3. Základy vektorovej algebry

Definícia 3.1:

- **Vektor -** (ozn. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$): orientovaná úsečka začiatočným bodom A a koncovým bodom B, $\overrightarrow{a} = (a_1,a_2,a_3)$, kde $a_i = B_i - A_i$, $i = 1,2,3$, ak $A = [A_1,A_2,A_3]$ a $B = [B_1,B_2,B_3]$
- **Veľkosť vektora** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ **-** (ozn. $|\overrightarrow{a}|$): dĺžka úsečky AB, teda

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2 + (B_3 - A_3)^2}$$

- **Nulový vektor -** (ozn. $\overrightarrow{0}$): vektor, ktorého dĺžka sa rovná nule, čo ale nastane iba v prípade, ak všetky súradnice vektora sú nulové
- **Opačný vektor k vektoru** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ **-** (ozn. $-\overrightarrow{a}$): $-\overrightarrow{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$, resp. $-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BA} = (A_1 - B_1, A_2 - B_2, A_3 - B_3)$
- **Jednotkový vektor :** vektor, ktorého dĺžka je rovná jednej, t.j. $|\overrightarrow{a}| = 1$
- **Kolineárne vektory :** dva nenulové vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ktoré ležia na jednej priamke alebo na dvoch priamkach, ktoré sú rovnobežné:
  - **súhlasne kolineárne -** (ozn. $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$): ak tie vektory majú rovnakú orientáciu
  - **nesúhlasne kolineárne -** (ozn. $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$): ak tie vektory majú opačnú orientáciu
- **Komplanárne vektory :** tri nenulové vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, ktoré ležia v jednej rovine alebo v rovnobežných rovinách

Operácie s vektormi: nech $\overrightarrow{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1,b_2,b_3)$

- **Súčet vektorov** $\overrightarrow{a}$ **a** $\overrightarrow{b}$ **-** (ozn. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$): $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, kde $c_i = a_i + b_i$ pre $i = 1,2,3$
- **Násobenie vektora** $\overrightarrow{a}$ **skalárom** $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ **-** (ozn. $\lambda\overrightarrow{a}$): $\overrightarrow{d} = \lambda\overrightarrow{a}$, kde $d_i = \lambda a_i$ pre $i = 1,2,3$

Vlastnosti vektorov:

- **VV1:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ - komutatívny
- **VV2:** $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ - asociativny
- **VV3:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$
- **VV4:** ak vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ nie sú kolineárne, tak vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ je uhlopriečkou rovnobežníka so stranami zhodnými s danými vektormi
- **VV5:** ak vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c}$ nie sú komplanárne, tak vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ je telesovou uhlopriečkou rovnobežnostena s hranami zhodnými s danými vektormi

- **VV6:** ak vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ sú súhlasne kolineárne, tak pre veľkosť vektora $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ platí, že $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$
- **VV7:** ak vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ sú nesúhlasne kolineárne, tak pre veľkosť vektora $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ platí, že $|\overrightarrow{c}| = \big||\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}|\big|$
- **VV8:** ak $\lambda > 0$, tak $\lambda\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{a}$ sú súhlasne kolineárne a a pre ich veľkosť platí $|\lambda\overrightarrow{a}| = \lambda|\overrightarrow{a}|$
- **VV9:** ak $\lambda < 0$, tak $\lambda\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{a}$ sú nesúhlasne kolineárne a a pre ich veľkosť platí $|\lambda\overrightarrow{a}| = -\lambda|\overrightarrow{a}|$
- **VV10:** ak $\lambda = |\overrightarrow{a}|$, tak $\overrightarrow{b} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{a}$, t.j. $\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$ je jednotkovým vektorom
- **VV11:** $\alpha(\beta\overrightarrow{a}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}, \quad (\alpha+\beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}, \quad \alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}, \quad 1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

Definícia 3.2:

- **Lineárna kombinácia vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:** je vektor $\overrightarrow{d}$, ktorý vznikne ako súčet konštatného násobku daných vektorov, t.j.

  $$\overrightarrow{d} = k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{b} + k_3\overrightarrow{c},$$

  kde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$
- **Lineárne závislé vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:** ak existujú reále čísla $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly také, že platí

  $$k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{b} + k_3\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$
- **Lineárne nezávislé vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:** ak nie sú lineárne závislé, t.j. rovnosť $k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{b} + k_3\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ platí len v prípade, že $k_i = 0$ pre všetky $i = 1, 2, 3$
- **Báza v $\mathbb{R}^3$:** každá množina 3 lineárne nezávislých vektorov v $\mathbb{R}^3$
- **Jednotková báza :** ak všetky vektory v báze majú veľkosť rovnej jednej, t.j. sú jednotkové

Ďalšie vlastnosti vektorov:

- **VV12:** ak dva vektory sú lineárne závislé, tak ležia na jednej priamke, t.j. sú kolineárne
- **VV13:** ak tri vektory sú lineárne závislé, tak ležia v jednej rovine, t.j. sú komplanárne
- **VV14:** ľubovoľný vektor v $\mathbb{R}^3$ možno jednoznačne popísať ako lineárna kombinácia vektorov bázy v $\mathbb{R}^3$

Definícia 3.3:

Skalárny súčin vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ - (ozn. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$): je číslo, ktoré definujeme nasledovne

a) ak $|\overrightarrow{a}| \neq 0$ a $|\overrightarrow{b}| \neq 0$, tak $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi$, kde φ je uhol, ktorý zvierajú vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$

b) ak $|\overrightarrow{a}| = 0$ alebo $|\overrightarrow{b}| = 0$, tak $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$,

Vlastnosti skalárneho súčinu: nech $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$

- **VS1:** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$,
- **VS2:** rovnosť $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ je splnená v prípadoch, ak $|\overrightarrow{a}| = 0$ alebo $|\overrightarrow{b}| = 0$ alebo $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$
- **VS3:** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$ - komutatívny
- **VS4:** $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$, $(\alpha \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- **VS5:** pre $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ (jednotková báza v $\mathbb{R}^3$) platí: $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$ a $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$
- **VS6:** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2 \geq 0$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0$ len vtedy, ak $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
- **VS7:** $|\overrightarrow{a}| \neq 0$ a $|\overrightarrow{b}| \neq 0$, tak $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$, kde φ je uhol, ktorý zvierajú vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$

Definícia 3.4:

Vektorový súčin vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ - (ozn. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$): je vektor, ktorý definujeme nasledovne

a) ak $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ sú kolineárne alebo jeden z nich je nulový, tak $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$

b) ak $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ sú lineárne nezávislé, tak $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$, pričom
   - $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi$, kde φ je uhol, ktorý zvierajú vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$
   - vektor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ je kolmý na vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$

Vlastnosti vektorového súčinu:

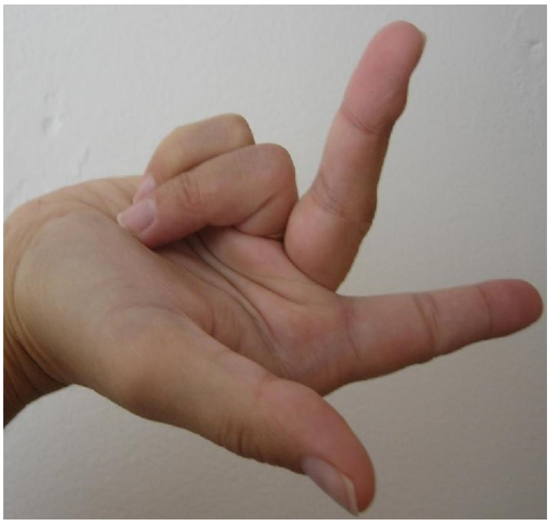
- **VVS1:** $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$
- **VVS2:** $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \lambda \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- **VVS3:** $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$
- **VVS4:** $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$
- **VVS5:** $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$
- **VVS6:** $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$ - obsah rovnobežníka, ktorého strany sú určené vektormi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$

Pomôcka pri výpočte vektorového súčinu vektorov
$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Ak vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ sú umiestnené tak, že začiatočné body všetkých troch vektorov je ten istý bod, tak pohyb koncového bodu vektora $\overrightarrow{a}$ do koncového bodu vektora $\overrightarrow{b}$ po kratšom oblúku kružnice sa javí z koncového bodu vektora $\overrightarrow{c}$ proti smeru pohybu hodinových ručičiek.



Definícia 3.5:

Zmiešaný súčin vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ **:** $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$

Vlastnosti zmiešaného súčinu:

- **VZS1:** $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$
- **VZS2:** $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = -\overrightarrow{b} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c})$
- **VZS3:** $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$
- **VZS4:** $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
- **VZS5:** vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sú komplanárne práve vtedy, keď $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = 0$
- **VZS6:** $|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}|$ - objem rovnobežnostena, ktorého tri hrany sú určené vektormi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ (prvý obrázok)

- **VZS7:** $\frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}\right|$ - objem štvorbohého ihlana, ktorého tri hrany sú určené vektormi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ (druhý obrázok)
- **VZS8:** $\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}\right|$ - objem štvorstena, ktorého tri hrany sú určené vektormi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ (tretí obrázok)