2. Základy lineárnej algebry

Obr. 1

<u>Matice I.</u>

Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Definícia 2.1:

- **Matica typu** $m \times n$**:** schéma $m.n$ čísel zostavených do m riadkov a n stĺpcov
- **Prvky matice** A**:** a_{ij}
- **Riadky matice** A**:** $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, m$
- **Stĺpce matice** A**:** $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, \dots, n$

Typy matíc:

- **Štvorcová matica stupňa** n **:** matica typu $m \times n$, kde $m = n$, t.j. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- **Nulová matica -** (ozn. $\boldsymbol{O}$): matica, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

- **Diagonálna matica :** štvorcová matica stupňa n, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, a v ktorej aspoň jeden prvok $a_{ii} \neq 0$
- **Jednotková matica -** (ozn. $\boldsymbol{I}$): diagonálna matica, pre ktorú $a_{ii} = 1$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$
- **Symetrická matica :** štvorcová matica stupňa n, v ktorej $a_{ij} = a_{ji}$ pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$
- **Trojuholníková matica :** matica typu $m \times n$, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i > j$

Operácie s maticami:

- **Rovnosť matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ -** (ozn. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$): matice sú rovnakého typu a všetky prvky sa rovnajú, t.j. ak $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ a $a_{ij} = b_{ij}$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$
- **Súčet matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ -** (ozn. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$): !!! matice musia byť rovnakého typu, teda ak $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, potom $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$
- **Násobok matice $\boldsymbol{A}$ s nenulovým číslom α -** (ozn. $\alpha\boldsymbol{A}$): $\alpha\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$, kde $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ ($\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{C}$ sú matice rovnakého typu)
- **Súčin matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ -** (ozn. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$): ak $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})_{n\times k}$ (!!!počet stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ musí byť totožný s počtom riadkov matice $\boldsymbol{B}$), potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times k}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

- **Transponovaná matica k matici $\boldsymbol{A}$ -** (ozn. $\boldsymbol{A}^T$): ak $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, potom $\boldsymbol{A}^T = (a^T_{ij})_{n\times m}$, kde $a^T_{ij} = a_{ji}$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Vlastnosti matíc:

- Pre súčet matíc:
  - **VM1:** nulová matica je neutrálny prvok vzhľadom na operáciu sčítania matíc, t.j.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

  - **VM2:** ak $\boldsymbol{A}$ je symetrická matica stupňa n, tak platí $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$
  - **VM3:** pre sčítanie matíc rovnakého typu platí komutatívny a asociatívny zákon, t.j.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$$

  - **VM4:** pre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ rovnakého typu platia rovnosti:

$$\alpha(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{B} \qquad \text{a} \qquad \alpha(\beta\boldsymbol{A}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{A}$$

  - **VM5:** rovnosť $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$ má jediné riešenie $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$

- Pre súčin matíc:
  - **VM6:** jednotková maticka je neutrálny prvok vzhľadom na operáciu násobenia štvorcových matíc rovnakého stupňa, t.j.

    $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$$

  - **VM7:** vo všeobecnosti nemusí platiť komutatívny zákon pre násobenie matíc $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times k}$, ale ak platí $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, tak hovoríme, že $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú **k**omutatívne matice
  - **VM8:** nech $\boldsymbol{A}$ je typu $m\times n$, $\boldsymbol{B}$ je typu $n\times p$, $\boldsymbol{C}$ je typu $p\times q$, potom platí asociatívny zákon, t.j.

    $$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$$

  - **VM9:** nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú typu $m\times n$, $\boldsymbol{C}$ je typu $n\times p$, potom platí distributívny zákon, t.j.

    $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$$

  - **VM10:** nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú typu $m\times n$, $\boldsymbol{C}$ je typu $p\times m$, potom platí

    $$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$$

  - **VM11:** nech $\boldsymbol{A}$ je typu $m\times n$, $\boldsymbol{B}$ je typu $n\times p$, $\alpha\in\mathbb{R}$, potom platia nasledujúce vzťahy

    $$\alpha(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\alpha\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B},\quad (\alpha\boldsymbol{A})^T=\alpha\boldsymbol{A}^T,\quad (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{A}^T$$

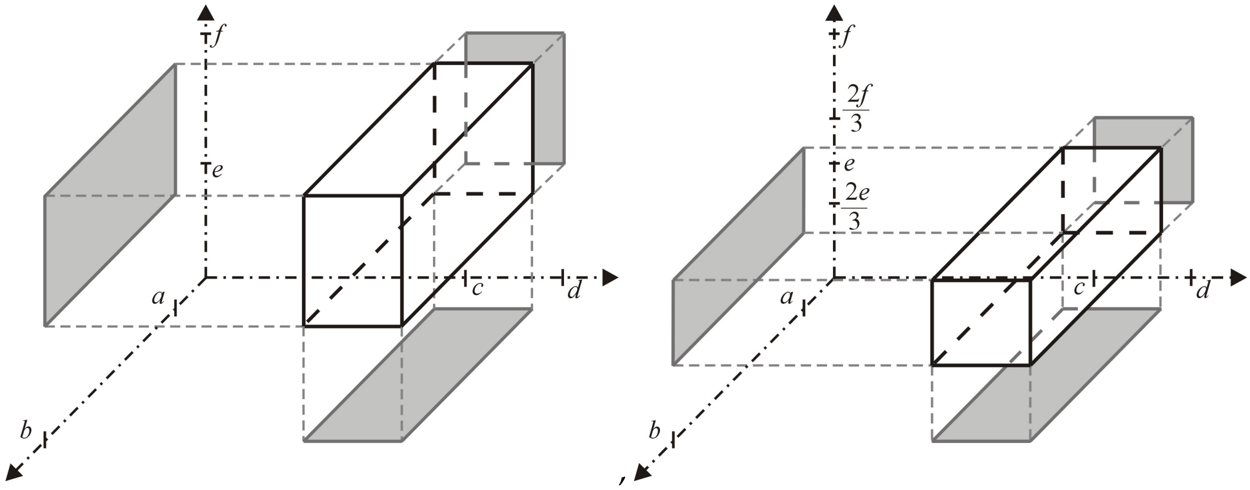
Definícia 2.2:

- **Podmatice matice $\boldsymbol{A}$ -** (ozn. $\boldsymbol{A}_{ij}$): matica, ktorá vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca

Nech $K = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$ je kváder - obrázok 2., resp. 3. vľavo. Pomocou súčinu matíc

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

kde (x,y,z) je ľubovoľný bod tohto kvádra, pôvodný kváder zväčšíme (ak $p > 1$) alebo zmenšíme (ak $0 < p < 1$) v smere osi z - obrázok 2. vpravo pre $p = \frac{2}{3}$.

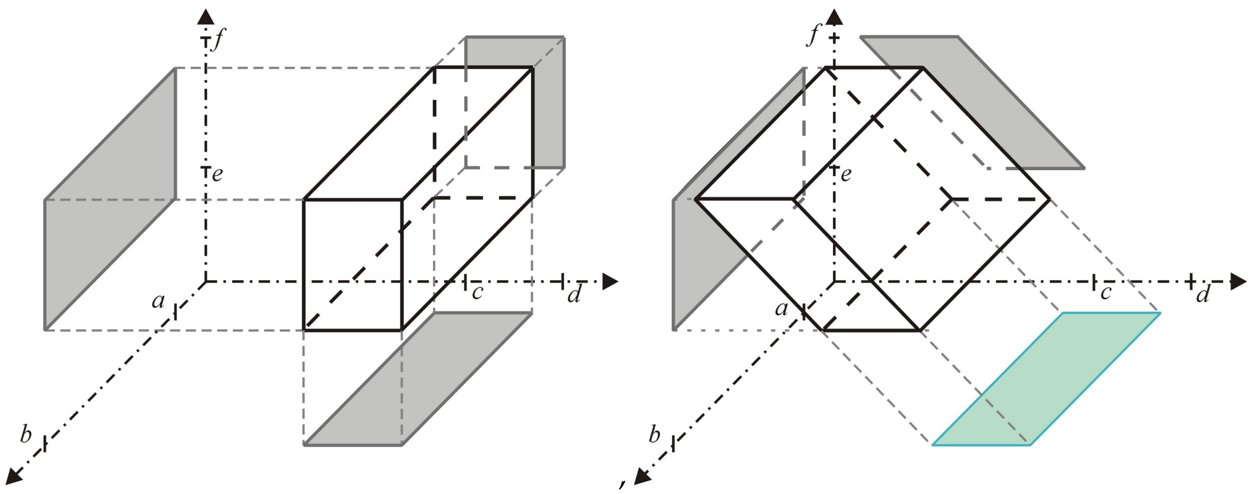


Obr. 2

Pomocou súčinu matíc

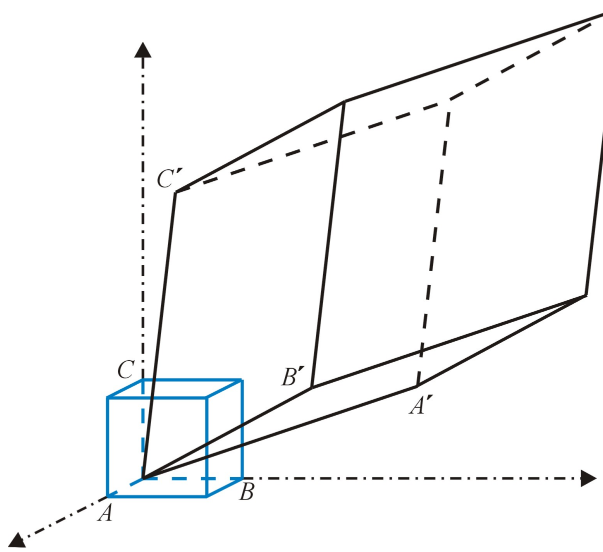
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde (x,y,z) je ľubovoľný bod tohto kvádra, pôvodný kváder sa zdeformuje - obrázok 3. vpravo.



Obr. 3

Na obr. 4. je prípad, ak súradnice bodov jednotkovej kocky násobíme všeobecnou maticou.



Obr. 4

Determinanty

Definícia 2.3:

- **Determinant matice A -** (ozn. det$A$ alebo $|A|$): číslo, ktoré dostaneme z prvkov danej štvorcovej (!!!!) matice A stupňa n nasledujúcim spôsobom:
  - ak A je matica stupňa 1, t.j. $A = a_{11}$, tak det$A = a_{11}$
  - ak A je matica stupňa 2, t.j. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tak

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

  - ak A je matica stupňa 3, t.j. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tak determinant možno počítať tzv. **Sarusovým pravidlom** (!!!platí iba pre determinant matice tretieho stupňa!!):

$$\det A = \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right\} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

  - ak A je matica stupňa $n \geq 2$, na výpočet det$A$ možno použiť tzv. **Laplaceov rozvoj**, z čoho existujú dva typy:

Laplaceov rozvoj podľa i-tého riadku:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} |\boldsymbol{A}_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |\boldsymbol{A}_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} |\boldsymbol{A}_{in}|$$

Laplaceov rozvoj podľa j-tého stĺpca:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} a_{1j} |\boldsymbol{A}_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |\boldsymbol{A}_{2j}| + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} |\boldsymbol{A}_{nj}|,$$

pričom $\boldsymbol{A}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sú podmatice matice $\boldsymbol{A}$ definované v Definície 2.2.

Vlastnosti determinantov:

- **VD1:** je jedno, či volíme Laplaceov rozvoj podľa stĺpca alebo riadku a že podľa ktorého stĺpca alebo riadku, výsledok bude vždy rovnaký
- **VD2:** $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det \boldsymbol{A}$, $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{A} . \det \boldsymbol{B}$
- **VD3:** ak všetky prvky ľubovoľného riadku (stĺpca) matice $\boldsymbol{A}$ sú nulové, tak $\det \boldsymbol{A} = 0$
- **VD4:** ak v matici $\boldsymbol{A}$ navzájom vymeníme 2 riadky (stĺpce) $\det \boldsymbol{A}$ zmení znamienko
- **VD5:** ak v matici $\boldsymbol{A}$ vynásobíme všetky prvky jedného riadku (stĺpca) tým istým číslom k, determinant tejto matice sa rovná $k . \det \boldsymbol{A}$ (možno spoločný činiteľ "vyňať")
- **VD6:** ak k ľubovoľnému riadku (stĺpci) matice pripočítame k-násobok iného riadku (stĺpca) matice, determinant novej matice sa rovná determinantu pôvodnej matice
- **VD7:** ak dva riadky (stĺpce) matice $\boldsymbol{A}$ sú rovnaké alebo jeden je k-násobok druhého, tak $\det \boldsymbol{A} = 0$
- **VD8:** determinant trojuholníkovej matice je rovný súčinu jej všetkých diagonálnych prvkov, t.j. napr. pre $n = 4$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

Matice II.

Definícia 2.4:

- **Regulárna matica :** štvorcová matica $\boldsymbol{A}$, pre ktorú platí, že $\det \boldsymbol{A} \neq 0$

- **Singulárna matica :** štvorcová matica $\boldsymbol{A}$, pre ktorú platí, že $\det \boldsymbol{A} = 0$
- **Inverzná matica k matici $\boldsymbol{A}$ -** (ozn. $\boldsymbol{A}^{-1}$): !!!matica $\boldsymbol{A}$ musí byť regulárna a platí, že

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

- **Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ -** (ozn. $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$): číslo, ktoré udáva počet nenulových lineárnych nezávislých riadkov matice (t.j. ak žiadny z nich sa nedá zapísať ako súčet konštantných násobkov iných riadkov)
- **Elementárne riadkové operácie -** (ozn. ERO): úpravy matíc, ktoré neovplyvnia hodnosť príslušnej matice, t.j.:
  - vzájomná výmena dvoch riadkov
  - vynásobenie riadku nenulovým číslom
  - pripočítanie ľubovoľného riadku k inému riadku
- **Ekvivalentné matice -** (ozn. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$): ak jedna matica vznikne z druhej iba pomocou ERO

Metódy hľadania inverznej matice k matice $\boldsymbol{A}$ stupňa n: !!! $\det \boldsymbol{A} \neq 0$

1) vzorcom: $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{21} & \dots & \overline{A}_{n1} \\ \overline{A}_{12} & \overline{A}_{22} & \dots & \overline{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{A}_{1n} & \overline{A}_{2n} & \dots & \overline{A}_{nn} \end{pmatrix}$ pričom $\overline{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}_{ij}$, kde $\boldsymbol{A}_{ij}$ sú podmatice matice $\boldsymbol{A}$

2) eliminačnou metódou: maticu

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

upraviť pomocou ERO na

$$(\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n-1} & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n-1} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & x_{n-11} & x_{n-12} & \dots & x_{n-1n-1} & x_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn-1} & x_{nn} \end{array}\right),$$

kde matica $\boldsymbol{X}$ bude tá hľadaná inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$

Metódy zistenia hodnosti matíc :

1) pomocou ERO previesť maticu $\boldsymbol{A}$ na trojuholníkovú maticu, potom počet nenulových riadkov zadá hodnosť matice, t.j. $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$

2) ak $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica stupňa n, tak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = n$ a maticu $\boldsymbol{A}$ možno previesť pomocou ERO na diagonálnu maticu

3) ak $\boldsymbol{A}$ je singulárna matica stupňa n, tak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) < n$ a maticu $\boldsymbol{A}$ možno previesť pomocou ERO na trojuholníkovú maticu

Systémy lineárnych rovníc

Definícia 2.5:

- **Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi :** systém nasledujúcich rovníc

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

- **Koeficienty systému :** a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$
- **Absolútne členy systému :** b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$
- **Neznáme systému :** x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$
- **Riešenie systému :** n-tica čísel $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, z ktorých po dosadení r_1 do x_1, …, r_n do x_n do systému dostaneme m správnych rovnosti

Systém možno písať aj v maticovom tvare:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B},$$

kde

- **matica koeficientov systému :** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$
- **matica neznámych systému :** $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$
- **matica absolútnych členov systému :** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$

Definícia 2.6:

- **Rozšírená matica systému :** $(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

- **Homogénny systém :** ak $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$

- **Nehomogénny systém :** ak existuje aspoň jeden absolútny člen b_i systému, ktorý nie je nulový

- **Ekvivalentné systémy :** dva systémy sú ekvivalentné, ak každé riešenie prvého systému je riešením aj druhého a naopak

Ekvivalentné systémy môžeme dostať **elementárnymi úpravami** pôvodného systému:

- vzájomná výmena dvoch rovníc v systéme
- vynásobenie ľubovoľnej rovnice systému nenulovým číslom
- pripočítanie k ľubovoľnej rovnici inú rovnicu systému

Vlastnosti riešenia homogénnych systémov lineárnych rovníc:

- **VHS1:** vždy má aspoň jedno riešenie, a to tzv. **triviálne**, t.j. nulové
- **VHS2:** homogénny systém má nenulové riešenie práve vtedy, ak $\mathtt{h}(A)$ je menšia ako počet neznámych
- **VHS3:** v prípade, že máme maticu koeficientov štvorcovú, t.j. počet premenných sa rovná počtu rovníc v systéme, tak homogénny systém má nenulové riešenie práve vtedy, ak A je singulárnou maticou

Metódy riešenia nehomogénnych systémov lineárnych rovníc:

1) **Gaussova eliminačná metóda :** spočíva v tom, aby rozšírenú maticu $(A\,|\,B)$ systému upravili pomocou ERO tak, aby po úprave dostali naľavo od čiare jednotkovú maticu (v prípade regulárnej štvorcovej matici) alebo trojuholníkovú maticu, t.j.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \dots & \widetilde{a}_{1n-1} & \widetilde{a}_{1n} & c_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \dots & \widetilde{a}_{2n-1} & \widetilde{a}_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{a}_{n-1n-1} & \widetilde{a}_{n-1n} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{a}_{nn} & c_n \end{array}\right) \sim$$

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & r_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & r_n \end{array}\right)$$

alebo

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-11} & a_{m-12} & \ldots & a_{m-1n-1} & a_{m-1n} & b_{m-1} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn-1} & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \ldots & \widehat{a}_{1n-1} & \widehat{a}_{1n} & \widehat{c}_1 \\ 0 & \widehat{a}_{22} & \ldots & \widehat{a}_{2n-1} & \widehat{a}_{2n} & \widehat{c}_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \widehat{a}_{rn} & \widehat{c}_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \widehat{c}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \widehat{c}_m \end{array}\right)$$

Vlastnosti riešenia nehomogénnych systémov lineárnych rovníc:

VNHS1: riešenie systému s regulárnou štvorcovou maticou koeficientov je n-tica $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$

VNHS2: v prípade, že matica koeficientov nie je štvorcová, tak môžu nastať nasledujúce prípady

a) ak existuje $j \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$, pre ktoré $\widehat{c}_j \neq 0$, tak systém nemá riešenie

b) ak pre všetky $j \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$ je $\widehat{c}_j = 0$ a $r = n$, tak systém má práve jedno riešenie

c) ak pre všetky $j \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$ je $\widehat{c}_j = 0$ a $r < n$, tak systém má nekonečne veľa riešení, počet parametrov je $n - \mathrm{h}(\boldsymbol{A})$

2) **Frobeniova veta :** Systém lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, ak hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná hodnosti rozšírenej matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$, t.j.

$$\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}).$$

Ak pri vyšetrovaní týchto hodností používame len ERO, tak z matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ dostaneme inú rozšírenú maticu nejakého systému, ktorý je ekvivalentný s pôvodným systémom.

3) **Cramerovo pravidlo :** ak $\boldsymbol{A}$ je regulárna štvorcová matica koeficientov systému, tak systém má jediné riešenie, a to n-ticu $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, kde

$$r_1 = \frac{D_1}{\det \boldsymbol{A}}, \quad r_2 = \frac{D_2}{\det \boldsymbol{A}}, \quad \ldots \quad r_n = \frac{D_n}{\det \boldsymbol{A}},$$

pričom D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ je determinant matice, v ktorej sme nahradili i-tý stĺpec matice $\boldsymbol{A}$ stĺpcom absolútnych členov

4) **Pomocou inverznej matice :** ak systém, ktorý je písaný v maticovom tvare $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ vynásobíme inverznou maticou $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$, tak postupne dostaneme:

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}$$