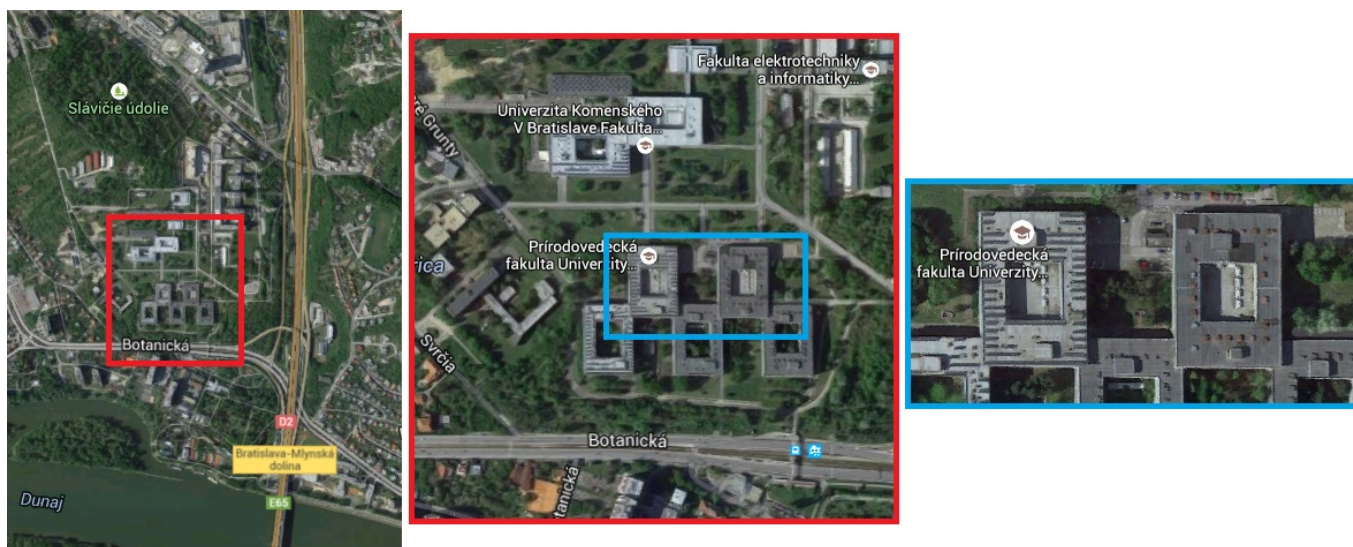


2. Matice a systémy lineárnych rovníc

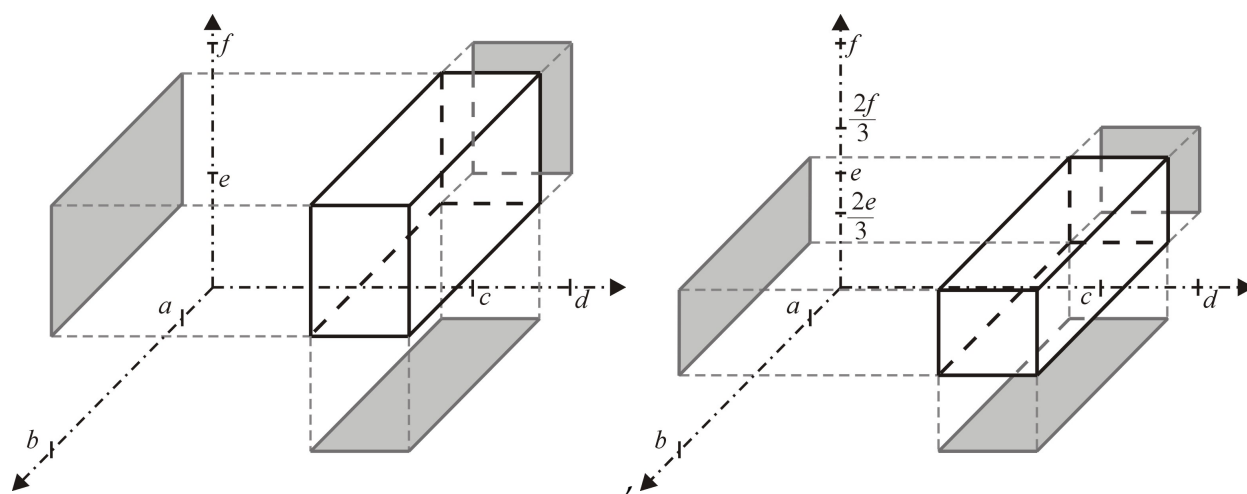


Obr. 1

Nech $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, f \rangle$ je kváder - obrázok 2., resp. 3. vľavo. Pomocou súčinu matíc

$$(x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

kde (x, y, z) sú súradnice ľubovoľného vrchola tohto kvádra, pôvodný kváder zväčšíme (ak $p > 1$) alebo zmenšíme (ak $0 < p < 1$) v smere osi z - obrázok 2. vpravo pre $p = \frac{2}{3}$.

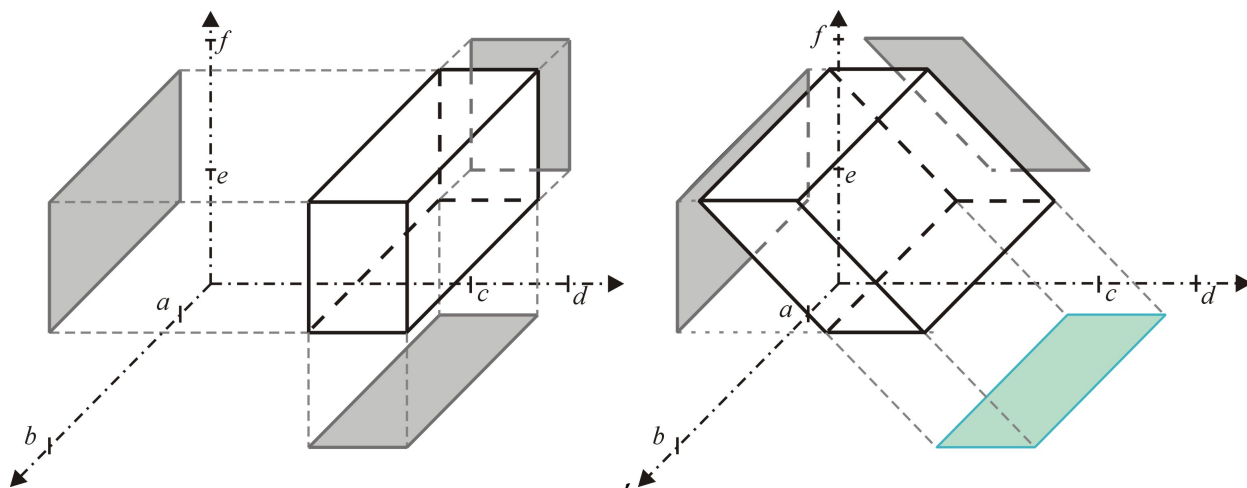


Obr. 2

Pomocou súčinu matíc

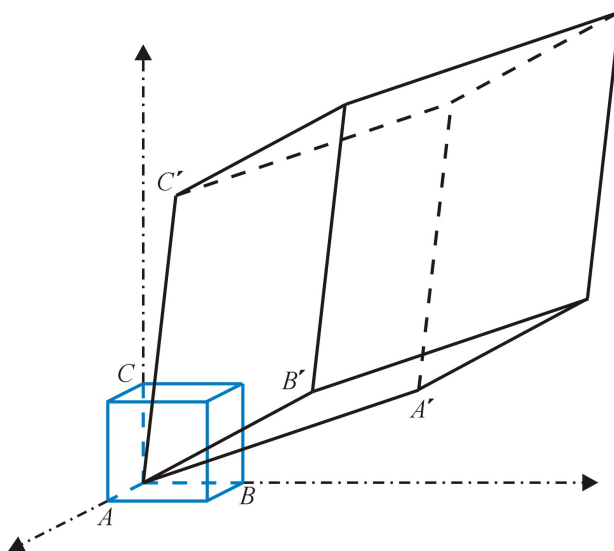
$$(x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde (x,y,z) sú súradnice ľubovoľného vrchola tohto kvádra, pôvodný kváder sa zdeformuje - obrázok 3. vpravo.



Obr. 3

Na obr. 4. je prípad, ak súradnice bodov jednotkovej kocky násobíme všeobecnou maticou.



Obr. 4

Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a $A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Definícia 2.1:

- **Matica typu $m \times n$:** schéma $m.n$ čísel zostavených do m riadkov a n stĺpcov
- **Prvky matice A :** a_{ij}
- **Riadky matice A :** $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$

- **Stĺpce matice A :** $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, \dots, n$

Typy matíc:

- **Štvorcová matica stupňa n :** matica typu $m \times n$, kde $m = n$, t.j. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- **Nulová matica** - (ozn. O): matica, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$
- **Diagonálna matica** : štvorcová matica stupňa n , v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, a v ktorej aspoň jeden prvok $a_{ii} \neq 0$
- **Jednotková matica** - (ozn. I): diagonálna matica, pre ktorú $a_{ii} = 1$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$
- **Symetrická matica** : štvorcová matica stupňa n , v ktorej $a_{ij} = a_{ji}$ pre všetky $i, j = 1, 2, \dots, n$
- **Trojuholníková matica** : matica typu $m \times n$, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i > j$

Cvičenie 2.1. Zistite typ nasledujúcich matíc a nájdite, ktoré z nich sú štvorcové, nulové, diagonálne, jednotkové, symetrické a trojuholníkové.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ h) $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ i) $I = (0 \ 0)$

Operácie s maticami:

- **Rovnosť matic A a B** - (ozn. $A = B$): matice sú rovnakého typu a všetky prvky sa rovnajú, t.j. ak $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ a $a_{ij} = b_{ij}$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$
- **Súčet matic A a B** - (ozn. $A + B$): !!! matice musia byť rovnakého typu, teda ak $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, potom $A + B = C = (c_{ij})_{m \times n}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$
- **Násobok matice A s nenulovým číslom α** - (ozn. αA): $\alpha A = C = (c_{ij})_{m \times n}$, kde $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ (A a C sú matice rovnakého typu)
- **Súčin matic A a B** - (ozn. $A \cdot B$): ak $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times k}$ (!!! počet stĺpcov matice A musí byť totožný s počtom riadkov matice B), potom $A \cdot B = C = (c_{ij})_{m \times k}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Definícia 2.2:

- **Podmatice matice A** - (ozn. A_{ij}): matica, ktorá vznikne z A vynechaním i -tého riadku a j -tého stĺpca

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)k} \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{ik} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m(j-1)} & a_{mj} & a_{m(j+1)} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)k} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m(j-1)} & a_{m(j+1)} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} = A_{ij}$$

$$(m-1) \times (k-1)$$

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte $A_{12} \cdot A_{34}$!

Riešenie:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} \cdot A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 5 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 8 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 84 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix}$$

Definícia 2.3:

- **Determinant matice A** - (ozn. $\det A$ alebo $|A|$): číslo, ktoré dostaneme z prvkov danej štvorcovej (!!!!) matice A stupňa n nasledujúcim spôsobom:

- ak A je matica stupňa 1, t.j. $A = a_{11}$, tak $\det A = a_{11}$

- ak A je matica stupňa 2, t.j. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tak

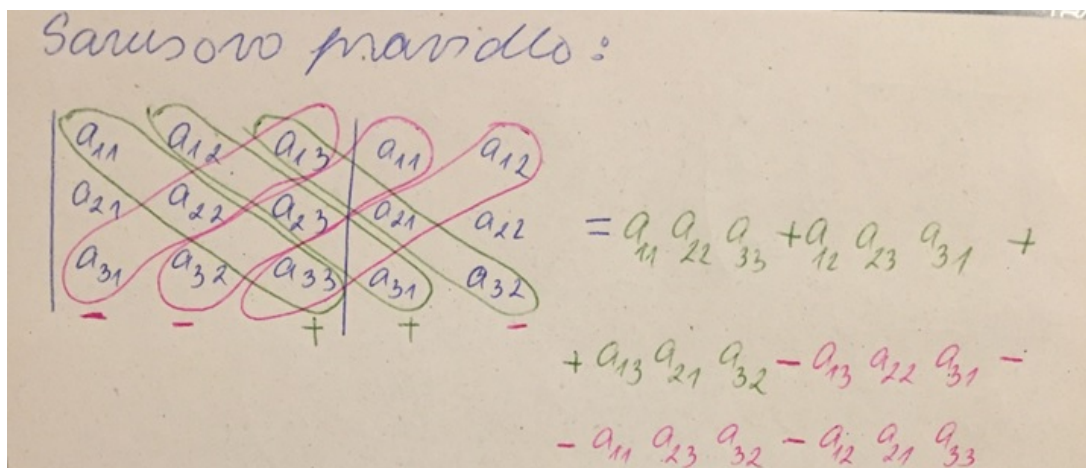
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- ak A je matica stupňa 3, t.j. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tak determinant možno počítať

tzv. **Sarusovým pravidlom** (!!!platí iba pre determinant matice tretieho stupňa!!):

$$\det A = \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



- ak A je matica stupňa $n \geq 2$, na výpočet $\det A$ možno použiť tzv. **Laplaceov rozvoj**, z čoho existujú dva typy:

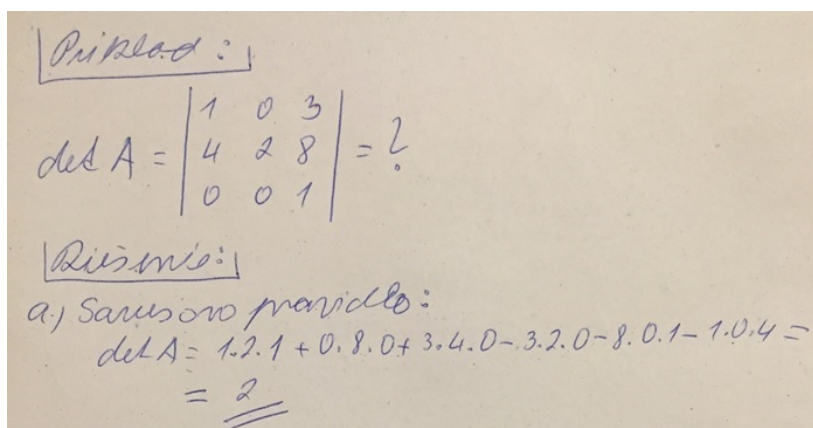
Laplaceov rozvoj podľa i -tého riadku:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

Laplaceov rozvoj podľa j -tého stĺpca:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|,$$

pričom A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sú podmatice matice A definované v Definicie 2.2.



b.) Laplaceov rozvoj podľa 2. riadku:

$$\det A = (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4) \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 8 \cdot 0 = \underline{\underline{2}}$$

Laplaceov rozvoj podľa 3. riadku:

$$\det A = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{2}}$$

Laplaceov rozvoj podľa 2. stĺpca:

$$\det A = (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \underline{\underline{2}}$$

Cvičenie 2.2. Zistite súčet matíc z cvičenia 2.1., ktoré možno sčítať a zistite aj typ výslednej matice? Zistite súčin matíc z cvičenia 2.1., ktoré možno vynásobiť a zistite aj typ výslednej matice?

Cvičenie 2.3. Napíšte podmatice A_{12} , A_{22} , A_{31} , A_{14} matice A a vypočítajte súčiny $A_{12}A_{22}$, $A_{31}A_{14}$, $A_{12}A_{12}$, $A_{22}A_{31}$, $A_{22}A_{22}$, ak $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Cvičenie 2.4. Vypočítajte determinanty

- podmatíc A_{12} , A_{22} , A_{31} , A_{14} matice A z cvičenia 2.3.
- súčinov $A_{12}A_{22}$, $A_{31}A_{14}$, $A_{22}A_{31}$ podmatíc z cvičenia 2.3.

Cvičenie 2.5. Vypočítajte determinant matice A z cvičenia 2.3. pomocou Laplaceovho rozvoja

- podľa 1. riadku
- podľa 3. riadku
- podľa 4. riadku
- podľa 1. stĺpca
- podľa 3. stĺpca
- podľa 4. stĺpca.

Cvičenie 2.6. Zistite determinanty nasledujúcich matíc:

- $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 15 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$$g) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$j) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$k) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$l) \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definícia 2.4:

- **Regulárna matica** : štvorcová matica A , pre ktorú platí, že $\det A \neq 0$
- **Singulárna matica** : štvorcová matica A , pre ktorú platí, že $\det A = 0$
- **Hodnosť matice A** - (ozn. $h(A)$) : číslo, ktoré udáva počet nenulových lineárnych nezávislých riadkov matice (t.j. ak žiadny z nich sa nedá zapísať ako súčet konštantných násobkov iných riadkov)
- **Elementárne riadkové operácie** - (ozn. ERO): úpravy matíc, ktoré neovplyvnia hodnosť príslušnej matice, t.j.:
 - vzájomná výmena dvoch riadkov
 - vynásobenie riadku nenulovým číslom
 - pripočítanie ľubovoľného riadku k inému riadku
- **Ekvivalentné matice** - (ozn. $A \sim B$) : ak jedna matica vznikne z druhej iba pomocou ERO

Metódy zistenia hodnosti matíc :

- 1) pomocou ERO previesť maticu A na trojuholníkovú maticu, potom počet nenulových riadkov zadá hodnosť matice, t.j. $h(A)$
- 2) ak A je regulárna matica stupňa n , tak $h(A) = n$ a maticu A možno previesť pomocou ERO na diagonálnu maticu
- 3) ak A je singulárna matica stupňa n , tak $h(A) < n$ a maticu A možno previesť pomocou ERO na trojuholníkovú maticu

$$P_{r1} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h(B) = 2$$

Pr 2

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \\ -8 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-7) \uparrow, \cdot 5 \downarrow} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ -8 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-8) \uparrow, \cdot 5 \downarrow} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & -6 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(A) = 2$$

$\det A = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \\ -8 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rk}(A) < 3$ a teda je $\text{rk} = 2$.

Pr 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-2) \uparrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-1) \uparrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-3) \downarrow} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(A) = 3$$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow \text{rk}(A) = 3$ a teda aj platí!

Cvičenie 2.7. O ktorých maticiach má zmysel zisťovať, či sú regulárne alebo singularné? O ktorých možno, tak aj zistite! Okrem toho preved'te všetky matice na trojuholníkovú, resp. diagonálnu maticu a zistite ich hodnoty:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -9 \\ 0 & -15 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 8 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -19 & 5 & 0 \\ 3 & 15 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -19 & 5 & 0 \\ 3 & 15 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{j)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{k)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{l)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Systémy lineárnych rovníc

Definícia 2.5:

- **Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi** : systém nasledujúcich rovníc

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}$$

- **Koeficienty systému** : a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$
- **Absolútne členy systému** : b_i , $i = 1, 2, \dots, m$
- **Neznáme systému** : x_j , $j = 1, 2, \dots, n$
- **Riešenie systému** : n -tica čísel (r_1, r_2, \dots, r_n) , z ktorých po dosadení r_1 do x_1 , \dots , r_n do x_n do systému dostaneme m správnych rovností

Systém možno písať aj v maticovom tvare:

$$A \cdot X = B,$$

kde

- **matica koeficientov systému** : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$

- **matica neznámych systému** : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$

- **matica absolútnych členov systému** : $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$

Definícia 2.6:

- **Rozšírená matica systému** : $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$
- **Homogénny systém** : ak $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$
- **Nehomogénny systém** : ak existuje aspoň jeden absolútny člen b_i systému, ktorý nie je nulový
- **Ekvivalentné systémy** : dva systémy sú ekvivalentné, ak každé riešenie prvého systému je riešením aj druhého a naopak

Ekvivalentné systémy môžeme dostať **elementárnymi úpravami** pôvodného systému:

- vzájomná výmena dvoch rovníc v systéme
- vynásobenie ľubovoľnej rovnice systému nenulovým číslom
- pripočítanie k ľubovoľnej rovnici inú rovnicu systému

Vlastnosti riešenia homogénnych systémov lineárnych rovníc:

- Vždy má aspoň jedno riešenie, a to tzv. **triviálne**, t.j. nulové.
- Homogénny systém má nenulové riešenie práve vtedy, ak $h(A)$ je menšia ako počet neznámych.
- V prípade, že máme maticu koeficientov štvorcovú, t.j. počet premenných sa rovná počtu rovníc v systéme, tak homogénny systém má nenulové riešenie práve vtedy, ak A je singularnou maticou.

Metódy riešenia nehomogénnych systémov lineárnych rovníc:

- 1) **Gaussova eliminačná metóda** : spočíva v tom, aby rozšírenú maticu $(A|B)$ systému upravili pomocou ERO tak, aby po úprave dostali trojuholníkovú maticu, t.j.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n-1} & \tilde{a}_{1n} & c_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n-1} & \tilde{a}_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{n-1n-1} & \tilde{a}_{n-1n} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{nn} & c_n \end{array} \right) \sim$$

$$\dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & r_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & r_n \end{array} \right)$$

alebo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-11} & a_{m-12} & \dots & a_{m-1n-1} & a_{m-1n} & b_{m-1} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn-1} & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n-1} & \hat{a}_{1n} & \hat{c}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n-1} & \hat{a}_{2n} & \hat{c}_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{rn} & \hat{c}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \hat{c}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \hat{c}_m \end{array} \right)$$

Vlastnosti riešenia nehomogénnych systémov lineárnych rovníc:

VNHS1: riešenie systému s regulárnou štvorcovou maticou koeficientov je n -tica (r_1, r_2, \dots, r_n)

VNHS2: v prípade, že matica koeficientov nie je štvorcová, tak môžu nastať nasledujúce prípady

- ak existuje $j \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$, pre ktoré $\hat{c}_j \neq 0$, tak systém nemá riešenie
- ak pre všetky $j \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$ je $\hat{c}_j = 0$ a $r = n$, tak systém má práve jedno riešenie
- ak pre všetky $j \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$ je $\hat{c}_j = 0$ a $r < n$, tak systém má nekonečne veľa riešení, počet parametrov je $n - h(\hat{A})$

Gaussova eliminačná metóda:

P11

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ -x + 3y + 2z = 3 \\ 2x - y + 4z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 8 \\ -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 2 & -1 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 3 & 2 & -1 & | & 8 \\ 2 & -1 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 11 & 5 & | & 17 \\ 0 & 5 & 8 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 11 & 5 & | & 17 \\ 0 & 0 & 63 & | & -63 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 0 & 11 & 5 & | & 17 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y+2z &= -6 \\ 2x-y-z &= 4 \\ 3x+y-z &= 9 \\ 5x+2y &= 9 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & 36 \\ 0 & 0 & -13 & 52 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ y + 2z = -6 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 - (-4) = 4 \Rightarrow x = 1 \\ y + 2(-4) = -6 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (1, 2, -4)$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 - 13x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -13 & 7 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -16 & 8 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

nekonečne veľa riešení. Budeme mať 2 parametre
 napr. $x_3 = a, x_4 = b \Rightarrow 5x_2 - 8a + 4b = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1+8a-4b}{5} \Rightarrow x_1 - 2 \cdot \frac{1+8a-4b}{5} + 3a - b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2+a-3b}{5} \Rightarrow \text{napr. ak } a=5, b=0$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{7}{5}, \frac{41}{5}, 5, 0 \right)$$

 napr. ak $a=0, b=1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 0, 1 \right)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 8x_2 - 13x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -13 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -16 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

\Rightarrow ~~řešenie~~

2) **Cramerovo pravidlo**: ak A je regulárna štvorcová matica koeficientov systému, tak systém má jediné riešenie, a to n -ticu (r_1, r_2, \dots, r_n) , kde

$$r_1 = \frac{D_1}{\det A}, \quad r_2 = \frac{D_2}{\det A}, \quad \dots \quad r_n = \frac{D_n}{\det A},$$

pričom D_i , $i = 1, 2, \dots, n$ je determinant matice, v ktorej sme nahradili i -tý stĺpec matice A stĺpcom absolútnych členov

Cramerovo pravidlo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 28 + 20 - 45 - 24 - 25 + 42 = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow A$ je regulárna matica

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 10 & -4 & 5 \\ -9 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -140 - 90 - 150 + 108 + 125 + 140 = -7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 2 & -9 & -7 \end{vmatrix} = -70 - 50 + 81 + 60 + 45 - 105 = -39$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & 10 \\ 2 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 36 + 40 - 75 - 40 - 50 + 54 = -35$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{\det A} = \frac{-7}{-4} \\ x_2 = \frac{D_2}{\det A} = \frac{-39}{-4} \\ x_3 = \frac{D_3}{\det A} = \frac{-35}{-4} \end{cases}$$

Cvičenie 2.8. Riešte nasledujúce systémy pomocou všetkých metód, ktoré možno aplikovať na príslušný príklad:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d)} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e)} \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10 \\ 5x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{f)} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{g)} \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{h)} \\ 7x_1 + 14x_2 - 21x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{i)} \\ 6x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{j)} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{k)} \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 8x_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{l)} \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{m)} \\ x_1 - 3x_2 - 26x_3 + 22x_4 = 0 \\ x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{n)} \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 = -6 \end{array}$$