1. Základné pojmy z logiky a teórie množín

1.1. Rozhodnite, ktorý z uvedených výrazov sú výroky:

a) Včera som bol v kine.
b) 3.3=10
c) Počítaj!
d) 4-2=2
e) Koľko je hodín?
f) 25.2
g) 4x+8=0
h) Včera pršalo?
i) Včera pršalo.
j) Nebezpečenstvo úrazu.
k) Pomoc!
l) Číslo 4 je nepárne.
m) 4(x-2)=x-6
n) Zajtra bude pršať.
o) Mlieko je tekutina.

1.2. Vytvorte negáciu výrokov:

a) Všetky zvieravá majú 4 nohy.
b) 3 < 5
c) Dva plus dva nerovná sa deviatim.
d) Všetky reálne čisla sú kladné.
e) $\forall x \in \mathbb{R}: \ x > 1$
f) $\exists x \in \mathbb{R}: \ x > 1$
g) $\forall x \in \mathbb{R}: \ x = 3$
h) $\nexists x \in \mathbb{R}: \ x \neq 3$
i) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{N}: \ x \leq y$
j) $\nexists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{N}: \ x \geq y$

1.3. Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie a ktoré kontraindikácie:

a) $(A \Rightarrow B) \vee \neg(A \wedge B)$
b) $(A \vee B) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow A)$
c) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
d) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
e) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
f) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

1.4. Nech množina $A = \{1,2,4,5,7,8,12\}$ a $B = \{1,3,6,7,9,10,11,12\}$. Určte množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

1.5. Nech A je množina všetkých ľudí žijúcich na Slovensku starších ako 20 rokov a B množina všetkých ľudí žijúcich v Bratislave mladších ako 30 rokov. Zistite, čo predstavujú množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

1.6. Nech A je množina všetkých prirodzených čísel menších ako 16, nech A_2 je podmnožina množiny A, ktorá obsahuje všetky párne čísla, A_3 je podmnožina množiny A, ktorá obsahuje všetky čísla deliteľné troma, A_5 je podmnožina množiny A, ktorá obsahuje všetky čísla deliteľné piatimi. Zistite, čo predstavujú množiny:

a) $A_2 - A_3$, $A_2 - A_5$, $A_3 - A_5$
b) $A_3 - A_2$, $A_5 - A_2$, $A_5 - A_3$
c) $A_2 \cup A_3$, $A_2 \cup A_5$, $A_3 \cup A_5$
d) $A_2 \cap A_3$, $A_2 \cap A_5$, $A_3 \cap A_5$
e) $A_2 \cup A_3 \cup A_5$, $A_2 \cap A_3 \cap A_5$
f) $(A_2 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_5)$
g) $(A_2 \cup A_3) - (A_2 \cap A_3)$
h) $(A_2 \cup A_3) \cap (A_3 \cup A_5)$

1.7. Nech množina $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{x,y,z\}$ a $C = \{3,4,a,x,y\}$. Napíšte všetky prvky množiny $A \times B$, $A \times C$, $C \times B$, $B \times A$.

2. Základy lineárnej algebry

2.1. Zistite typ nasledujúcich matíc a nájdite, ktoré z nich sú štvorcové, nulové, diagonálne, jednotkové, symetrické a trojuholníkové.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e) $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ i) $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2. Zistite súčet matíc z príkladu 2.1., ktoré možno sčítať a zistite aj typ výslednej matice? Zistite súčin matíc z príkladu 2.1., ktoré možno vynásobiť a zistite aj typ výslednej matice? Utvorte transponované matice k maticiam z príkladu 2.1.

2.3. Pre aké x, y, z, u platí rovnosť matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, ak

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2x+5y & 4 \\ 9 & 2y+1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 12x+9 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2x+3 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 10x+1 & 2y+3 & 6 & 8 \\ 8 & 6z+2 & 3u & 4 \end{pmatrix}$

2.4. Nájdite maticu

a) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -9 & 2 & -5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^T - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b) $$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -9 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$$

2.5. Nájdite maticu $\boldsymbol{X}$, pre ktorú platí, že

a) $$\boldsymbol{X} + 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \boldsymbol{X} = -4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.6. Napíšte podmatice A_{12}, A_{22}, A_{31}, A_{14} matice A a vypočítajte súčiny $A_{12}A_{22}$, $A_{31}A_{14}$, $A_{12}A_{12}$, $A_{22}A_{31}$, $A_{22}A_{22}$, ak $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2.7. Vypočítajte determinanty

a) podmatíc A_{12}, A_{22}, A_{31}, A_{14} matice A z príkladu 2.6.

b) súčinov $A_{12}A_{22}$, $A_{31}A_{14}$, $A_{22}A_{31}$ podmatíc z príkladu 2.6.

c) matíc, ktoré sú transponovanými maticami k maticiam A_{12}, A_{22}, A_{31}, A_{14} z príkladu 2.6.

d) presvedčte sa o platnosti $\det(X.Y) = \det X.\det Y$, kde X a Y sú matite z časti b) toho príkladu

e) presvedčte sa o platnosti $\det(X^T) = \det X$, kde X je matica z časti a) a c) toho príkladu.

2.8. Vypočítajte determinant matice A z príkladu 2.6. pomocou Laplaceovho rozvoja

a) podľa 1. riadku
b) podľa 3. riadku
c) podľa 4. riadku
d) podľa 1. stĺpca
e) podľa 3. stĺpca
f) podľa 4. stĺpca.

2.9. Bez použitia Laplaceovho rozvoja zistite determinanty nasledujúcich matíc:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 15 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
f) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
h) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
i) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
k) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
l) $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Návod: využite vlastnosti determinantov VD1-VD8 a maticu A, resp. jej determinant z príkladu 2.6., resp. 2.8.

2.10. O ktorých maticiach má zmysel' zisťovat', či sú regulárne alebo singulárne? O ktorých možno, tak aj zistite! Okrem toho preveďte všetky matice na trojuholníkovú, resp. diagolánu maticu a zistite ich hodnosť:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -9 \\ 0 & -15 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 8 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -19 & 5 & 0 \\ 3 & 15 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -19 & 5 & 0 \\ 3 & 15 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

2.11. Zistite inverzné matice k maticiam z príkladu 2.10., ku ktorým sa vôbec dá!

2.12. Riešte nasledujúce systémy pomocou všetkých metód, ktoré možno apkilovat' na príslušný príklad:

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ 5x_1 + 12x_2 + 6x_3 &= 29 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 7x_1 + 14x_2 - 21x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 3 \end{aligned}$

i) $$\begin{aligned} 6x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 &= 1 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

m) $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 26x_3 + 22x_4 &= 0 \\ x_1 - 8x_3 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

n) $$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 2x_2 &= -6 \end{aligned}$$

3. Základy vektorovej algebry

3.1. Nájdite súradnice, veľkosť a jednotkové vektory vektorov $\overrightarrow{a} = A - C$ a $\overrightarrow{b} = B - C$, ak

a) $A = [3,0]$, $B = [-2,5]$, $C = [6,1]$

b) $A = [1,2,3]$, $B = [2,-2,-6]$, $C = [-3,0,3]$.

3.2. Dané sú vektory $\overrightarrow{a} = (2,3)$, $\overrightarrow{b} = (3,2,2)$, $\overrightarrow{c} = (1,0,7)$, $\overrightarrow{d} = (3,-1)$, $\overrightarrow{e} = (2,5)$, $\overrightarrow{f} = (4,5,-9)$. Nájdite súradnice a veľkosť vektorov (pokiaľ existujú), ak

a) $3\overrightarrow{a} - 7\overrightarrow{d} + 2\overrightarrow{e}$ b) $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{f}$

c) $2\overrightarrow{b} - 5\overrightarrow{d} - 2\overrightarrow{c}$ d) $3(\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}) - \frac{1}{7}\overrightarrow{f} + 2(\overrightarrow{c} - 3\overrightarrow{f})$.

3.3. Dokážte, že vetkory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ sú lineárne nezávislé a vyjadrite vektor $\overrightarrow{c}$ ako ich lineárnu kombináciu, ak

a) $\overrightarrow{a} = (3,-5)$, $\overrightarrow{b} = (-4,7)$, $\overrightarrow{c} = (10,3)$,

b) $\overrightarrow{a} = (1,0)$, $\overrightarrow{b} = (0,1)$, $\overrightarrow{c} = (10,-3)$,

c) $\overrightarrow{a} = (2,3)$, $\overrightarrow{b} = (7,-2)$, $\overrightarrow{c} = (3,4)$,

d) $\overrightarrow{a} = (7,2)$, $\overrightarrow{b} = (-1,-2)$, $\overrightarrow{c} = (21,6)$.

3.4. Zistite, či vetkory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c}$ sú lineárne nezávislé a vyjadrite vektor $\overrightarrow{d}$ ako ich lineárnu kombináciu, ak

a) $\overrightarrow{a} = (3,2,1)$, $\overrightarrow{b} = (7,5,0)$, $\overrightarrow{c} = (-2,3,4)$, $\overrightarrow{d} = (12,4,-3)$,

b) $\overrightarrow{a} = (6,3,5)$, $\overrightarrow{b} = (1,2,-7)$, $\overrightarrow{c} = (6,12,0)$, $\overrightarrow{d} = (18,0,20)$,

c) $\overrightarrow{a} = (1,5,3)$, $\overrightarrow{b} = (6,-4,-2)$, $\overrightarrow{c} = (0,-5,7)$, $\overrightarrow{d} = (-20,27,-35)$.

3.5. Zistite, ktoré z vetkorov $\overrightarrow{a} = B - A$, $\overrightarrow{b} = C - A$, $\overrightarrow{c} = D - B$, $\overrightarrow{d} = C - D$ sú kolineárne, ak $A = [5,-10,-1]$, $B = [-4,2,5]$, $C = [-7,8,5]$, $D = [2,-7,2]$.

3.6. Pre aké čísla m,n sú vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ kolineárne, ak

a) $\overrightarrow{a} = (-2,3,m)$, $\overrightarrow{b} = (n,-6,2)$,

b) $\overrightarrow{a} = (\frac{2}{m} - 4, n, 5)$, $\overrightarrow{b} = (m, 3m - 2n, 2)$.

3.7. Pre vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ platí, že $|\overrightarrow{a}| = 5$, $|\overrightarrow{b}| = 4$ a $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\Pi}{3}$. Nájdite skalárne súčiny:

a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ b) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$

c) $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}$ d) $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$

e) $(4\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) \cdot (4\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})$ f) $(2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}) \cdot (2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$.

3.8. Zistite, pre aké čísla x sú vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ navzájom kolmé, ak

a) $\overrightarrow{a} = (2, -5, 3x)$, $\overrightarrow{b} = (x, 2, 1)$

b) $\overrightarrow{a} = (x^2 - 4, 6, 2x + 20)$, $\overrightarrow{b} = (1, -2x, 1)$.

3.9. Nájdite uhol vektorov $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, ak

a) $A = [3, 0, 4]$, $B = [2, -2, 1]$, $O = [0, 0, 0]$,

b) $A = [-2, 1, 2]$, $B = [2, -3, 3]$, $O = [0, 0, 0]$.

3.10 Nájdite vnútorných uhlov trojuholníkov, ktorých vrcholy sú

a) $A = [2, -4, 9]$, $B = [-1, -4, 5]$, $C = [6, -4, 6]$,

b) $A = [6, 0, 2]$, $B = [8, -1, 4]$, $C = [4, -4, 6]$,

c) $A = [4, 0, 6]$, $B = [6, -3, 12]$, $C = [10, 2, 3]$.

3.11. Zistite, či štvoruholník s vrcholmi $A = [5, 2, 6]$, $B = [6, 4, 4]$, $C = [4, 3, 2]$, $D = [3, 1, 4]$ je štvorec.

3.12. Dané sú vektory $\overrightarrow{a} = (2, -1, 3)$, $\overrightarrow{b} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{c} = (3, 2, -4)$. Nájdite vektor $\overrightarrow{x}$, pre ktorý platí:

a) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a} = 0$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{c} = -10$,

b) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a} = -2$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b} = 3$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{c} = 8$.

3.13. Pre vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ platí, že $|\overrightarrow{a}| = 1$, $|\overrightarrow{b}| = 3$ a $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{5\Pi}{6}$. Vypočítajte veľkosť vektorov:

a) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$

b) $(\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b})$

c) $(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b})$

3.14. Vypočítajte obsah

a) trojuholníka ABC, ak $A = [3, 1, 4]$, $B = [0, 2, 1]$, $C = [5, 0, 8]$

b) rovnobežníka $ABCD$, ak $A = [0, 4, 7]$, $B = [2, 2, 2]$, $D = [6, 1, 5]$.

3.15. Vypočítajte $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$, $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$, ak

a) $\overrightarrow{a} = (2, 7, 4)$, $\overrightarrow{b} = (3, 4, 5)$, $\overrightarrow{c} = (6, 0, 3)$

b) $\overrightarrow{a} = (2, -1, 3)$, $\overrightarrow{b} = (0, 1, 2)$, $\overrightarrow{c} = (3, 3, 1)$

3.16. Vypočítajte $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ a $\overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c})$, ak $\overrightarrow{a} = (2, -3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (2, 2, -1)$, $\overrightarrow{c} = (1, 2, 2)$.

3.17. Dokážte, že vektory $\overrightarrow{a} = (-1, 3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (4, -6, 2)$, $\overrightarrow{c} = (-3, 12, 11)$ sú komplanárne.