4. Funkcie jednej premennej

Základné vlastnosti reálnych čísel

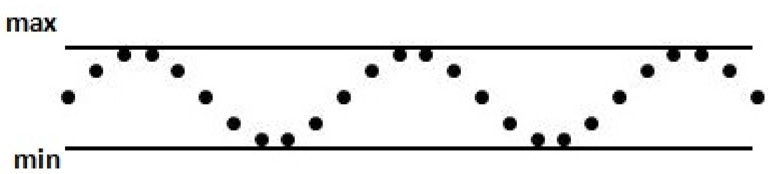
Definícia 4.1: Absolútna hodnota reálneho čísla $a \in \mathbb{R}$ **-** (ozn. $|a|$): $|a| = \begin{cases} a & \text{pre } a \geq 0 \\ -a & \text{pre } a < 0 \end{cases}$

Vlastnosti absolútnej hodnoty:

- **VAH1:** pre kladnú konštantu c platí, že $|a| \leq c \;\Leftrightarrow\; -c \leq a \leq c$
- **VAH2:** $|a|$ je vždy nezáporná (t.j. $|a| \geq 0$) pre ľubovoľnú $a \in \mathbb{R}$
- **VAH3:** $|a| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$
- **VAH4:** $|a.b| = |a|.|b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pre $b \neq 0$
- **VAH5:** $|a+b| \leq |a| + |b|$, $|a-b| \leq |a| + |b|$, $|a| - |b| \leq |a-b|$

Definícia 4.2:

- **Horné ohraničenie číselnej množiny** M **:** je to číslo $k \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky prvky x množiny M platí nerovnosť $x \leq k$
- **Zhora ohraničená množina :** množina, ktorá má horné ohraničenie
- **Dolné ohraničenie číselnej množiny** M **:** je to číslo $l \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky prvky x množiny M platí nerovnosť $x \geq l$
- **Zdola ohraničená množina :** množina, ktorá má dolné ohraničenie
- **Ohraničená množina :** množina, ktorá je aj zdola aj zhora ohraničená



Vlastnosti ohraničenej množiny :

- **VOM1:** ak množina M má horné ohraničenie, tak ich má nekonečne veľa
- **VOM2:** ak množina M má dolné ohraničenie, tak ich má nekonečne veľa

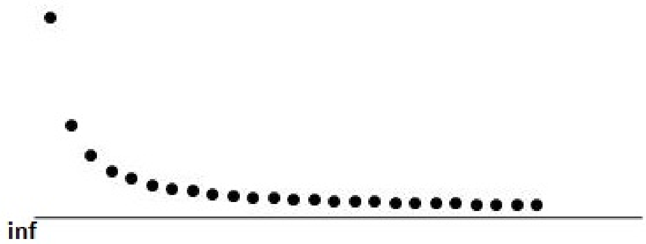
Definícia 4.3:

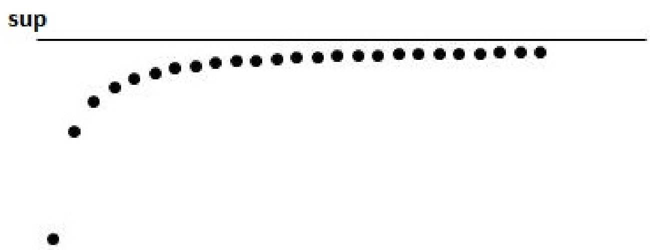
- **Otvorený interval :** $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$
- **Uzavretý interval :** $\langle a,b\rangle = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}$
- **Zľava otvorený interval :** $(a,b\rangle = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\}$
- **Zprava otvorený interval :** $\langle a,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\}$
- **Neohraničené intervaly :** $\langle a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x\}$, $\quad (a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x\}$

$$(-\infty,b\rangle = \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq b\}, \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ x < b\}, \quad (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

Definícia 4.4:

- **Maximum množiny** M **-** (ozn. $\max M = b$): $b \in M$ také, že $\forall x \in M$ platí, že $x \leq b$
- **Suprémum množiny** M **-** (ozn. $\sup M = \beta$): najmenšie horné ohraničenie, t.j.
  1) $\forall x \in M$ platí, že $x \leq \beta$, (teda β je horné ohraničenie)
  2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in M \ :\quad \beta - \varepsilon < x$, (teda $\beta - \varepsilon$ už nie je horné ohraničenie)
- **Minimum množiny** M **-** (ozn. $\min M = a$): $a \in M$ také, že $\forall x \in M$ platí, že $x \geq a$
- **Infímum množiny** M **-** (ozn. $\inf M = \alpha$): najväčšie dolné ohraničenie, t.j.
  1) $\forall x \in M$ platí, že $x \geq \alpha$, (teda α je dolné ohraničenie)
  2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in M \ :\quad x < \alpha + \varepsilon$, (teda $\alpha + \varepsilon$ už nie je dolné ohraničenie)





Vlastnosti supréma a infíma:

- **VSI1:** každá neprázdna, zdola ohraničená množina má infímum
- **VSI2:** každá neprázdna, zhora ohraničená množina má suprémum
- **VSI3:** ak $\sup M$, resp. $\inf M$ patrí do množiny M, tak $\sup M - \max M$, resp. $\inf M = \min M$

Definícia 4.5:

- **Okolie bodu** $c \in \mathbb{R}$ **-** (ozn. $O(c)$): každý interval (a,b), ktorý obsahuje bod c

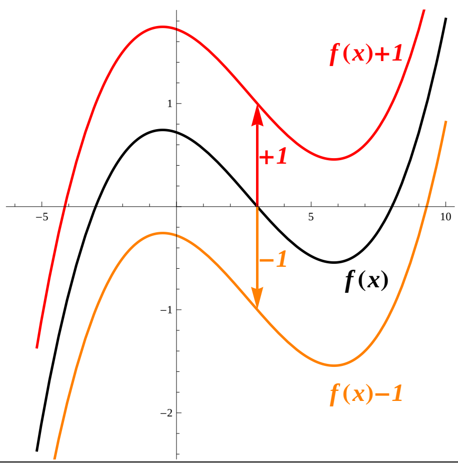
- **Symetrické okolie bodu** $c \in \mathbb{R}$ **-** (ozn. $O_\delta(c)$): $O_\delta(c) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < \delta\} =$
  $= \{x \in \mathbb{R} : c - \delta < x < c + \delta\}$
- **Okolie bodu** ∞ **:** neohraničený interval (l, ∞), kde l je ľubovoľné reálne číslo
- **Okolie bodu** $-\infty$ **:** neohraničený interval $(-\infty, k)$, kde k je ľubovoľné reálne číslo

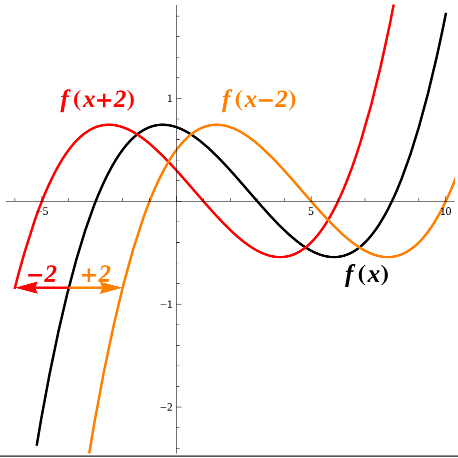
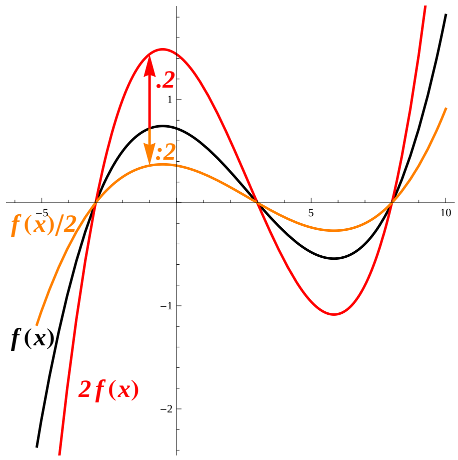
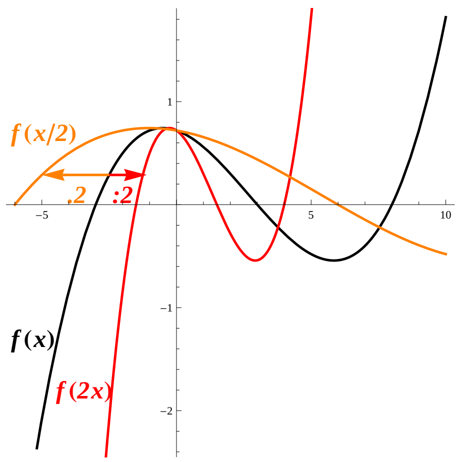
Funkcie a ich vlastnosti

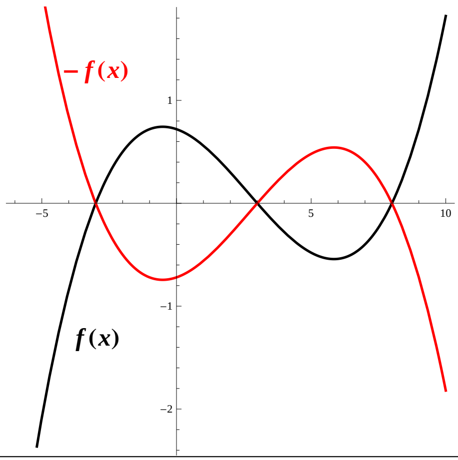
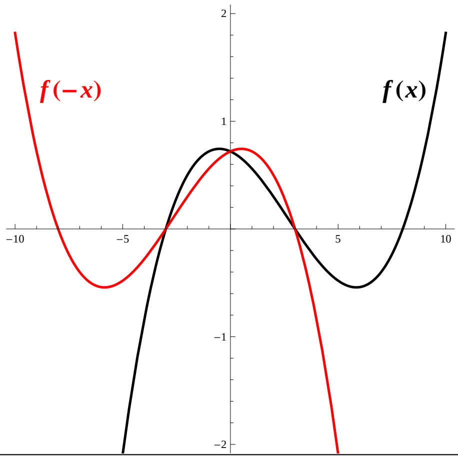
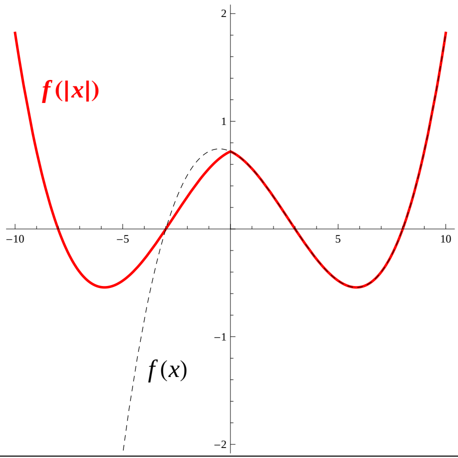
Definícia 4.6:

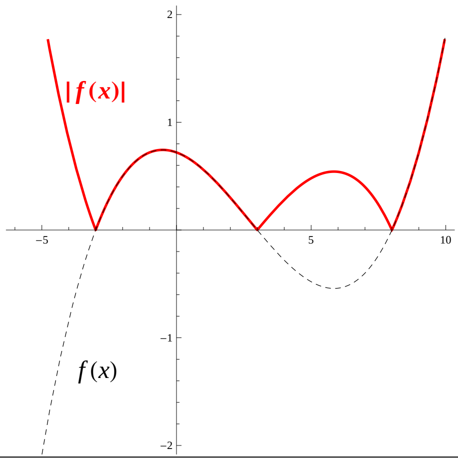
- **Funkcia (zobrazenie) -** (ozn. $f : M \to P$): predpis, podľa ktorého každému prvku $x \in M$ je priradený práve jeden prvok $y \in P$ (x - **vzor** ; y - **obraz**), t.j. $x \mapsto y = f(x)$
  Je to akoby čierna skrinka, do ktorej vchádza x a vychádza $f(x)$
- **Reálna funkcia jednej reálnej premennej :** funkcia $f : M \to P$, kde $M, P \subset \mathbb{R}$
- **Obraz množiny** $C \subset M$ **-** (ozn. $f(C)$): množina všetkých prvkov z množiny P , ktoré sú obrazmi prvkov z C
- **Definičný obor funkcie** f **-** (ozn. $D(f)$): množina M
- **Obor hodnôt funkcie** f **-** (ozn. $H(f)$): obraz množiny M, t.j. $f(M)$
- **Postupnosť -** (ozn. $f(n) = a_n$): funkcia definovaná na množine prirodzených čísel
- **Rovnosť funkcie** f **a** g **-** (ozn. $f = g$): $D(f) = D(g)$ a pre všetky prvky $x \in D(f)$ platí, že $f(x) = g(x)$
- **Graf funkcie** f **:** množina bodov $[x, y]$ v rovine, pre ktoré platí $y = f(x)$

Pomocou grafu funkcie f a určitými geometrickými transformáciami, môžeme nakresliť grafy určitých funkcií.

Nová funkcia:	**Geometrická transformácia grafu funkcie** f **:**
$y = f(x) + a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	posunutie grafu funkcie f v smere osi y o hodnotu a $a > 0$ - posunutie nahor $a < 0$ - posunutie nadol 

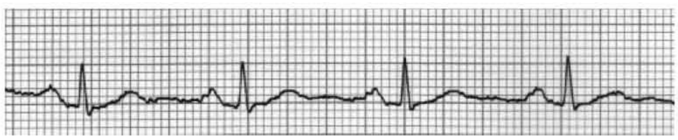
Nová funkcia:	**Geometrická transformácia grafu funkcie f :**
$y = f(x+a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	posunutie grafu funkcie f v smere osi x o hodnotu $-a$ $a > 0$ - posunutie doľava $a < 0$ - posunutie doprava 
$y = af(x)$, $a > 0$	$a > 1$ - roztiahnutie grafu funkcie f od osi x a-krát $0 < a < 1$ - stlačenie grafu funkcie f k osi x $\frac{1}{a}$-krát 
$y = f(ax)$, $a > 0$	$a > 1$ - stlačenie grafu funkcie f k osi y a-krát $0 < a < 1$ - roztiahnutie grafu funkcie f od osi y $\frac{1}{a}$-krát 

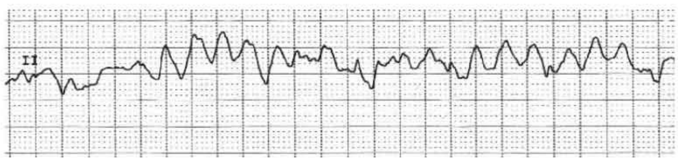
Nová funkcia:	**Geometrická transformácia grafu funkcie f :**
$y = -f(x)$	s grafom funkcie f je osovo súmerný podľa osi x 
$y = f(-x)$	s grafom funkcie f je osovo súmerný podľa osi y 
$y = f(\|x\|)$	graf funkcie f napravo od osi y ponecháme bez zmeny, graf funkcie f naľavo od osi y zmeníme tak, aby celý graf bol osovo súmerný podľa osi y 

Nová funkcia:	**Geometrická transformácia grafu funkcie f :**
$y = \|f(x)\|$	graf funkcie f nad osou x ponecháme bez zmeny, ku grafu funkcie f pod osou x zostrojíme graf osovo súmerný podľa osi x 

Spôsob zadávania funkcií:

- analyticky: predpisom $y = f(x)$
- graficky: napr. EKG, barometer
- tabuľkou: ak máme konečný počet bodov, napr. zápis meraní





Základné operácie s funkciami:

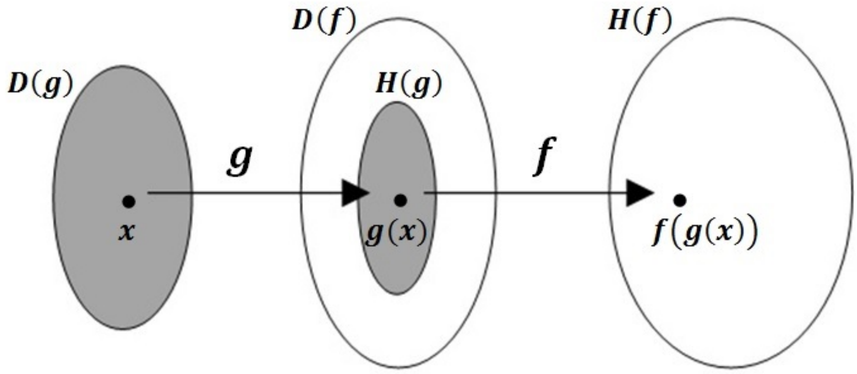
Nech sú dané funkcie $f : D(f) \to \mathbb{R}$ a $g : D(g) \to \mathbb{R}$. Potom môžeme definovať

- **súčet funkcií f a g:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **rozdiel funkcií f a g:** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **súčin funkcií f a g:** $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **podiel funkcií f a g:** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$ pričom $g(x) \neq 0$

- **superpozícia (zloženie) funkcií f a g:** Nech pre každé $x \in D(g)$ je hodnota $g(x) \in D(f)$. Potom na množine $D(g)$ môžeme definovať funkciu

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big),$$

kde f je tzv. **vonkajšia zložka** a g je tzv. **vnútorná zložka**.

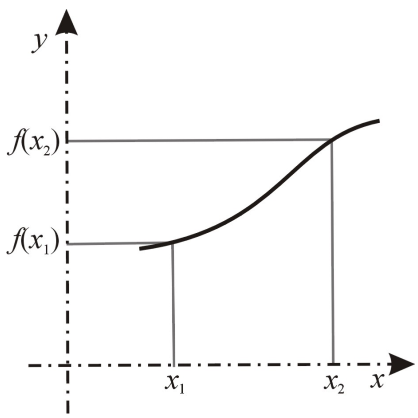


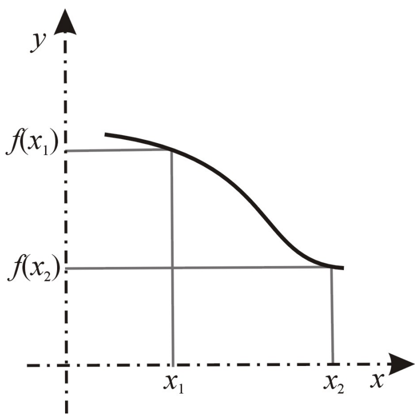
Definícia 4.7: Základné vlastnosti funkcie $f : D(f) \to \mathbb{R}$:

- **ohraničenosť zhora** a/alebo **zdola :** ak množina oboru hodnôt je ohraničená zhora a/alebo zdola, tak hovoríme, že funkcia je zhora a/alebo zdola ohraničená, t.j. ak

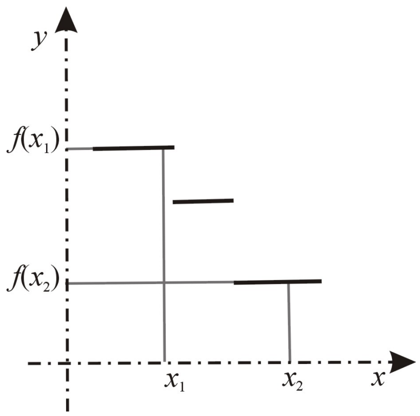
$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(f) : \; f(x) \le k \qquad \text{a/alebo} \qquad \exists l \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(f) : \; f(x) \ge l$$

- **párnosť/nepárnosť :** ak pre všetky $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$
  - **párna:** $f(-x) = f(x)$ - graf je súmerný podľa osi y
  - **nepárna:** $f(-x) = -f(x)$ - graf je súmerný podľa začiatku súradnicového systému
- **monotónnosť :** ak pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$ s vlastnosťou $x_1 < x_2$
  -rastúca: $f(x_1) < f(x_2)$ **-klesajúca:** $f(x_1) > f(x_2)$

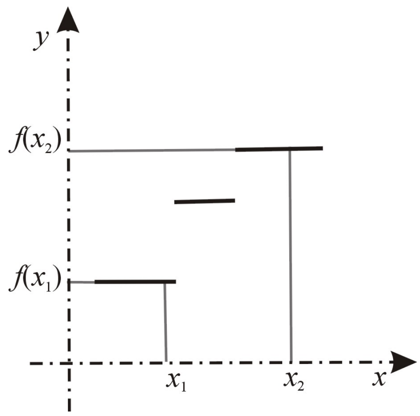




-nerastúca: $f(x_1) \geq f(x_2)$



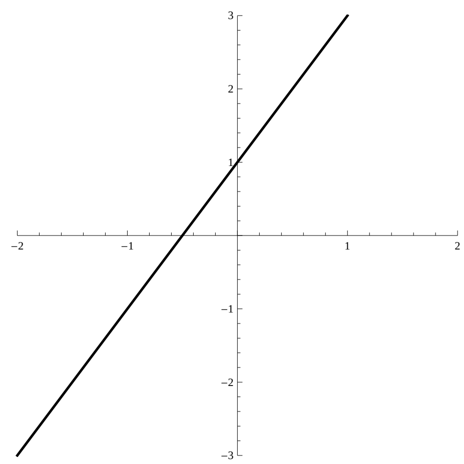
-neklesajúca: $f(x_1) \leq f(x_2)$

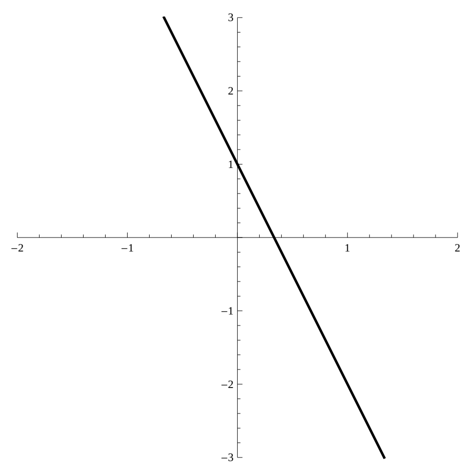


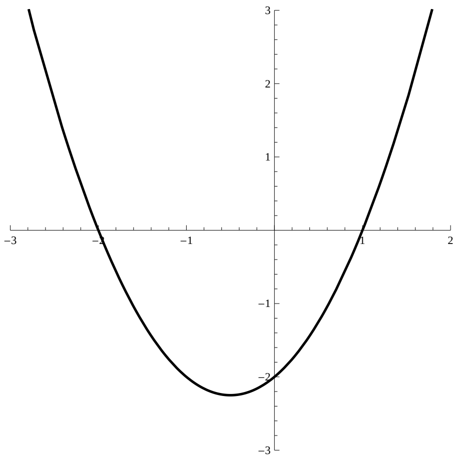
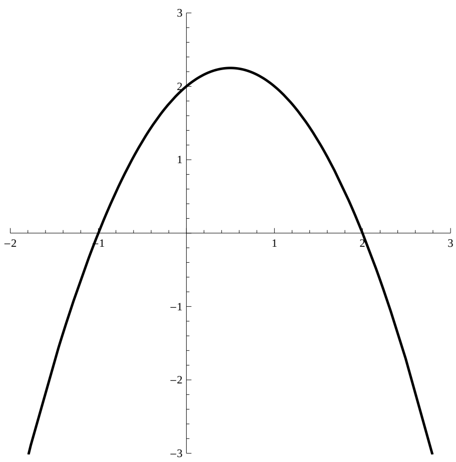
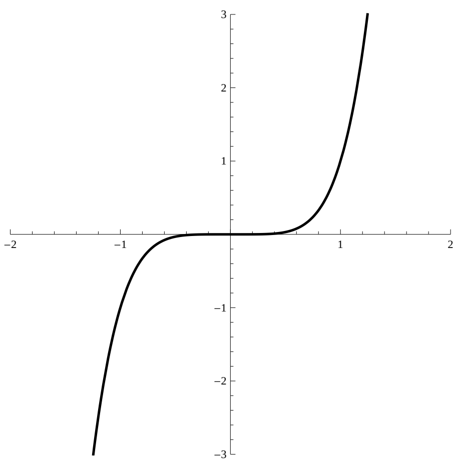
- **periodičnosť :** nech $p > 0$ (**základná perióda**) a pre všetky $x \in D(f)$ aj $x + p \in D(f)$ a aj $x - p \in D(f)$, potom funkcia f je **periodická s periódou** p, ak $f(x+p) = f(x) = f(x-p)$

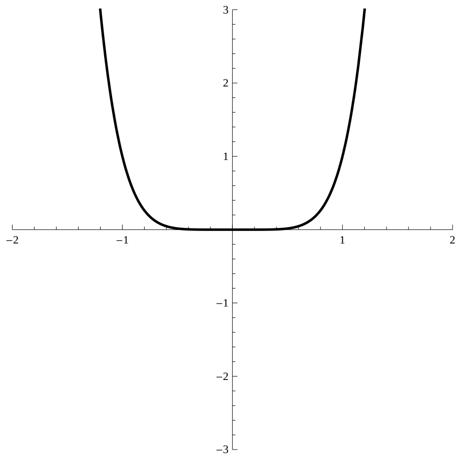
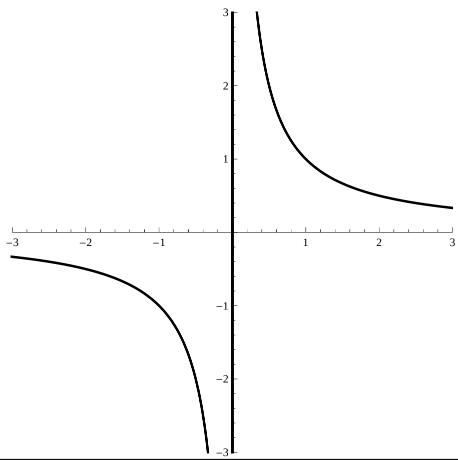
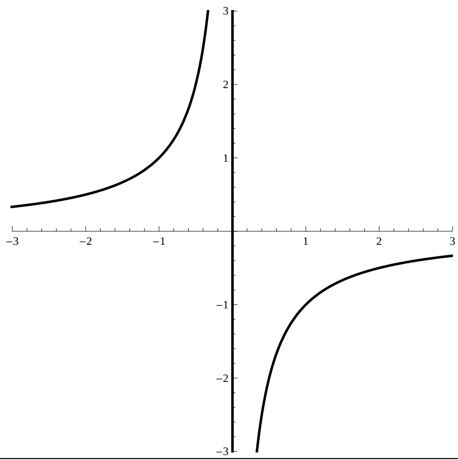
Prehľad elementárnych funkcií a ich základné vlastnosti:

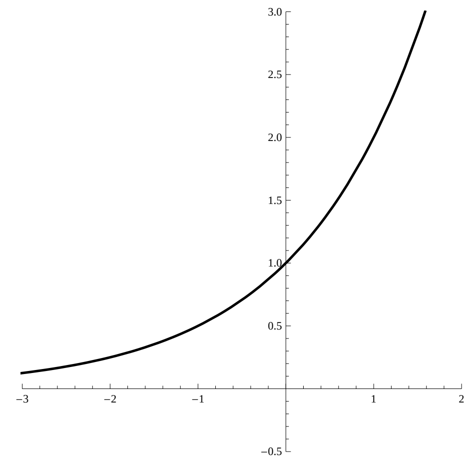
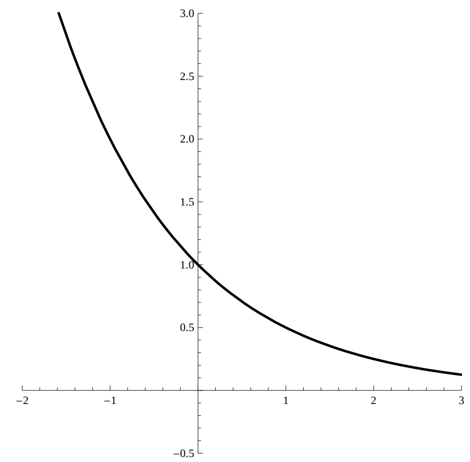
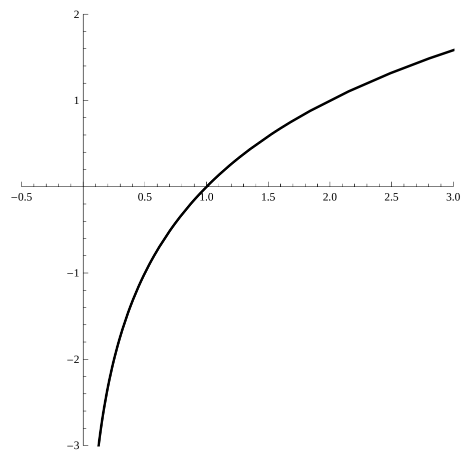
<table>
<tr><th>Vlastnosti funkcie f :</th><th>Graf funkcie f :</th></tr>
<tr><td>$y = ax + b$, $a > 0$ - lineárna funkcia

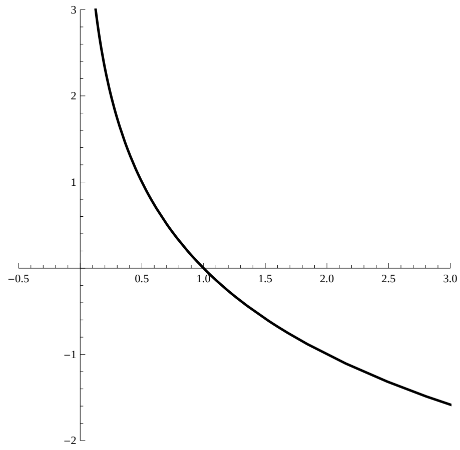
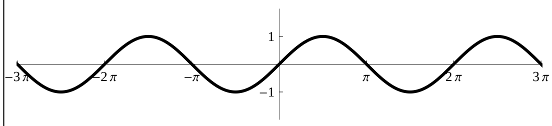
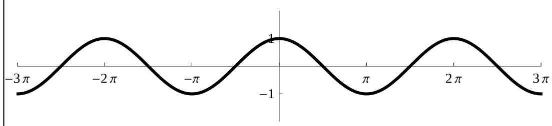
$D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \mathbb{R}$
ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora
monotónnosť: rastúca na celom svojom definičnom obore
párnosť/nepárnosť: ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je nepárna
</td><td></td></tr>
<tr><td>$y = ax + b$, $a < 0$ - lineárna funkcia

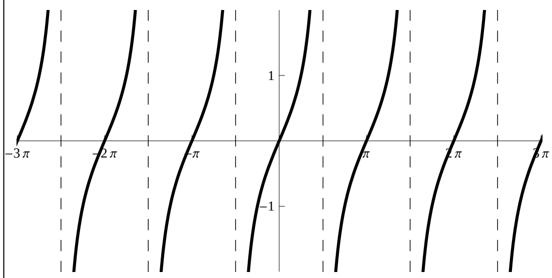
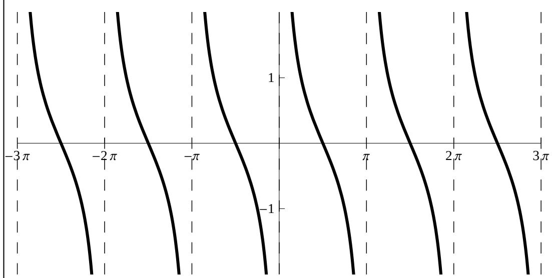
$D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = \mathbb{R}$
ohraničenosť: nie je ohraničená ani zdola ani zhora
monotónnosť: klesajúca na celom svojom definičnom obore
párnosť/nepárnosť: ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je nepárna
</td><td></td></tr>
</table>

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ - **kvadratická funkcia** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = \langle y^V, \infty)$ • **ohraničenosť:** zdola ohraničená, zhora neohraničená • **monotónnosť:** klesajúca na $(-\infty, x^V\rangle$, rastúca na $\langle x^V, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je párna	
$y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$ - **kvadratická funkcia** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = (-\infty, y^V\rangle$ • **ohraničenosť:** zdola neohraničená, zhora ohraničená • **monotónnosť:** rastúca na $(-\infty, x^V\rangle$, klesajúca na $\langle x^V, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je párna	
$y = x^n$, n je nepárne číslo - **mocninová funkcia** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nepárna	

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = x^n$, n je párne číslo - **mocninová funkcia** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = \langle 0, \infty)$ • **ohraničenosť:** zdola ohraničená, zhora neohraničená • **monotónnosť:** klesajúca na $(-\infty, 0\rangle$, rastúca na $\langle 0, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** párna	
$y = \frac{k}{x}$, $k > 0$ - **nepriama úmernosť** • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** klesajúca na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** nepárna	
$y = \frac{k}{x}$, $k < 0$ - **nepriama úmernosť** • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** nepárna	

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = a^x$, $a > 1$ - **exponenciálna funkcia** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = (0, \infty)$ • **ohraničenosť:** zdola ohraničená, zhora neohraničená • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	
$y = a^x$, $0 < a < 1$ - **exponenciálna funkcia** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = (0, \infty)$ • **ohraničenosť:** zdola ohraničená, zhora neohraničená • **monotónnosť:** klesajúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	
$y = \log_a x$, $a > 1$ - **logaritmická funkcia** • $D(f) = (0, \infty) \qquad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = \log_a x$, $0 < a < 1$ - **logaritmická funkcia** • $D(f) = (0, \infty)$ $\quad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** klesajúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	
$y = \sin x$ - **funkcia sinus** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$ • **ohraničenosť:** ohraničená zdola aj zhora • **monotónnosť:** rastúca na $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, klesajúca na $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ • **párnosť/nepárnosť:** nepárna • **periodičnosť:** periodická s periódou $p = 2\pi$	
$y = \cos x$ - **funkcia kosinus** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$ • **ohraničenosť:** ohraničená zdola aj zhora • **monotónnosť:** klesajúca na $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, rastúca na $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ • **párnosť/nepárnosť:** párna • **periodičnosť:** periodická s periódou $p = 2\pi$	

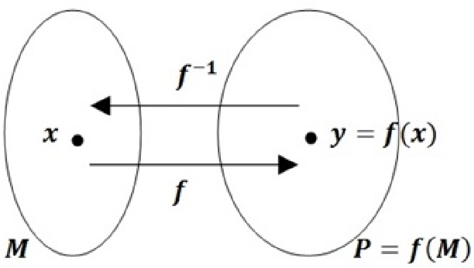
Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = \operatorname{tg} x$ - **funkcia tangens** • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z} \qquad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, • **párnosť/nepárnosť:** nepárna • **periodičnosť:** periodická s periódou $p = \pi$	
$y = \operatorname{cotg} x$ - **funkcia kotangens** • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z} \qquad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** klesajúca na $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ • **párnosť/nepárnosť:** nepárna • **periodičnosť:** periodická s periódou $p = \pi$	

Definícia 4.8:

- **Prostá (injektívna) funkcia :** ak pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- **Inverzná funkcia k funkcii f -** (ozn. f^{-1}): funkcia, ktorá každému $y \in P$ priradí práve to $x \in M$, ktoré funkcia f zobrazí na bod $y \in P$, pričom f musí byť prostá funkcia na množine M a $P = f(M)$



Vlastnosti inverznej funkcie:

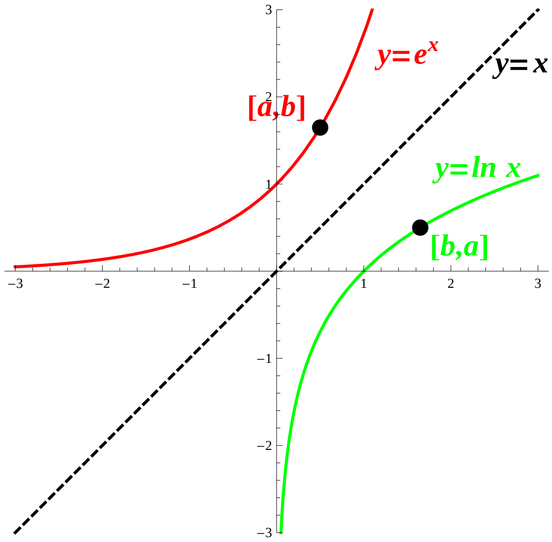
- **VIF1:** každá rýdzomonotónna funkcia je prostá
- **VIF2:** pre všetky $x \in M$, resp. $y \in P$ platí, že

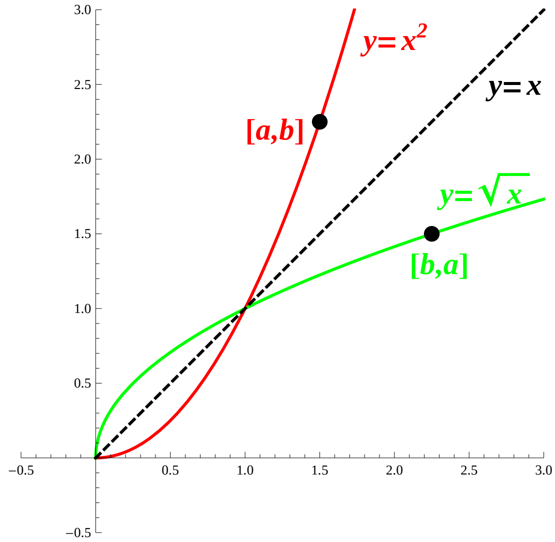
$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x, \qquad \text{resp.} \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

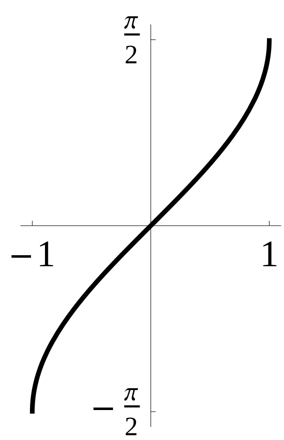
- **VIF3:** $D(f^{-1} = H(f)), H(f^{-1}) = D(f)$

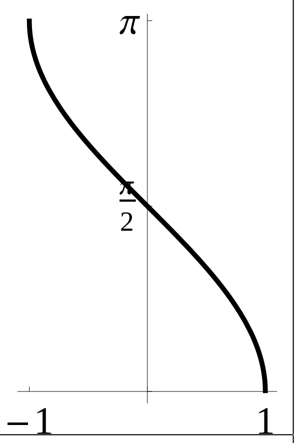
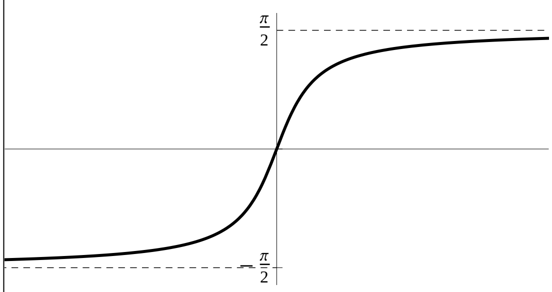
Zistiť inverznú funkciu f^{-1} k funkcii f možno:

1) graficky: zobrazíme graf funkcie f v osovej súmernosti s osou na priamke $y = x$
2) výpočtom: navzájom vymeníme premenné x a y, t.j. $x = f(y)$ a vyjadríme z toho y





Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
Inverzná funkcia k funkcii $y = \sin x$ pre $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ $y = \arcsin x$ - **funkcia arkussinus** • $D(f) = \langle -1, 1 \rangle \qquad H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ • **ohraničenosť:** ohraničená zdola aj zhora • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nepárna	

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
Inverzná funkcia k funkcii $y = \cos x$ pre $x \in \langle 0, \pi \rangle$ $y = \arccos x$ - **funkcia arkuskosinus** • $D(f) = \langle -1, 1 \rangle \qquad H(f) = \langle 0, \pi \rangle$ • **ohraničenosť:** ohraničená zdola aj zhora • **monotónnosť:** klesajúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	
Inverzná funkcia k funkcii $y = \mathrm{tg}x$ pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $y = \mathrm{arctg}x$ - **funkcia arkustangens** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ • **ohraničenosť:** ohraničená zdola aj zhora • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nepárna	
Inverzná funkcia k funkcii $y = \mathrm{cotg}x$ pre $x \in (0, \pi)$ $y = \mathrm{arccotg}x$ - **funkcia arkuskotangens** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = (0, \pi)$ • **ohraničenosť:** ohraničená zdola aj zhora • **monotónnosť:** klesajúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna