \infty)$ • ohraničenosť: zdola ohraničená, zhora neohraničená • monotónnosť: rastúca na celom svojom definičnom obore • párnosť/nepárnosť: nie je ani párna ani nepárna 	

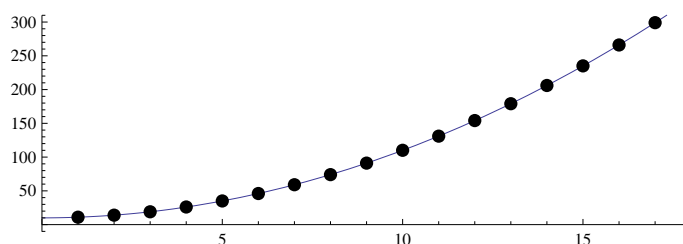
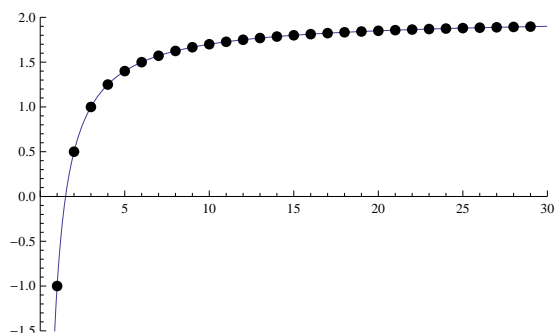
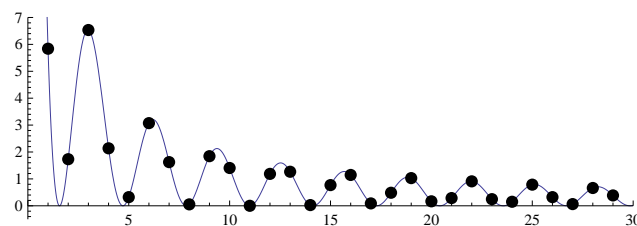
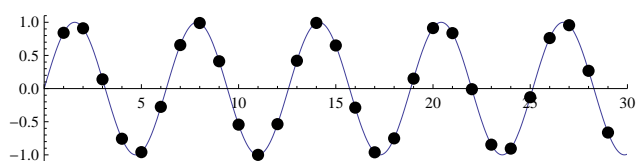
Vlastnosti funkcie f :	Graf funkcie f :
<p>$y = a^x, 0 < a < 1$ - exponenciálna funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = (0, \infty)$ • ohraničenosť: zdola ohraničená, zhora neohraničená • monotónnosť: klesajúca na celom svojom definičnom obore • párnosť/nepárnosť: nie je ani párna ani nepárna 	
<p>$y = \log_a x, a > 1$ - logaritmická funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = (0, \infty)$ $H(f) = \mathbb{R}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: rastúca na celom svojom definičnom obore • párnosť/nepárnosť: nie je ani párna ani nepárna 	
<p>$y = \log_a x, 0 < a < 1$ - logaritmická funkcia</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = (0, \infty)$ $H(f) = \mathbb{R}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: klesajúca na celom svojom definičnom obore • párnosť/nepárnosť: nie je ani párna ani nepárna 	

Vlastnosti funkcie f :	Graf funkcie f :
<p>$y = \sin x$ - funkcia sinus</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$ • ohraničenosť: ohraničená zdola aj zhora • monotónnosť: rastúca na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, klesajúca na $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ • párnosť/nepárnosť: nepárna • periodičnosť: periodická s periódou $p = 2\pi$ 	
<p>$y = \cos x$ - funkcia kosinus</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$ • ohraničenosť: ohraničená zdola aj zhora • monotónnosť: klesajúca na $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, rastúca na $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ • párnosť/nepárnosť: párna • periodičnosť: periodická s periódou $p = 2\pi$ 	
<p>$y = \operatorname{tg} x$ - funkcia tangens</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ $H(f) = \mathbb{R}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: rastúca na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$, • párnosť/nepárnosť: nepárna • periodičnosť: periodická s periódou $p = \pi$ 	

Vlastnosti funkcie f :	Graf funkcie f :
<p>$y = \cotgx$ - funkcia kotangens</p> <ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$ $H(f) = \mathbb{R}$ • ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora • monotónnosť: klesajúca na $(k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ • párnosť/nepárnosť: nepárna • periodičnosť: periodická s periódou $p = \pi$ 	

Limita postupnosti

limes = hranica



Definícia 3.3:

- **Limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - (ozn. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ alebo $a_n \rightarrow a$)
- **Konvergentná postupnosť**: ak postupnosť má konečnú limitu $a \in \mathbb{R}$
- **Divergentná postupnosť**: ak nie je konvergentná, t.j. neexistuje limita alebo to nie je konečné číslo
- **Vlastná limita postupnosti**: ak limita postupnosti je reálne číslo, t.j. ak postupnosť je konvergentná

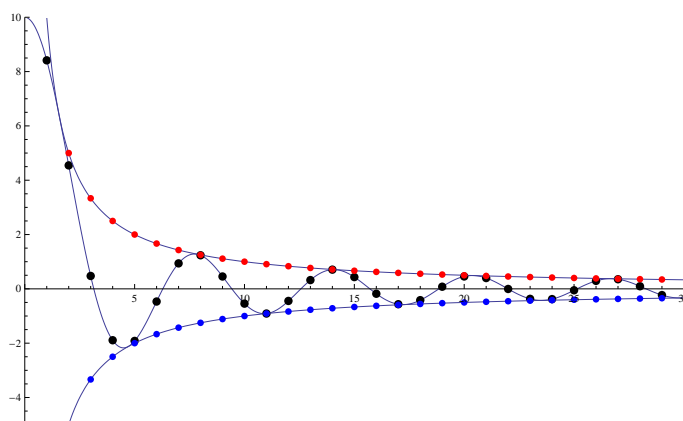
- **Nevlastná limita postupnosti:** ak limita postupnosti je ∞ alebo $-\infty$

Vlastnosti limity postupnosti:

- Každá konvergentná postupnosť má iba jednu limitu
- Ak je postupnosť konvergentná, tak je ohraničená (!!!opačne to nemusí platiť!!!)
- Každá zhora ohraničená, rastúca postupnosť je konvergentná a konverguje k jej supremum
- Každá zdola ohraničená, klesajúca postupnosť je konvergentná a konverguje k jej infimum
- Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné postupnosti, pričom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, potom

$$\begin{aligned}
 - \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| = |a|; & \lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot a_n \right) = k \cdot a \text{ pre } k \in \mathbb{R} \\
 - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b; & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b \\
 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} \text{ za predpokladu, že } b_n \neq 0 \text{ a } b \neq 0
 \end{aligned}$$

- Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ a pre skoro všetky n (tj. začínajúc od nejakého n_0) platí, že $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$
- Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0, \text{ lebo}$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ a $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ a postupnosť $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená

Významné limity:

$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ pre $c \in \mathbb{R}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$ pre $k > 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pre $k > 0$
$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ pre $q > 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$ pre $q = 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ pre $q \in (-1, 1)$
$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ neexistuje pre $q \leq -1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	

Počítanie s ∞ a $-\infty$:

Sčítanie:	$\infty + \infty = \infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	$c + \infty = \infty$ pre $c \in \mathbb{R}$	$c - \infty = -\infty$ pre $c \in \mathbb{R}$
Násobenie:	$\pm\infty \cdot (\pm\infty) = \infty$	$\mp\infty \cdot (\pm\infty) = -\infty$	$c \cdot \infty = \infty$ pre $c > 0$	$c \cdot \infty = -\infty$ pre $c < 0$
Umocnenie:	$\infty^c = \infty$ pre $c > 0$	$\infty^{-c} = \frac{1}{\infty^c} = 0$ pre $c > 0$	$c^\infty = \infty$ pre $c > 1$	$c^\infty = 0$ pre $c \in (-1, 1)$
!!!Neurčité limity!!!	$\infty - \infty = ?$	$0 \cdot \infty = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$

Cvičenie 3.4. Vypočítajte limity postupnosti:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 5n^2 + 6)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right)^3$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(\frac{2}{n^2} - 3\right)^2 \right]$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 3n + 2}{2n^4 - 3n^3 + n}$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 3}}{n - 2}$ h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + \sqrt{n^3 + 3}}{n^2 + n - 2}$ i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+3}\right)$
- j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} - 2n\right)$ k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$ l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$
- m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2}}{n + 1}$ n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$
- p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$ q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$ r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{5n-3}$
- s) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - 3^n}{2 \cdot 3^n + 3}$ t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$ u) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{1 + 4^n}$
- v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{2^n}$ w) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^3} - \frac{10 \sin(2n)}{9n - 3\sqrt{n}}\right)$ z) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{\cos n}{n}\right)$

Limita funkcie jednej premennej

Definícia 3.4:

- **Funckia má v bode a limitu b** - (ozn. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$): ak a je hromadným bodom množiny $D(f)$ a ak pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}$ takú, že $x_n \rightarrow a$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

- **Limita zprava** - (ozn. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$): ak v definícii limity funkcie platí, že $x_n > a$
- **Limita zľava** - (ozn. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$): ak v definícii limity funkcie platí, že $x_n < a$
- **Vlastná limita vo vlastnom bode** : $a \in \mathbb{R}$ a aj $b \in \mathbb{R}$
- **Nevlastná limita vo vlastnom bode** : $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \{-\infty, \infty\}$
- **Vlastná limita v nevlastnom bode** : $a \in \{-\infty, \infty\}$ a $b \in \mathbb{R}$
- **Nevlastná limita v nevlastnom bode** : $a \in \{-\infty, \infty\}$ a $b \in \{-\infty, \infty\}$

!!!Limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje práve vtedy, ak existujú $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ a rovnajú sa!!!

Významné limity:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^k} = \infty$ pre nepárne $k \in \mathbb{N}$
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} = \infty$ pre párne $k \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x^k} = -\infty$ pre nepárne $k \in \mathbb{N}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k}$ neexistuje pre nepárne $k \in \mathbb{N}$	

Cvičenie 3.5. Vypočítajte limity funkcie:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{m)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} & \text{n)} \lim_{x \rightarrow 1} (1 + 5 \log x)^{\frac{1}{\log x}} & \text{o)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{5}{x}} \\
 \text{p)} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x) & \text{q)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{x} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) \\
 \text{s)} \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2} & \text{t)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2} - 1}{x-1} & \text{u)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{3^{2x} - 1} \\
 \text{v)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\text{tg}x} - 1}{x} & \text{w)} \lim_{x \rightarrow 0} x \text{ctg}x & \text{z)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}
 \end{array}$$

Cvičenie 3.6. Vypočítajte jednostranné limity funkcie f v bode a :

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}, \quad a = 1 & \text{b)} f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}, \quad a = 0 \\
 \text{c)} f(x) = \frac{5}{(x-2)^3}, \quad a = 2 & \text{d)} f(x) = \frac{1}{2 - 2^{1/x}}, \quad a = 0 \\
 \text{e)} f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1} & \text{pre } x < 0 \\ \frac{3x}{3x} & \text{pre } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & \text{pre } x \geq 2 \end{cases}, \quad a = -1, a = 0, a = 2
 \end{array}$$

Spojitosť funkcie jednej premennej

Definícia 3.5:

- **Funkcia je spojitá v bode $a \in D(f)$:** ak pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ takú, že $x_n \rightarrow a$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$
- **Funkcia je spojitá na množine M :** ak je spojitá v každom bode $a \in M$
- **Bod nespojitosti funkcie :** bod, v ktorom funkcia nie je spojitá

Bod $a \in D(f)$ môže byť hromadným alebo izolovaným bodom množiny $D(f)$ (t.j. existuje také jeho okolie, v ktorom neleží žiadny iný bod $D(f)$):

- funkcia f je vždy spojitá v izolovanom bode,
- ak a je hromadným bodom množiny $D(f)$, tak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Typ bodov nespojitosti:

Typ nespojitosti	Znázornenie
<p>Odstrániteľná nespojitosť: existuje vlastná $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ale nerovná sa $f(a)$</p>	
<p>Neodstrániteľná nespojitosť 1. druhu: neexistuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ale iba limita zprava a limita zľava a tieto sú vlastné a nerovnejú sa</p>	
Typ nespojitosti	Znázornenie
<p>Neodstrániteľná nespojitosť 2. druhu: buď existuje len nevlastná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, alebo neexistuje vôbec, len limita zprava a limita zľava a tieto sú (aspoň jedna) nevlastné</p>	

Vlastnosti spojitých funkcií:

- Každá elementárna funkcia je spojitá všade, kde je definovaná
- Súčet a súčin spojitých funkcií je spojitý
- Funkcia zložená zo spojitých funkcií je spojitá
- Inverzná funkcia spojitej funkcie je spojitá
- Ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, potom
 - je ohraničená na $\langle a, b \rangle$
 - nadobúda na $\langle a, b \rangle$ svoje maximum a minimum
 - pokiaľ $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$ (alebo opačne), tak existuje prvok $c \in \langle a, b \rangle$ taký, že $f(c) = 0$

Cvičenie 3.7. Zistite, kde sú spojité nasledujúce funkcie. Nájdite body nespojitosti a zistite ich typ:

$$\text{a) } f(x) = (x+3)^2 \sin \frac{1}{(x+3)^2} \quad \text{b) } f(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{c) } f(x) = \text{sgn}(x(1-x^2))$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^3 + 5x^2 + 6x} \quad \text{e) } f(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \quad \text{f) } f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{g) } f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & \text{pre } x < 0 \\ 2x-1 & \text{pre } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{h) } f(x) = \sqrt{x} \arctg \frac{1}{x} \quad \text{i) } f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

Cvičenie 3.8. Dokážte, že daná rovnica má na intervale I riešenie:

$$\text{a) } x^3 - x - 1 = 0 \quad I = \langle 1, 2 \rangle \quad \text{b) } x^3 - 6x^2 + \frac{1}{x} + 5 = 0 \quad I = \langle 1, 8 \rangle$$

$$\text{c) } e^x + x = 0 \quad I = \langle -1, 0 \rangle \quad \text{d) } \cos x - kx = 0, k \neq 0 \quad I = \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$\text{e) } \ln x - 3 + x = 0 \quad I = \langle 1, e \rangle \quad \text{f) } x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 7x - 8 = 0 \quad I = \langle 1.3, 1.4 \rangle$$

$$\text{g) } x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad I = \langle -1.1, -1 \rangle$$