

4. Funkcie jednej premennej

4.1. Nájdite definičné obory funkcií $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$, $h(x) = \frac{x^2+2x}{x-x^2}$,
 $i(x) = \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$, $j(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$, $k(x) = \sqrt{|x-1|-2}$, $l(x) = \frac{1}{|x|-3}$,
 $m(x) = \frac{2}{\sqrt{1-|x+1|}}$. Nájdite hodnoty týchto funkcií v bode $x = 5$.

4.2. Nájdite supremum, infimum, maximum a minimum nasledujúcich množín:

$$A = \{-1; 25; -9; 0; 2\}, \quad B = \langle -5, \infty \rangle, \quad C = (-\infty, 1), \quad D = \langle -1, 9 \rangle, \quad E = \left\{ \frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$F = \left\{ \frac{n+3}{n+4}; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad G = \{0, 3; 0, 33; 0, 333; \dots\}, \quad H = \left\{ (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1}; n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$I = \left\{ (-1)^n; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad J = \left\{ \frac{2x^2}{x^2+1}; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.3. Zistite, či sa rovnajú funkcie

a) $f(x) = 1, g(x) = \frac{x}{x}$	b) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x}{x^2}$
c) $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2, h(x) = \sqrt{x^2}$	d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, g(x) = x+1$
e) $f(x) = x , g(x) = x$	f) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, g(x) = \operatorname{ctg} x$
g) $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2), g(x) = \ln(x+2)(x-2)$	
h) $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2), g(x) = \ln \frac{x+2}{x-2}$	
i) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}, g(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt{x^2}}, h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$	

4.4. Načrtnite graf uvedenej funkcie, určte jej definičný obor, obor hodnôt, základné vlastnosti (intervaly monotónnosti, ohraničenosť, maximum/minimum, párnosť/nepárnosť, periodičnosť, injektívnosť):

a) $y = 5 - 2x$	b) $y = x^2 + 2x - 3$	c) $y = -2x^2$
d) $y = (x-1)^3 + 2$	e) $y = x-1 $	f) $y = x - 1$
g) $y = \ln x $	h) $y = \ln x $	i) $y = \frac{1}{x+3}$
j) $y = \frac{1}{x} + 3$	k) $y = \frac{2x-2}{x+3}$	l) $y = 3^{x-1} - 2$
m) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 2$	n) $y = 3 - \log_2 x,$	o) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$
p) $y = \ln(5x)$	q) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$	r) $y = \sin x - \frac{\pi}{2}$
s) $y = 2 \sin x$	t) $y = \sin x ,$	u) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$
v) $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$	w) $y = \operatorname{tg} x ,$	z) $y = 2 - \operatorname{ctg} x$

4.5. Nájdite inverzné funkcie k funkciám z príkladu 4.4. a), d), i), j), k), l), m), n), o), p).

4.6. Overte, či platí:

a) $\inf\{2x^2 + 6x + 4; x \in \mathbb{R}\} = 1$

b) $\sup\{1 + 4x - x^2; x \in \mathbb{R}\} = 6$

c) $\inf\{x^2 + 4x + 6; x \in \mathbb{R}\} = 3$

d) $\sup\{6 - 6x - x^2; x \in \mathbb{R}\} = 20$

Nájdite (pokiaľ neplatí tvrdenie vyššie) supremum, infimum, maximum a minimum týchto množín.

4.7. Nájdite $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$, ak

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \sin x$

c) $f(x) = 2 \ln x$, $g(x) = x^3 - 2$

d) $f(x) = 1 + e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$

e) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \operatorname{tg} x$

4.8. Vypočítajte limity postupnosti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 5n^2 + 6)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right)^3$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(\frac{2}{n^2} - 3\right)^2 \right]$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 3n + 2}{2n^4 - 3n^3 + n}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 3}}{n - 2}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + \sqrt{n^3 + 3}}{n^2 + n - 2}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n + 2} - \frac{n^2}{n + 3} \right)$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n + 1} - 2n \right)$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2}}{n + 1}$

n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^n$

o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 3}{n} \right)^{\frac{n}{2}}$

p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 1}{2n + 1} \right)^n$

q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2 - 1}$

r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 2}{3n + 1} \right)^{5n - 3}$

s) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - 3^n}{2 \cdot 3^n + 3}$

t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

u) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{1 + 4^n}$

v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{2^n}$

w) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^3} - \frac{10 \sin(2n)}{9n - 3\sqrt{n}} \right)$

z) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{\cos n}{n} \right)$

4.9. Vypočítajte limity funkcie:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right)$

$$\begin{array}{lll}
\text{d)} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x} \right) & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2} \\
\text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} \\
\text{j)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{k)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} & \text{l)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \\
\text{m)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} & \text{n)} \lim_{x \rightarrow 1} (1 + 5 \log x)^{\frac{1}{\log x}} & \text{o)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{5}{x}} \\
\text{p)} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x) & \text{q)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{x} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) \\
\text{s)} \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2} & \text{t)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2} - 1}{x-1} & \text{u)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{3^{2x} - 1} \\
\text{v)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 1}{x} & \text{w)} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x & \text{z)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}
\end{array}$$

4.10. Pomocou vzorca $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$ vypočítajte limity:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+2)(n+3)} - n) & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} \\
\text{d)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x+2} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x^3} - 8} \\
\text{g)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-9}) & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}
\end{array}$$

4.11. Vypočítajte jednostranné limity funkcie f v bode a :

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}, \quad a = 1 & \text{b)} f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}, \quad a = 0 \\
\text{c)} f(x) = \frac{5}{(x-2)^3}, \quad a = 2 & \text{d)} f(x) = \frac{1}{2 - 2^{1/x}}, \quad a = 0 \\
\text{e)} f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1} & \text{pre } x < 0 \\ 3x & \text{pre } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & \text{pre } x \geq 2 \end{cases}, \quad a = -1, a = 0, a = 2
\end{array}$$

4.12. Zistite, kde sú spojité nasledujúce funkcie. Nájdite body nespojitosti a zistite ich typ:

a) $f(x) = (x+3)^2 \sin \frac{1}{(x+3)^2}$

b) $f(x) = e^{-1/x^2}$

c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x(1-x^2))$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^3 + 5x^2 + 6x}$

e) $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$

f) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & \text{pre } x < 0 \\ 2x-1 & \text{pre } x \geq 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

i) $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$

4.13. Dokážte, že daná rovnica má na intervale I riešenie:

a) $x^3 - x - 1 = 0 \quad I = \langle 1, 2 \rangle$

b) $x^3 - 6x^2 + \frac{1}{x} + 5 = 0 \quad I = \langle 1, 8 \rangle$

c) $e^x + x = 0 \quad I = \langle -1, 0 \rangle$

d) $\cos x - kx = 0, k \neq 0 \quad I = \langle -\pi, \pi \rangle$

e) $\ln x - 3 + x = 0 \quad I = \langle 1, e \rangle$

f) $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 7x - 8 = 0 \quad I = \langle 1.3, 1.4 \rangle$

g) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad I = \langle -1.1, -1 \rangle$