1. Základné vlastnosti reálnych čísel

Definícia 1.1: Číselnou množinou nazývame takú množinu, ktorej všetky prvky sú čísla.

Definícia 1.2: Základné číselné množiny sú

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ - **množina všetkých prirodzených čísel**
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - **množina všetkých celých čísel**
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - **množina všetkých racionálnych čísel**, t.j. racionálne čísla sú všetky čísla, ktoré je možné vyjadriť ako podiel celého a prirodzeného čísla
- $\mathbb{I}$ - **množina všetkých iracionálnych čísel** (napr. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π)
- $\mathbb{R}$ - **množina všetkých reálnych čísel**

Vlastnosti základných číselných množín:

- Súčet a súčin prirodzených čísel je prirodzené číslo.
- Celé čísla sú všetky čísla, ktoré môžeme vyjadriť ako rozdiel dvoch prirodzených čísel.
- Súčet, súčin a rozdiel celých čísel je celé číslo.
- Súčet, rozdiel, súčin a podiel racionálnych čísel (okrem delenia nulou) je racionálne číslo.
- Zjednotenie množiny racionálnych a iracionálnych čísel tvorí množinu reálnych čísel.
- Medzi jednotlivými číselnými množinami platí nasledujúci vzťah:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \qquad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}, \qquad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Základné vlastnosti množiny všetkých reálnych čísel:

- Je usporiadaná: pre každé dve reálne čísla a, b platí práve jeden zo vzťahov:

$$a = b, \qquad a < b, \qquad b < a.$$

- Je všade hustá: medzi dvoma ľubovoľnými rôznymi reálnymi číslami a, b, pre ktoré platí $a < b$, existuje aspoň jedno reálne číslo c, pre ktoré platí: $a < c < b$.
- Je uzavretá vzhľadom na operácie súčtu, súčinu, rozdielu a podielu t.j. súčet, súčin, rozdiel a podiel reálnych čísel je reálne číslo.
- Množinu $\mathbb{R}$ možno jednojednoznačne zobraziť na číselnej osi t.j. každému reálnemu číslu možno priradiť jediný bod na číselnej osi a naopak.

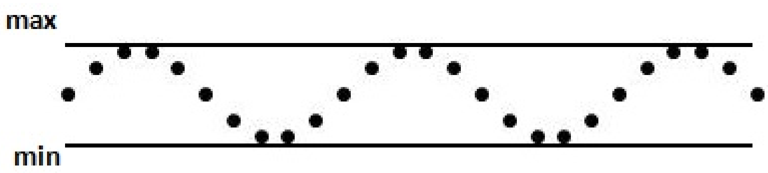
Definícia 1.3:

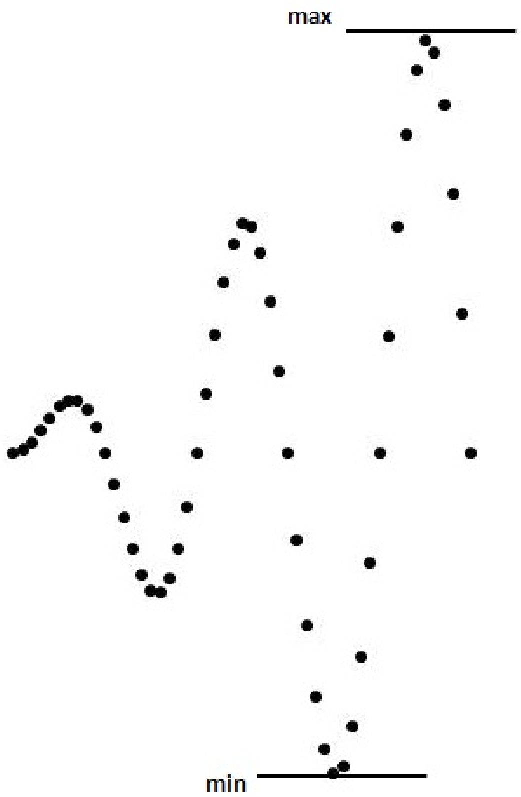
- **Horné ohraničenie číselnej množiny** M **:** je to číslo $k \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky prvky x množiny M platí nerovnosť $x \leq k$

- **Zhora ohraničená množina :** množina, ktorá má horné ohraničenie
- **Dolné ohraničenie číselnej množiny** M **:** je to číslo $l \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky prvky x množiny M platí nerovnosť $x \geq l$
- **Zdola ohraničená množina :** množina, ktorá má dolné ohraničenie
- **Ohraničená množina :** množina, ktorá je aj zdola aj zhora ohraničená

Vlastnosti ohraničenej množiny :

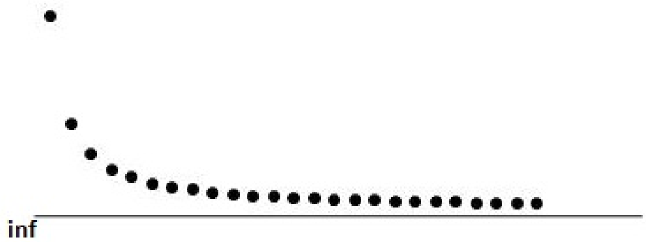
- Ak množina M má horné ohraničenie, tak ich má nekonečne veľa.
- Ak množina M má dolné ohraničenie, tak ich má nekonečne veľa.

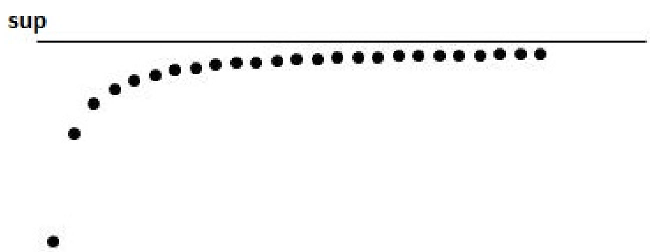




Definícia 1.4:

- **Maximum množiny** M **-** (ozn. $\max M = b$): $b \in M$ také, že $\forall x \in M$ platí, že $x \leq b$
- **Suprémum množiny** M **-** (ozn. $\sup M = \beta$): najmenšie horné ohraničenie
- **Minimum množiny** M **-** (ozn. $\min M = a$): $a \in M$ také, že $\forall x \in M$ platí, že $x \geq a$
- **Infímum množiny** M **-** (ozn. $\inf M = \alpha$): najväčšie dolné ohraničenie





Vlastnosti supréma a infíma:

- Každá neprázdna, zdola ohraničená množina má infímum.
- Každá neprázdna, zhora ohraničená množina má suprémum.
- Ak $\sup M$, resp. $\inf M$ patrí do množiny M, tak $\sup M = \max M$, resp. $\inf M = \min M$.

Definícia 1.5:

- **Otvorený interval :** $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$
- **Uzavretý interval :** $\langle a,b \rangle = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}$
- **Zľava otvorený interval :** $(a,b\rangle = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\}$
- **Zprava otvorený interval :** $\langle a,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\}$
- **Neohraničené intervaly :** $\langle a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x\}$, $\quad (a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x\}$

$$(-\infty,b\rangle = \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq b\}, \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ x < b\}, \quad (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

Definícia 1.6: Absolútna hodnota reálneho čísla $a \in \mathbb{R}$ **-** (ozn. $|a|$): $|a| = \begin{cases} a & \text{pre } a \geq 0 \\ -a & \text{pre } a < 0 \end{cases}$

Vlastnosti absolútnej hodnoty:

- pre kladnú konštantu c platí, že $|a| \leq c \ \Leftrightarrow\ -c \leq a \leq c$
- $|a|$ je vždy nezáporná (t.j. $|a| \geq 0$) pre ľubovoľnú $a \in \mathbb{R}$
- $|a| = 0 \ \Leftrightarrow\ a = 0$
- $|a.b| = |a|.|b|$, $\quad \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ pre $b \neq 0$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$, $\quad |a-b| \leq |a| + |b|$, $\quad |a| - |b| \leq |a-b|$

Definícia 1.7:

- **Okolie bodu** $c \in \mathbb{R}$ **-** (ozn. $O(c)$): každý interval (a,b), ktorý obsahuje bod c
- **Symetrické okolie bodu** $c \in \mathbb{R}$ **-** (ozn. $O_\delta(c)$): $O_\delta(c) = \left\{x \in \mathbb{R} :\ |x-c| < \delta\right\} =$
$= \left\{x \in \mathbb{R} :\ c-\delta < x < c+\delta\right\}$
- **Okolie bodu** ∞ **:** neohraničený interval (l,∞), kde l je ľubovoľné reálne číslo
- **Okolie bodu** $-\infty$ **:** neohraničený interval $(-\infty,k)$, kde k je ľubovoľné reálne číslo