JOZEF ELIAŠ — JÁN HORVÁTH — JURAJ KAJAN

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

1. časť

JOZEF ELIAŠ – JÁN HORVÁTH – JURAJ KAJAN

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY

1. časť

3. vydanie

NAKLADATEĽSTVO alfa BRATISLAVA

Prvá časť tejto Zbierky úloh z vyššej matematiky zahrnuje látku z elementárnych základov matematickej logiky, teórie množín, reálnych čísiel, zo základov lineárnej algebry, zo základov vektorovej algebry, analytickej geometrie v rovine a v priestore. Každý odsek Zbierky obsahuje stručné zhrnutie základných pojmov a viet, potrebných k riešeniu úloh uvedených v tomto odseku, niekoľko vyriešených vzorových príkladov s typickými metódami riešenia a napokon úlohy na samostatné riešenie. Zbierka obsahuje 1 218 takýchto úloh aj s výsledkami, ktoré nadväzujú na knihu Kluvánek—Mišík—Švec: Matematika I.

Je vhodnou pomôckou pre študentov vysokých škôl technického i univerzitného smeru, ako aj pre tých, ktorí študujú popri zamestnaní.

Druhé opravené vydanie vychádza viazané.

1. vydanie 1966
2. vydanie 1968
3. vydanie 1971

Lektorovali: Jozef Chavko, Doc. Ing. Igor Kluvánek, CSc., Jozef Šajda, CSc.
Edícia teoretickej literatúry — vedúci redaktor Ing. Pavol Feranec

OBSAH

*) Čísla v zátvorke označujú číslo strany, na ktorej sú príslušné výsledky.

PREDHOVOR K PRVÉMU VYDANIU

Predložená Zbierka má vyplniť medzeru v našich učebných pomôckach z matematiky. Dnes existuje v matematickej literatúre veľa dlhšou praxou overených zbierok úloh z matematiky. Niektoré z nich boli aj u nás preložené (napr. G. N. Berman, Zbierka úloh z matematickej analýzy, Bratislava, SVTL, 1955; V. P. Minorskij, Sbírka úloh z vyšší matematiky, SNTL, Praha, 1958).

Pri vydávaní tejto Zbierky sme vychádzali predovšetkým z týchto dvoch hľadísk:

1. Existujúce zbierky nezahrnujú celý rozsah látky, požadovanej terajšími osnovami na našich vysokých školách technického smeru.

2. Doterajšie zbierky sú zväčša zamerané na denné formy štúdia a spôsobom spracovania nie sú vhodné pre štúdium popri zamestnaní, kde sa predpokladá individuálne štúdium.

Predkladaná 1. časť Zbierky zahrnuje látku z elementárnych základov matematickej logiky, teórie množín, reálnych čísiel, zo základov lineárnej algebry, zo základov vektorovej algebry, analytickej geometrie v rovine a v priestore. Prevažne ide o látku, ktorú doteraz väčšina zbierok určených pre vysoké školy technického smeru neobsahovala.

Spôsob spracovania sme zvolili predovšetkým so zreteľom na druhé z uvedených hľadísk. Okrem študentov denného štúdia, pre ktorých má byť Zbierka vhodnou učebnou pomôckou na cvičeniach z matematiky, je určená táto knižka najmä pre študujúcich popri zamestnaní. Má im čiastočne nahradiť cvičenia z matematiky a umožniť im osvojiť si metódy riešenia úloh z vyššej matematiky. Preto každý odsek Zbierky obsahuje a) stručné zhrnutie základných pojmov a viet, potrebných k riešeniu uvedených úloh v tomto odseku, b) niekoľko vyriešených vzorových príkladov s typickými metódami riešenia, c) úlohy na samostatné riešenie. Na konci knihy sú výsledky a pri ťažších úlohách aj návody na riešenie. Jednotlivé úlohy v týchto odsekoch sme sa snažili usporiadať podľa stupňa obťažnosti.

Nakoľko zbierka s takýmto výberom látky a spôsobom spracovania u nás dosiaľ nebola vydaná, sme si vedomí toho, že sme sa nemohli vyhnúť rôznym nepresnostiam a nedostatkom vo výbere alebo spracovaní látky. Preto budeme čitateľom povďační za všetky kritické pripomienky na zlepšenie tohto diela.

Záverom uvedieme niekoľko poznámok k tlačiarenskej úprave textu. Kvôli zjednodušeniu sadzby namiesto zlomku $\frac{a}{b}$ *používa sa znak* a/b, *namiesto znaku* $e^{\frac{a}{b}}$ *používa sa* $e^{a/b}$, *namiesto súčtu* $\frac{a}{b} + c$ *používa sa* $a/b + c$, *namiesto* $\frac{a}{b+c}$ *používa sa* $a/(b + c)$, *namiesto* $\frac{a}{2x}$ *používa sa* $a/2x$ *atď. Dúfame, že tieto úpravy nebudú robiť čitateľovi ťažkosti.*

Za mnohé významné pripomienky a kritické poznámky pre zlepšenie úrovne tohto diela ďakujeme touto cestou lektorom J. Chavkovi, odb. asistentovi Katedry matematiky SF VŠT v Košiciach, Doc. Ing. I. Kluvánkovi, CSc. z Katedry matematiky PF UPJŠ v Košiciach za lektorovanie časti Zbierky a J. Šajdovi, CSc., odb. asistentovi Katedry matematiky PF UK v Bratislave. Zároveň ďakujeme prom. ped. A. Kajanovej za nakreslenie obrázkov a Vydavateľstvu Alfa za starostlivosť, ktorú venovalo vydaniu tejto publikácie.

Autori

PREDHOVOR K DRUHÉMU VYDANIU

Druhé vydanie 1. časti Zbierky úloh z vyššej matematiky vychádza v podstate nezmenené. Spresnili sme iba zadania niektorých úloh a opravili sme chyby, ktoré sa nedopatrením dostali do prvého vydania.

Autori

Bratislava, 1968

1. ÚVOD

1,1. Elementy matematickej logiky

Výrok je vyslovená alebo napísaná myšlienka, o ktorej má zmysel hovoriť, či je pravdivá alebo nepravdivá. Pravdivosť výroku označujeme znakom „1", nepravdivosť znakom „0".

Nech $\mathfrak{M}$ je súbor výrokov. Znakmi A, B, C.... označme ľubovoľné výroky tohto súboru. Nazývame ich *výrokové premenné*. Pomocou určitých operácií medzi danými výrokmi súboru $\mathfrak{M}$ dostávame *zložené výroky*.

Najdôležitejšie zložené výroky sú:

A — *negácia* výroku A,
$A \vee B$ — *disjunkcia* alebo aj *logické sčítanie* výrokov A, B;
$A \wedge B$ — *konjunkcia* alebo aj *logické násobenie* výrokov A, B;
$A \Rightarrow B$ — *implikácia* výrokov A, B;
$A \Leftrightarrow B$ — *ekvivalencia* výrokov A, B.

V bežnej reči uvádzame uvedené výroky takto:
negáciu — predponou „ne" alebo „nie je pravda, že...",
disjunkciu — spojkou „alebo" v nevylučovacom zmysle,
konjunkciu — spojkou „a",
implikáciu — spojkami „ak..., tak..." alebo vetou „z..., vyplýva...",
ekvivalenciu — spojkami „vtedy a len vtedy ...".

Závislosť pravdivosti, resp. nepravdivosti zloženého výroku od pravdivosti, resp. nepravdivosti daných výrokov môžeme určiť tabuľkou.

Tabuľka 1

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Tabuľka 2

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Z *tab. 1* a *2* vyplýva, že negácia $\bar{A}$ je pravdivá, ak A je nepravdivý výrok.

Disjunkcia $A \vee B$ je pravdivá, ak aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý.

Konjunkcia $A \wedge B$ je pravdivá vtedy a len vtedy, ak oba výroky A, B sú pravdivé.

Implikácia $A \Rightarrow B$ je pravdivá, keď je vylúčený prípad: A je pravdivý výrok, B je nepravdivý výrok.

Ekvivalencia $A \Leftrightarrow B$ je pravdivá, ak oba výroky A, B sú pravdivé, alebo nepravdivé.

Takto uvažované vzťahy sú všeobecnejšie ako v bežnom ponímaní; najmä v implikácii nepožadujeme obsahovú súvislosť oboch výrokov A, B.

Ak platí $A \Rightarrow B$, hovoríme, že A je *postačujúca podmienka* pre B, alebo B je *nutná podmienka* pre A. To vyjadrujeme takto:

Aby platilo B, stačí, aby platilo A.

Aby platilo A, je nutné, aby platilo B.

Ak platí $A \Leftrightarrow B$, hovoríme, že A je *nutná a postačujúca podmienka* pre B. Vyjadrujeme to takto:

Aby platilo A, je nutné a stačí, aby platilo B.

Príklad 1. Nech výrok A je: „Rok má 13 mesiacov" a výrok B je: „$2 \times 2 = 4$". Utvorte výroky $\overline{A}$, $A \vee B$, $A \& B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ a zistite, či sú pravdivé alebo nepravdivé.

Riešenie. Negácia výroku A je: „Rok nemá 13 mesiacov". Výrok A je nepravdivý — „0", preto podľa *tab. 1* výrok $\overline{A}$ je pravdivý — „1".

Disjunkcia výrokov A, B je: „Rok má 13 mesiacov alebo $2 \times 2 = 4$".

Konjunkcia výrokov A, B je: „Rok má 13 mesiacov a $2 \times 2 = 4$".

Implikácia výrokov A, B je: „Ak rok má 13 mesiacov, potom $2 \times 2 = 4$".

Ekvivalencia výrokov A, B je: „Rok má 13 mesiacov vtedy a len vtedy, ak $2 \times 2 = 4$".

Výrok A je nepravdivý — „0", výrok B je pravdivý — „1", preto podľa *tab. 2* nastávajú prípady v druhom riadku tabuľky, t. j. disjunkcia $A \vee B$ je pravdivá — „1", konjunkcia $A \& B$ je nepravdivá — „0", implikácia $A \Rightarrow B$ je pravdivá — „1", ekvivalencia $A \Leftrightarrow B$ je nepravdivá — „0".

Príklad 2. Zostavme tabuľku pravdivosti alebo nepravdivosti zloženého výroku

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \& B). \tag{1}$$

Riešenie. Najprv rozložíme zložený výrok postupne na jeho zložky až po základné logické premenné, t. j. v našom prípade $A \Leftrightarrow B$, $A \& B$, A, B. Pre všetky logické premenné zostavíme tabuľky pravdivosti alebo nepravdivosti, z týchto zasa tabuľky pre zložitejšie zložky a nakoniec pre samotný zložený výrok. Pritom použijeme *tab. 1, 2.*

Tabuľka 3

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \& B$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \& B)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0

Z posledného stĺpca vidíme, že zložený výrok (1) je nepravdivý, ak oba výroky A, B sú nepravdivé. Ak aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý, potom zložený výrok (1) je pravdivý.

Príklad 3. Ukážme, že výrok

$$(A \& B) \Leftrightarrow \overline{(A \Rightarrow \overline{B})}, \tag{2}$$

je vždy pravdivý.

Riešenie. Rozložíme zložený výrok (2) na zložky $\overline{B}$, $A \Rightarrow \overline{B}$, $A \ \& \ B$, $\overline{A \Leftrightarrow \overline{B}}$. Zostavíme tabuľku *(tab. 4)*.

Tabuľka 4.

A	B	$\overline{B}$	$A \Rightarrow \overline{B}$	$A \ \& \ B$	$\overline{(A \Rightarrow \overline{B})}$	$(A \ \& \ B) \Leftrightarrow \overline{(A \Rightarrow \overline{B})}$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

Z posledného stĺpca vyplýva, že náš výrok je pravdivý pre akékoľvek dva výroky A, B.

1. Rozhodnite, ktoré z uvedených výrazov sú výroky:

a) Včera som sa učil.
b) $3 \times 3 = 10$.
c) $2x + 5 = 0$.
d) Počítaj!
e) Lacná výroba prúdu.
f) Číslo 20 je párne.
g) Kyselina sírová je kvapalina.
h) $0/0 = 0$.

2. Utvorte negácie výrokov:

a) Teleso padá rovnomerným pohybom.
b) Dva plus sedem nerovná sa deviatim.
c) Nie všetky reálne čísla sú kladné.
d) Spojnica dvoch rôznych bodov je priamka.
e) $3 \neq 5$.
f) $2 < -7$.

3. K daným výrokom A, B zistite, v ktorých prípadoch je implikácia $A \Rightarrow B$ pravdivá a formulujte ju slovami, ak A značí výrok:

a) Daný trojuholník ABC je rovnoramenný.
b) Číslo 12 je deliteľné štyrmi.
c) Kyslík potrebujú cicavce na dýchanie.
d) Dané číslo a je deliteľné ôsmimi.
e) Dané číslo a je kladné, p a q sú dané celé čísla.
f) Voda je ťažký kov.
g) Dané číslo a sa končí číslicou 0.
h) Daný štvoruholník je obdĺžnik.
i) Mesiac je najväčšia planéta slnečnej sústavy.

B je výrok:

a) Trojuholník ABC má súčet vnútorných uhlov 190°.
b) Bratislava má vyše 100 000 obyvateľov.
c) Rovnostranný trojuholník má každý vnútorný uhol rovný 60°.
d) Dané číslo a je deliteľné dvoma.
e) Platí $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$.

f) Chémia je veda o spoločnosti.
g) Dané číslo a je deliteľné troma.
h) Uhlopriečky daného štvoruholníka sú rovnaké dlhé.
i) Dunaj je európska rieka.

4. Pre ktoré prípady a) až i) z úlohy **3** platí $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$?

5. Vyslovte pravdivé implikácie a ekvivalencie z úlohy **3** pomocou zvratov: „je nutné", „stačí", „je nutné a stačí", „vtedy a len vtedy".

V úlohách **6**—**8** doplňte vynechaný text slovami: „je nutné", „stačí", „je nutné a stačí" tak, aby platili uvedené výroky.

6. a) Aby súčet dvoch celých kladných čísiel bol deliteľný dvoma..., aby každý sčítanec bol deliteľný dvoma.
b) Aby polynóm $a_0x^2 + a_1x + a_2$, $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 sú čísla, bol deliteľný dvojčlenom $(x - \alpha)$ ..., aby číslo α bolo nulový bod tohto polynómu.
c) Aby celé číslo bolo deliteľné stomi..., aby bolo deliteľné desiatimi.
d) Aby celé číslo bolo deliteľné stomi..., aby bolo deliteľné tisícami.

7. Aby platila nerovnosť $\sin x > 0$..., aby platilo $0 < x < \pi$.
b) Aby platila nerovnosť $\frac{1}{x} < 1$..., aby bolo $x > 1$.
c) Aby platila nerovnosť $\frac{1}{x} < 1$..., aby bolo $x > 1$ alebo $x < 0$.

8. a) Aby štvoruholník bol obdĺžnikom..., aby jeho uhlopriečky boli rovnaké.
b) Aby štvoruholník bol obdĺžnikom..., aby všetky jeho uhly boli rovnaké.
c) Aby štvoruholník bol rovnobežníkom..., aby jeho protiľahlé vnútorné uhly boli rovnaké.
d) Aby trojuholník bol pravouhlý..., aby súčet dvoch vnútorných uhlov rovnal sa tretiemu.
e) Aby trojuholníky boli podobné..., aby ich zodpovedajúce uhly boli rovnaké.
f) Aby v rovine bola jednoznačne určená kružnica..., aby boli dané jej tri body v rovine.

9. Dokážte pomocou *tab. 1* a *2*, že nasledujúce výroky sú vždy pravdivé, resp. vždy nepravdivé *(základné logické zákony)*:
a) $A \vee \bar{A}$ *(zákon vylúčenia tretieho)*;
b) $A \Rightarrow \bar{\bar{A}}$ *(zákon dvojitej negácie)*;
c) $(\bar{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A$ *(zákon Claviov)*;
d) $\bar{A} \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ *(zákon Dunsa Scotta)*;
e) $\bar{A} — A$ *(zákon sporu)*.

10. Ukážte pomocou *tab. 1* a *2*, že vzťah $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow \bar{A})$ *(zákon transpozície)* je vždy pravdivý výrok. Vysvetlite význam uvedeného výroku pri dôkazoch matematických viet.

Vyšetrite pomocou *tab. 1* a *2*, či nasledujúce výroky sú vždy pravdivé:

11. a) $A \Leftrightarrow \bar{A}$;
b) $\bar{A} \Rightarrow A$;
c) $A \Leftrightarrow A$;
d) $(A \vee A) \Rightarrow A$;
g) $A \Leftrightarrow [\bar{A} \Rightarrow (A \,\&\, A)]$;
h) $A \vee (A \Leftrightarrow \bar{A})$;
i) $(\overline{A \Rightarrow \bar{A}})$;

e) $\overline{[A \ \& \ (A \Leftrightarrow \overline{A})]}$; j) $\overline{(A \Leftrightarrow A)}$;

f) $A \Rightarrow A$; k) $(A \vee A) \Rightarrow (A \ \& \ A)$.

12. a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$; c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [A \Leftrightarrow (A \ \& \ B)]$; d) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

13. a) $[(A \ \& \ B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [\overline{C} \Rightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})]$;

b) $((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\overline{C} \Rightarrow (\overline{A} \ \& \ \overline{B}))$;

c) $(C \Rightarrow (A \vee B)) \Leftrightarrow [((C \ \& \ \overline{A}) \Rightarrow B) \vee ((C \ \& \ \overline{B}) \Rightarrow A)]$;

d) $((C \Rightarrow A) \ \& \ (C \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (C \Rightarrow (A \ \& \ B))$.

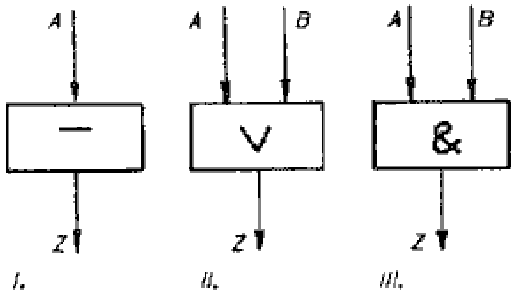
14. Ukážte, že pre konjunkciu a disjunkciu platia asociatívne zákony: $[A \ \& \ (B \ \& \ C)] \Leftrightarrow [(A \ \& \ B) \ \& \ C]$, $[A \vee (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \vee C]$.

15. Dokážte tabuľkovou metódou *de Morganove zákony*:

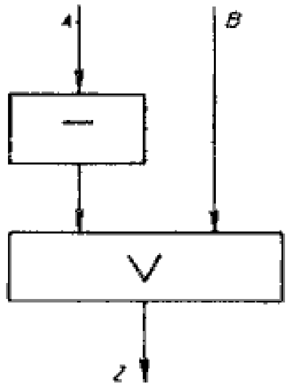
$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \Leftrightarrow \overline{(A \ \& \ B)}, \qquad (\overline{A} \ \mathrm{H} \ \overline{B}) \Leftrightarrow \overline{(A \vee B)}.$$

16. Dokážte pomocou tabuľkovej metódy distributívne zákony pre konjunkciu a disjunkciu:

$$[A \ \& \ (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \ \& \ B) \vee (A \ \& \ C)],$$
$$[A \vee (B \ \& \ C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \ \& \ (A \vee C)].$$



Obr. 1



Obr. 2

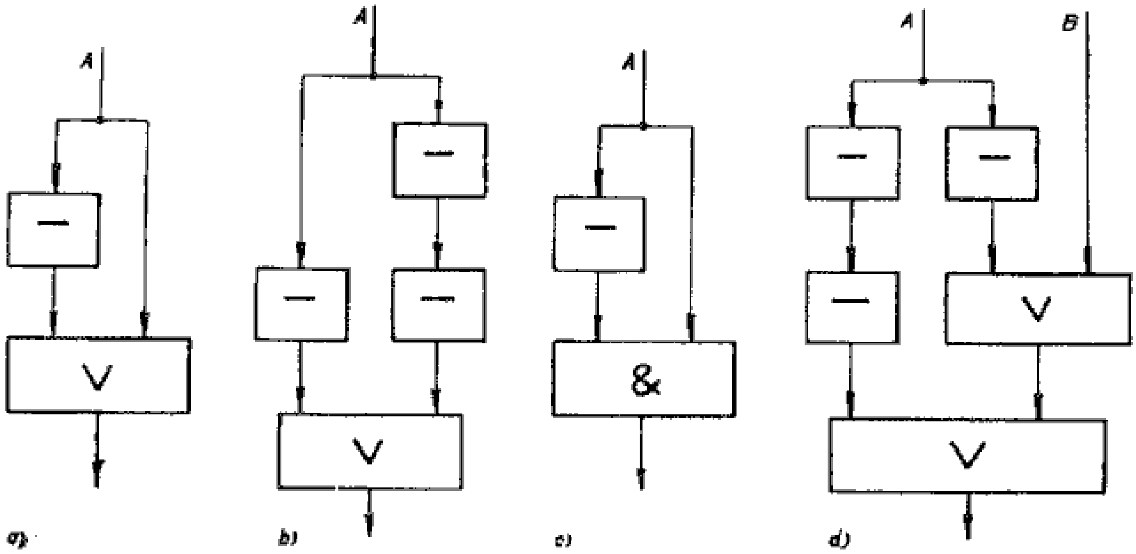
Zložené výroky možno jednoducho znázorniť, ak priradíme k základným logickým výrokom nasledujúce elektrické zariadenia podľa *obr. 1*. Znaky A, B, C, ... predstavujú vstupy a znak Z výstup týchto elektrických zariadení. Počet vstupov zodpovedá počtu logických premenných v zloženom výroku, výstup je vždy jediný. Na každom vstupe alebo výstupe môže byť prítomný, resp. neprítomný signál a označuje sa to „1", resp. „0". Zaradenie I. realizuje negáciu, signál na výstupe je práve vtedy, keď nie je na vstupe a naopak. Zariadenie II. realizuje disjunkciu, signál na výstupe je práve vtedy, ak je aspoň na jednom vstupe. Zariadenie III. realizuje konjunkciu, signál na výstupe je práve vtedy, keď je signál súčasne na oboch vstupoch.

17. Ukážte, že zariadenie na *obr. 2* realizuje implikáciu.

18. Ukážte, že zariadenia na *obr. 3* realizujú logické zákony z úlohy *9* a), b), d), e).

19. Spôsobom uvedeným v úlohe *17* znázornite tieto zložené výroky:

a) $A \ \& \ (B \vee C)$; b) $\overline{(A \vee B)} \vee (B \ \& \ C)$; c) $(A \ \& \ B) \vee (B \vee \overline{A})$.



Obr. 3

1,2. Základné druhy matematických dôkazov

Každý pravdivý výrok v matematike nazývame *matematickou vetou*. Dôkaz matematickej vety je postup, ktorým zisťujeme pravdivosť daného výroku. Najčastejšie sa používa 1. *priamy dôkaz* a 2. *nepriamy dôkaz*.

1. *Priamy dôkaz* výroku D sa skladá a) zo zistenia pravdivosti implikácie $C \Rightarrow D$, b) zo zistenia pravdivosti výroku C.

2. *Nepriamy dôkaz* výroku D sa skladá a) zo zistenia pravdivosti implikácie $\overline{D} \Rightarrow \overline{C}$, b) zo zistenia pravdivosti výroku C.

Zo zákona sporu vyplýva, že $\overline{C}$ je nepravdivý výrok a z implikácie $\overline{D} \Rightarrow \overline{C}$ vyplýva, že i $\overline{D}$ je nepravdivý výrok. Z toho vyplýva, že platí výrok D.

Dôkaz nutnej a postačujúcej podmienky $A \Leftrightarrow B$ sa skladá z dôkazu implikácií a) $A \Rightarrow B$, b) $B \Rightarrow A$.

Príklad 1. Dokážme: Ak celé číslo x nie je deliteľné troma, potom $x^2 - 1$ je deliteľné troma (výrok D).

Priamy dôkaz. Z troch po sebe idúcich celých čísel $x - 1$, x, $x + 1$ aspoň jedno je deliteľné troma (výrok C). Ak podľa predpokladu číslo x nie je deliteľné troma, potom alebo $x - 1$, alebo $x + 1$ je deliteľné troma, teda aj $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ je deliteľné troma ($C \Rightarrow D$).

Zostáva zistiť, že z troch po sebe idúcich čísiel je jedno deliteľné troma (pravidvosť výroku C). Tento výrok je pravdivý, lebo pre každé celé číslo x existujú také celé čísla k a h, že platí $x = 3k + h$, kde $h = 0, 1, 2$. Nech $h = 0$, potom $x = 3k$ je deliteľné troma; ak $h = 1$, potom $x - 1 = 3k$ je deliteľné troma. Pre $h = 2$ je $x + 1 = 3k + 2 + 1 = 3(k + 1)$ deliteľné troma.

Príklad 2. Dokážme vetu: Nech a, b sú dve čísla, pre ktoré platí $a \,.\, b \neq 0$ (výrok C), potom tiež platí $b \neq 0$ (výrok D).

Nepriamy dôkaz. Predpokladajme opak, že platí $b = 0$ (výrok $\overline{D}$). Potom zrejme tiež platí $a \,.\, b = 0$ ($\overline{D} \Rightarrow \overline{C}$), čo je v spore s predpokladom vety, že $a \,.\, b \neq 0$, teda platí $b \neq 0$ (výrok D).

Pre výroky o prirodzených číslach sa používa *metóda dôkazu matematickou indukciou*. Dôkaz matematickou indukciou je založený na vete:

Nech každému prirodzenému číslu n je priradený výrok $V(n)$. Nech $V(1)$ je pravdivý výrok a nech platí pre každé prirodzené číslo n implikácia $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$. Potom platí pre každé prirodzené číslo n výrok $V(n)$ (princíp matematickej indukcie).

Dôkaz matematickou indukciou sa teda skladá a) zo zistenia pravdivosti výroku $V(1)$, b) zo zistenia pravdivosti implikácie $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ pre ľubovoľné prirodzené číslo n. Z princípu matematickej indukcie vyplýva, že výrok $V(n)$ platí pre každé prirodzené číslo n.

Príklad 3. Vypočítajme súčet s_n prvých n nepárnych čísiel.

Riešenie. Pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ dostaneme

$$\begin{array}{ll} s_1 = 1 = 1^2, & \ldots V(1) \\ s_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2, & \ldots V(2) \\ s_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2, & \ldots V(3) \\ s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 & \ldots V(4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Usudzujeme, že vo všeobecnosti platí

$$s_n = 1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2, \ \ldots \ V(n)$$

pre každé prirodzené n. Že je to naozaj tak, dokážeme matematickou indukciou.

a) Platí $s_1 = 1^2$, [(V(1)].

b) Ak platí $s_n = n^2$, [$V(n)$], dokážeme, že platí, aj $s_{n+1} = (n+1)^2$, čiže dokážeme $V(n) \Rightarrow V(n+1)$. Nech teda platí $s_n = n^2$, [$V(n)$], potom je $s_{n+1} = s_n + [2(n+1) - 1] = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ matematickej čo je $V(n+1)$. Teda platí $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ a podľa vety o matematickej indukcii $s_n = n^2$ pre všetky prirodzené čísla.

20. Dokážte, že pre celé čísla r, s a reálne čísla*) $a \neq 0$, $b \neq 0$ platí:

a) $a^r : a^s = a^{r-s}$; b) $a^r/b^r = (a/b)^r$.

21. Dokážte:

a) Pre ľubovoľné čísla a, b je $a^2 + b^2 \geqq 2ab$.

b) Súčet kladného čísla a jeho prevrátenej hodnoty nie je menší ako 2. Je možné, aby sa rovnal 2?

c) Ak sa zväčší číslo a o x, zväčší sa jeho druhá mocnina o $x(2a + x)$.

22. Dokážte:

a) Ak sa zväčší číslo x k-krát, zväčší sa jeho dekadický logaritmus o $\log k$.

b) Ak sa zväčší číslo x o h, zväčší sa jeho dekadický logaritmus o $\log(1 + h/x)$.

c) Ak sa zväčší dekadický logaritmus čísla o m, zväčší sa toto číslo o $x(10^m - 1)$.

23. Nech rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ má celočíselné koeficienty, pričom $a \neq 0$ a b je nepárne celé číslo. Dokážte, že rovnica nemôže mať dvojnásobný koreň!

Dokážte vety uvedené v úlohách 24—27.

24. Súčin dvoch ľubovoľných párnych čísiel je deliteľný štyrmi.

25. Pre každé prirodzené číslo n väčšie ako dve, číslo $n^2 - 1$ nie je prvočíslom.

26. a) Každé nepárne číslo možno napísať v tvare $2k + 1$, kde k je celé číslo.

b) Súčin dvoch nepárnych čísiel je číslo nepárne.

c) Súčet dvoch párnych čísiel je číslo párne.

d) Súčet dvoch nepárnych čísiel je číslo párne.

e) Súčet párneho a nepárneho čísla je číslo nepárne.

f) Súčin čísiel, z ktorých aspoň jedno je párne, je párny.

g) Súčin dvoch po sebe idúcich celých čísiel je vždy deliteľný dvoma.

27. Ak ležia body M, N v tej istej polrovine určenej priamkou p a ak zostrojíme bod M' súmerný k bodu M podľa priamky p, potom zo všetkých bodov priamky p má jej priesečník P s priamkou $M'N$ najmenší súčet vzdialeností od bodov M, N.

*) Všade v ďalšom pod číslom budeme rozumieť reálne číslo.

V úlohách **28** až **31** dokážte uvedené vety nepriamo.

28. Počet prvočísiel je nekonečný.

29. $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

30. a) Rovnica $ax = b$, kde $a \neq 0$ má jediné riešenie.
b) Rovnica $a + x = b$ má jediné riešenie.

31. a) V každom trojuholníku ležia oproti rovnakým uhlom rovnaké strany.
b) Ak v štvoruholníku je súčet protiľahlých uhlov $180°$, potom možno štvoruholníku opísať kružnicu.

32. Predpokladajme, že počet vlasov na ľudskej hlave nepresahuje 100 000. Dokážte nepriamo vetu: Aspoň dvaja ľudia v meste, ktoré má 200 000 obyvateľov, majú rovnaký počet vlasov.

33. Zistite, či možno dokázať nepriamo implikáciu: Ak číslo a je nepárne, potom je deliteľné štyrmi. Môžeme dôjsť k sporu? Ak nie, vyložte, prečo. Zovšeobecnite na ľubovoľný nepravdivý výrok.

34. Dokážte, že súčet dvoch zlomkov v základnom tvare s rôznymi menovateľmi nie je celé číslo.

Dokážte priamym dôkazom vety uvedené v úlohách **35** a **36**.

35. a) Kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ má reálne korene vtedy a len vtedy, keď $D = b^2 - 4ac \geqq 0$.
b) Mnohočlen $ax^2 + bx + c$ je úplným štvorcom vtedy a len vtedy, ak platí $b^2 - 4ac = 0$.
c) Aby kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ mala aspoň jeden koreň rovný nule, je nutné a stačí, aby $c = 0$.

36. a) Aby trojuholník bol rovnoramenný, je nutné a stačí, aby jeden jeho vonkajší uhol bol dvojnásobkom vnútorného uhla, ktorý s ním nie je vedľajší.
b) Aby kužeľ bol rotačný, je nutné a stačí, aby všetky jeho povrchové úsečky boli rovnaké.
c) Dva kruhové valce majú rovnaké objemy vtedy a len vtedy, keď plošné obsahy ich plášťov sú nepriamo úmerné polomerom základní.
d) Hranolu možno opísať valec vtedy a len vtedy, keď hranol je priamy a základňa hranola je mnohouholník, ktorému možno opísať kružnicu.

37. V nasledujúcich úlohách zameňte najprv uvedené vety za ekvivalentné a tieto potom dokážte:
a) Ak priamka prechádza stredom úsečky (v rovine) a súčasne je kolmá na ňu, potom je to os úsečky.
b) Ak je $a < b$ a $x > 0$, potom je aj $ax < bx$.
c) Ak čísla x, y vyhovujú rovniciam $x + y = 4$ a $2x + y = 7$, potom vyhovujú aj rovnici $3x + 2y = 11$.
d) Ak sú dve reálne čísla a, b kladné alebo ak obe sú záporné, potom ich súčin je kladné číslo.
e) Ak v kvadratickej rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, je $b^2 - 4ac > 0$, alebo $b^2 - 4ac = 0$, potom má táto rovnica reálne korene (pozri úlohu 13b).

38. Presvedčte sa na nasledujúcich úlohách, že implikácia $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná implikácii $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$:
a) Ak číslo je deliteľné šiestimi, je párne.
b) Ak sú dve úsečky rovnobežné, nemajú spoločný bod.

c) Dva body, ktoré ležia na priamke rovnobežnej s danou priamkou, majú rovnakú vzdialenosť od tejto priamky (pozri úlohu **10**).

39. Vetu „Ak $a \cdot b = 0$, potom $a = 0$ alebo $b = 0$" zameňte ekvivalentnou vetou podľa úlohy **13a**. Vyslovte a dokážte takto pozmenenú vetu.

Metódou matematickej indukcie dokážte:

40. $\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{5}{n} + \ldots + \frac{(2n-1)}{n} = n.$

41. $1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1) = (-1)^{n-1}n.$

42. $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$

43. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

44. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1).$

45. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$

46. $1^2 - 3^2 + 5^2 - \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)^2 = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2} - \frac{1}{2}.$

47. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$

48. $1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + 10 \cdot 13 + \ldots + (3n-2)(3n+1) =$
$= \frac{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}{9} + \frac{8}{9}.$

49. $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) =$
$= \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{6} + \frac{1}{2}.$

50. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$

51. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$

52. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$

53. $\frac{1}{1 \cdot k} + \frac{1}{k(2k-1)} + \ldots + \frac{1}{[n(k-1)-(k-2)][n(k-1)+1]} =$
$= \frac{n}{n(k-1)+1}.$

54. $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}.$

55. $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{13}{36} -$
$- \frac{3(n+3)^2 - 1}{3(n+2)(n+3)(n+4)}.$

56. $\dfrac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \dfrac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

57. Dokážte, že

a) číslo $n^5 - n$ je deliteľné piatimi pre každé prirodzené n;
b) číslo $n^3 + 3n^2 + 2n$ je deliteľné šiestimi pre každé prirodzené n;
c) číslo $n^7 - n$ je deliteľné 42 pre každé prirodzené $n \geqq 2$;
d) číslo $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ je deliteľné deviatimi pre každé prirodzené n;
e) číslo $5^{n+1} + 6^{2n-1}$ je deliteľné číslom 31 pre každé prirodzené n;
f) číslo $n^3 - 4n$ je deliteľné alebo číslom 15, alebo 16 pre každé prirodzené $n > 2$.

58. Dokážte matematickou indukciou, že pre aritmetickú postupnosť s prvým členom a_1 a s diferenciou d platí:

a) $a_n = a_1 + (n-1)\,d$; b) $s_n = na_1 + \dfrac{1}{2}\,n(n-1)\,d$,

kde a_n je n-tý člen aritmetickej postupnosti a s_n značí súčet prvých n členov.

59. Dokážte matematickou indukciou, že pre geometrickú postupnosť s prvým členom a_1 a kvocientom $q \neq 1$, platí:

a) $a_n = a_1q^{n-1}$; b) $s_n = a_1\,\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$,

kde a_n je jej n-tý člen a s_n je jej súčet prvých n členov.

Dokážte pomocou matematickej indukcie:

60. $$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \dfrac{(2n+1)\,x}{2}}{2 \sin \dfrac{x}{2}}, \quad \text{pre } \sin \frac{x}{2} \neq 0.$$

61. $$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \dfrac{(n+1)\,x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}, \quad \text{pre } \sin \frac{x}{2} \neq 0.$$

62. $$\sin x + 2 \sin 2x + \ldots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin (n+1)\,x}{4 \sin^2 \dfrac{x}{2}}, \quad \text{pre } \sin \frac{x}{2} \neq 0.$$

63. $$\sin^2 x - \sin^2 3x + \ldots + (-1)^{n-1} \sin^2 (2n-1)\,x = \frac{(-1)^{n-1} \sin^2 2nx - [1 + (-1)^{n-1}] \sin^2 x}{2 \cos 2x}, \quad \text{pre } \cos 2x \neq 0.$$

64. Matematickou indukciou dokážte:

a) n bodov v rovine, z ktorých žiadne tri neležia na tejže priamke, možno spojiť $n(n-1)/2$ priamkami;
b) n priamok v rovine, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom, má $n(n-1)/2$ priesečníkov.

65. Pomocou matematickej indukcie dokážte:

a) Vypuklý n-uholník má $n(n - 3)/2$ uhlopriečok.

b) n rôznych priamok v rovine, ktoré majú spoločný priesečník, delí rovinu na $2n$ častí.

c) n rôznych bodov v priestore, pričom žiadne tri neležia na jednej priamke a žiadne štyri v jednej rovine, určuje $n(n - 1)(n - 2)/6$ rovín.

d) n kružníc, z ktorých každé dve sa navzájom pretínajú, rozdeľuje rovinu na $n^2 - n + 2$ častí.

66. Na koľko častí delí n rovín priestor, ak každé tri z týchto rovín sa pretínajú a žiadne štyri nemajú spoločný bod?

67. Daných je n ľubovoľných štvorcov. Dokážte matematickou indukciou, že ich možno rozdeliť na také mnohouholníky, z ktorých možno zostaviť nový štvorec.

68. Nájdite pomocou matematickej indukcie stranu a_n pravidelného 2^n-uholníka, vpísaného do kruhu s polomerom R ($n > 1$).

69. V rovine je daných n kružníc. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre každé rozloženie kružníc v rovine možno zafarbiť bielou a čiernou farbou jednotlivé oblasti tak, aby každé dve susedné mali inú farbu.

70. Dokážte, že každú sumu väčšiu ako 7 halierov možno zaplatiť trojhaliernikmi a päťhaliernikmi.

1,3. Pojem množiny; základné operácie s množinami

Množinou rozumieme súhrn určitých vecí (objektov); jednotlivé veci (objekty) nazývame *prvkami* množiny. Ak prvok a patrí do množiny M, píšeme $a \in M$. Ak prvok a nepatrí do množiny M, píšeme $a \bar{\in} M$. Množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok, nazýva sa *prázdna množina*, označujeme ju $\emptyset$.

Množinu M nazývame *podmnožinou* množiny N, ak každý prvok množiny M je aj prvkom množiny N a označujeme to $M \subset N$. Ak súčasne platí $M \subset N$ a $N \subset M$, potom $M = N$.

Súčtom (zjednotením) množín M a N nazývame množinu všetkých tých prvkov, ktoré patria aspoň do jednej z množín M, N, označujeme ho $M \cup N$. *Prienikom* množín M, N nazývame množinu všetkých prvkov, ktoré patria súčasne do množiny M aj N, označujeme ho $M \cap N$. Ak platí $M \cap N = \emptyset$, potom M, N nazývame *disjunktnými množinami*. *Rozdielom* množín M, N, ktorý označujeme $M - N$, nazývame množinu všetkých prvkov, ktoré patria do M, ale nepatria do N. *Symetrickým rozdielom* dvoch množín M, N nazývame súčet množín $M - N$ a $N - M$. Označujeme to $M \triangle N$; platí $M \triangle N = (M - N) \cup (N - M)$. Ak X je daná množina a $M \subset X$, potom $X - M$ nazývame *doplnkom (komplementom)* množiny M v množine X a označujeme ho $\overline{M}$.

Množinu nazývame *konečnou*, ak má konečný počet prvkov. Množinu, ktorá nie je konečná, nazývame *nekonečnou*.

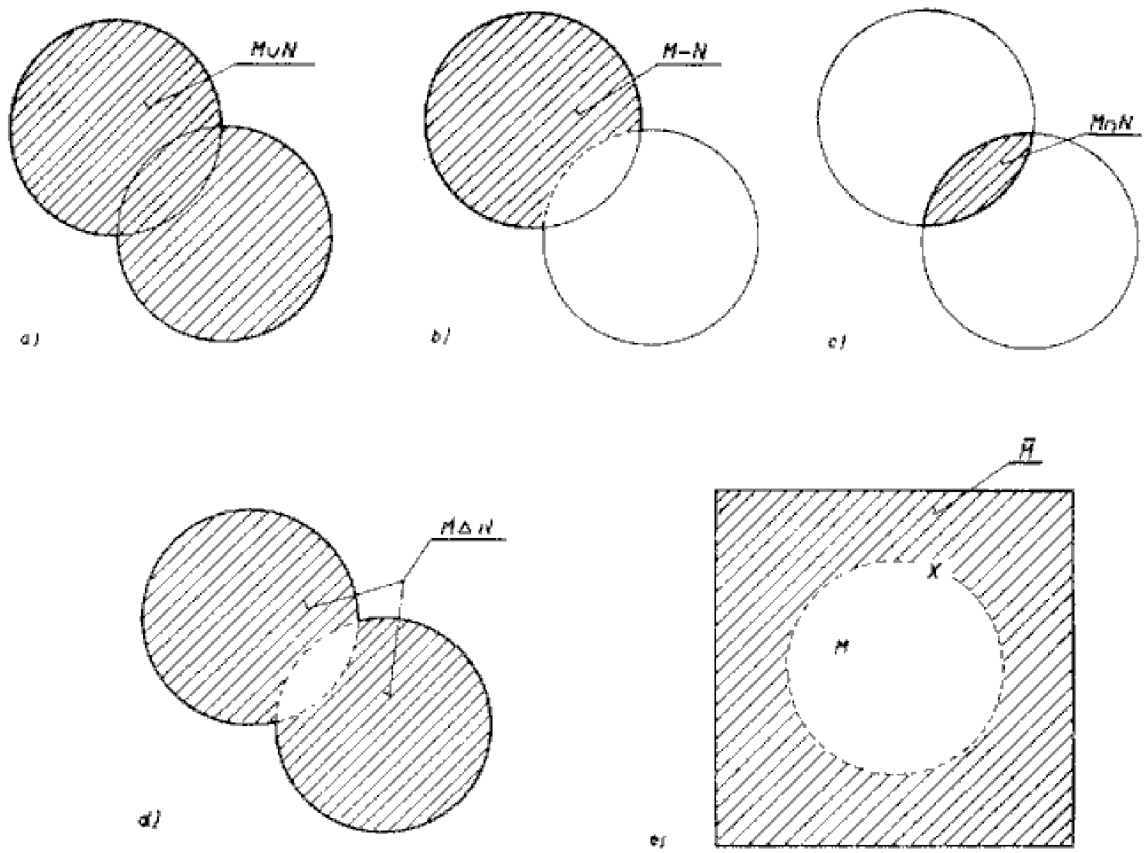
Nech množiny M, N sú kruhy, na *obr. 4a až 4d* je znázornený a) súčet, b) rozdiel, c) prienik, d) symetrický rozdiel množín M, N ako vyšrafovaná plocha. Na *obr. 4e* je znázornený doplnok množiny M v množine X.

Príklad. Dokážme, že pre ľubovoľné množiny A, B, X platí

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B),$$

tzv. *de Morganove pravidlo*.

Riešenie. Ak $x \in X - (A \cup B)$, potom $x \in X$ a $x \bar{\in} A \cup B$, t. j. $x \in X$, $x \bar{\in} A$, $x \bar{\in} B$. Teda $x \in X - A$, $x \in X - B$ a teda $x \in (X - A) \cap (X - B)$. Zatiaľ sme dokázali, že $X - (A \cup B) \subset$



Obr. 4

$\subset (X - A) \cap (X - B)$. Naopak, ak $x \in (X - A) \cap (X - B)$, potom $x \in X - A$ a $x \in X - B$, t. j. $x \in X$, ale $x \bar{\in} A$, $x \bar{\in} B$. Teda

$$x \bar{\in} X \text{ a } x \in A \cup B \text{ t. j. } x \in X - (A \cup B).$$

Dokázali sme, že $(X - A) \cap (X - B) \subset X - (A \cup B)$. Z definície rovnosti dvoch množín vyplýva

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B).$$

71. Aký geometrický útvar je daný množinou všetkých bodov

a) v rovine; b) v priestore,

ktoré majú rovnakú vzdialenosť $r > 0$ od daného bodu?

72. Aký geometrický útvar je daný množinou všetkých bodov

a) v rovine; b) v priestore,

ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch rôznych bodov?

73. Napíšte množinu všetkých arabských cifier.

74. Nech množina $A = \{1, 4, 7, 9, 12\}$, $B = \{2, 4, 6, 9, 13\}$. Utvorte množiny: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

75. Nech množina $A = \{0, 1, 2, 3\}$; čomu sa rovná $A \cup A$, $A \cap A$, $A - A$? Zovšeobecnite!

76. Nech A je množina všetkých ľudí žijúcich na zemeguli starších ako 20 rokov a B množina všetkých ľudí v Európe mladších ako 30 rokov. Zistite, čo predstavujú nasledujúce množiny:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A - B, \quad B - A, \quad A \triangle B.$$

77. M je množina všetkých párnych prirodzených čísiel menších ako 10. Napíšte všetky jej podmnožiny. Vyšetrite, ako súvisí počet všetkých podmnožín množiny s počtom jej prvkov, ak množina je konečná.

78. Nech A je množina všetkých čísiel deliteľných dvoma, B množina všetkých čísiel deliteľných troma, C množina všetkých čísiel deliteľných šiestimi. Zistite, ktoré z nasledujúcich vzťahov sú správne: $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$, $B \subset A$, $C \subset A$, $C \subset B$, $A \cup B = C$, $A - B = C$, $A \cap B = C$.

79. Nájdite množinu, ktorú tvoria všetky riešenia rovnice:

a) $\cos(\pi x/2) = 0$; b) $\sin \pi x = 0$.

Aký je súčet a prienik týchto množín?

80. Nech M je množina všetkých prirodzených čísiel menších ako 16, nech M_1 je jej podmnožina, ktorá obsahuje všetky párne čísla, M_2 podmnožina, ktorá obsahuje všetky čísla deliteľné troma, M_3 podmnožina, ktorá obsahuje všetky čísla deliteľné piatimi. Nájdite množiny:

a) $M_1 \cup M_2$;
b) $M_1 \cup M_2 \cup M_3$;
c) $M_2 \cap M_3$;
d) $M_1 \cap M_2 \cap M_3$;
e) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3$;
f) $(M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3)$;
g) $M_2 - M_1$;
h) $M_1 - M_2$;
i) $(M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)$;
j) $(M_1 \cup M_2) - (M_1 \cap M_2)$;
k) $(M_1 \cap M_2) \cup M_3$;
l) $(M_1 \cup M_2) \cap (M_2 \cup M_3)$;
m) $M_1 \triangle M_2$;
n) $M_2 \triangle M_1$.

81. Znázornite množiny a)—n) z úlohy **80**, ak pod M_1, M_2, M_3 rozumieme štvorce o rovnakej strane so stredmi S_1, S_2, S_3, kde S_3 je stred úsečky S_1S_2 a priamka určená bodmi S_1, S_2 prechádza protiľahlými vrcholmi uvedených štvorcov.

82. Nech množina A je kruh v rovine so stredom v bode S a polomerom r_1, nech množina B je kruh s týmže stredom a s polomerom r_2, nech množina C je kruh s týmže stredom a polomerom r_3, pričom $0 < r_1 < r_2 < r_3$.

a) Znázornite množiny $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A - B$, $B - A$, $B - C$, $C - B$, $A \triangle B$;

b) Čo je A, $\bar{B}$, $\bar{C}$ vzhľadom na C? Znázornite!

83. Ukážte, že pre množiny M, M_1, M_2, M_3 z úlohy **80** platí: $M - (M_1 \cup M_2 \cup M_3) = (M - M_1) \cap (M - M_2) \cap (M - M_3)$, $M - (M_1 \cap M_2 \cap M_3) = (M - M_1) \cup (M - M_2) \cup (M - M_3)$. Zovšeobecnite!

84. M je množina všetkých rovnobežníkov a N množina všetkých štvoruholníkov, ktorých uhlopriečky sa poltia. Dokážte, že $M = N$.

85. Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Dokážte, že platí:

a) $\emptyset \subset A$;
b) $A \subset A$;
c) ak $A \subset B$ a $B \subset C$, potom $A \subset C$;
d) ak $A \subset B$ a $B \subset A$, potom $A = B$;
e) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$;
g) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

86. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C, X platí:

a) $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$;
b) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

d) $(A - B) \cap B = \emptyset$; $A = (A \cap B) \cup (A - B)$; $A - B = A - (A \cap B)$;

e) ak $A \subset X$, potom $A - B = A \cap (X - B)$;

f) ak $A \subset X$, potom $(X - A) \cup A = X$, alebo $A = X - (X - A)$;

g) $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$, $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$;

h) ak $A \subset X$ a $B \subset X$, potom $A \cup B = X - [(X - A) \cap (X - B)]$, $A \cap B = X - [(X - A) \cup (X - B)]$.

87. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C, D platí:

a) $A \subset B$ vtedy a len vtedy, keď $A \cup B = B$;

b) $A \subset B$ vtedy a len vtedy, keď $A \cap B = A$;

c) $A \subset B$ vtedy a len vtedy, keď $A - B = \emptyset$;

d) $A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$;

e) ak $A \subset C$ a $B \subset D$, potom $A \cup B \subset C \cup D$, $A \cap B \subset C \cap D$;

f) ak $A \subset C$ a $B \subset C$, potom $A \cup B \subset C$;

g) ak $C \subset A$ a $C \subset B$, potom $C \subset A \cap B$;

h) ak $A \subset B$, potom $C - B \subset C - A$.

88. Nech A, B, S sú ľubovoľné množiny a nech $A \subset S$. Dokážte, že platí:

a) $A \cup \overline{A} = S$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$;

b) $\overline{\emptyset} = S$, $\overline{S} = \emptyset$;

c) $\overline{\overline{A}} = A$;

d) $A \subset B$ je ekvivalentné $\overline{B} \subset \overline{A}$;

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Doplnky uvažujte v množine S.

89. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $A \triangle B = (A \cup B) - (B \cap A)$;

b) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;

c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

d) $A \triangle (A \cap B) = A - B$;

e) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$.

2. REÁLNE ČÍSLA

2,1. Základné pojmy a vlastnosti reálnych čísiel

Prirodzenými číslami nazývame čísla: 1, 2, 3, 4, ... Súčet a súčin prirodzených čísiel je prirodzené číslo. Každé číslo, ktoré možno vyjadriť ako rozdiel dvoch prirodzených čísiel, nazývame *celým číslom*. Súčet, rozdiel, súčin celých čísiel je celé číslo. Každé číslo, ktoré možno vyjadriť ako podiel celého čísla a celého čísla rôzneho od nuly, nazývame *racionálnym číslom*. Súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch racionálnych čísiel (okrem delenia nulou) je racionálne číslo. Všetky racionálne čísla môžeme vyjadriť v tvare konečných alebo nekonečných periodických desatinných zlomkov. Čísla, ktoré možno vyjadriť v tvare nekonečného neperiodického desatinného zlomku, nazývame *iracionálnymi číslami*. Takými sú napr. čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, π atď. Množina všetkých racionálnych a iracionálnych čísiel sa nazýva *množinou reálnych čísiel*.

Množina reálnych čísiel má tieto základné vlastnosti:

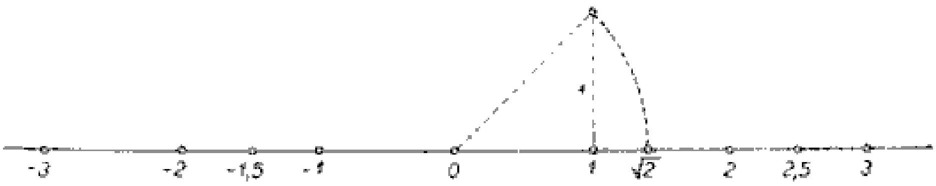
1. je *usporiadaná*, t. j. pre každé dve reálne čísla a, b platí práve jeden zo vzťahov

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a.$$

2. *je všade hustá*, t. j. medzi dvoma ľubovoľnými rozličnými reálnymi číslami a, b, pričom $a < b$, existuje aspoň jedno reálne číslo c také, že $a < c < b$.

3. možno ju *jednojednoznačne zobraziť* na číselnej osi, t. j. každému bodu na číselnej osi je priradené práve jedno reálne číslo a naopak (pozri *obr. 5*).

4. súčet, rozdiel, súčin a podiel reálnych čísiel s nenulovým deliteľom je reálne číslo.

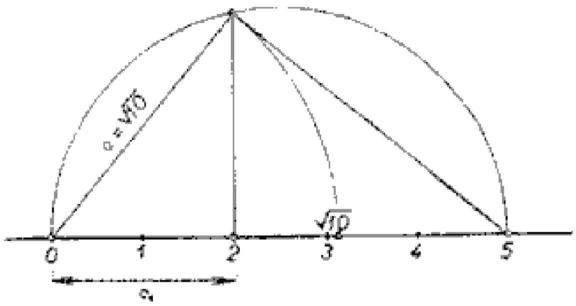


Obr. 5

Príklad 1. Dokážme, že reálne číslo $\sqrt{10}$ je iracionálne číslo a znázornime ho.

Riešenie. Dôkaz urobíme nepriamo. Predpokladajme, že $\sqrt{10} = p/q$, kde p, q sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Potom platí $10q^2 = p^2$. Číslo $10q^2$ je párne, preto p^2 a teda aj p je párne číslo, t. j. $p = 2r$, kde r je prirodzené číslo. Potom platí $10q^2 = 4r^2$. Z toho $5q^2 = 2r^2$. Číslo $2r^2$ je párne, preto aj q^2 a teda aj q je párne číslo. Ale p, q sú podľa predpokladu nesúdeliteľné čísla. To je spor. Reálne číslo $\sqrt{10}$ nie je racionálne číslo, ale číslo iracionálne.

Pri zostrojení obrazu čísla $\sqrt{10}$ na číselnej osi použijeme jednu z Euklidových viet o pravouhlom trojuholníku: $a^2 = c_1 c$, kde a je odvesna, c prepona a c_1 úsek priľahlý k odvesne a (pozri *obr. 6*).



Obr. 6

Príklad 2. Dokážeme, že medzi dvoma iracionálnymi číslami a, b ($a < b$) leží nekonečne mnoho iracionálnych čísiel.

Riešenie. Z Archimedovej vlastnosti vyplýva, že ak a, b ($0 < a$, $0 < b$, $a < b$) sú iracionálne čísla, potom ku každému prirodzenému číslu n existuje také prirodzené číslo m, že platí $m(b - a) > n$. Odtiaľ vyplýva $b - a > n/m$. Potom platí

$$b > \frac{k}{m} + a > a,$$

kde $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Teraz dokážeme, že každé číslo tvaru $a + k/m$ je iracionálne. Ak by totiž bolo racionálne, potom aj rozdiel

$$\left(a + \frac{k}{m}\right) - \frac{k}{m} = a$$

by bol racionálnym číslom. To je spor s tým, že a je iracionálne číslo.

Ďalej ukážeme nepriamo, že je ich nekonečne mnoho. Povedzme, že ich je konečný počet N, kde N je nejaké pevné prirodzené číslo. Ak $n = N + 1$, z uvedeného vyplýva, že medzi číslami a a b existuje $N + 1$ iracionálnych čísiel. To je spor, teda medzi číslami a a b existuje nekonečne mnoho iracionálnych čísiel.

90. Na číselnej osi znázornite čísla:

a) $1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2, 4, -3, 7, 5/2$;

b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{2}$.

91. Ktoré z nasledujúcich čísiel: -2; $3/5$; $2,7$; $\log_2 16$; $2^{1/2}$; 13; 0; $\sqrt{2}/\sqrt{3}$; π; $2^{\sqrt{4}}$ sú

a) prirodzené;

b) celé;

c) racionálne;

d) iracionálne.

92. Nájdite vzťahy usporiadania medzi číslami

a) $\frac{22}{7}, \pi, \frac{355}{113}$; b) $\frac{13}{15}, \sqrt{7}, \frac{16}{6}$; c) $\frac{5}{2}, \sqrt{6}, \frac{49}{22}$; d) $\sqrt{13}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}$.

93. Odpovedzte na tieto otázky:

a) ktoré z čísiel b, $-2b$ je väčšie;

b) za akých podmienok je číslo $x - y$ menšie ako číslo $x + y$;

c) za akých podmienok je číslo xy väčšie ako číslo x/y;

d) pre aké číslo x je číslo $3x - 4$ kladné, záporné, rovná sa nule;

e) pre aké číslo x je $x + 2$ väčšie ako 2?

94. Nech a) číslo $\alpha = 3{,}9735\ldots$; $\beta = 4{,}02$;

b) číslo $\alpha = 0{,}623994\ldots$; $\beta = 0{,}624005$;

c) číslo $\alpha = -7{,}6301$; $\beta = -7{,}63001\ldots$.

Nájdite pre každý prípad a), b), c) niekoľko čísiel x, pre ktoré platí: $\alpha < x < \beta$.

95. Ukážte, že medzi čísla

$$\text{a) } \frac{2}{5}, \frac{3}{7}; \qquad \text{b) } -1{,}7; -1{,}8$$

možno vložiť nekonečne mnoho racionálnych čísiel.

96. Zistite, či platia nerovnosti:

a) $3 - \sqrt{2} - \frac{5}{3} > 0$; b) $4 - \sqrt{3} - \frac{7}{3} > 0$; c) $-8 + \sqrt[3]{102} + \frac{16}{3} > 0$.

97. Zistite, či je možné, aby súčin dvoch reálnych čísiel bol a) väčší; b) menší ako ktorýkoľvek jeho činiteľ. Kedy to nastane?

98. Zistite, či je možné, aby súčet dvoch čísiel bol menší ako a) niektorý; b) každý jeho sčítanec. Uveďte príklady.

99. Nech a, b sú dve iracionálne čísla. Je možné, aby čísla $a + b$, $a - b$ boli racionálne? Udajte príklady.

100. Dokážte vetu: Ak $\sqrt{a}$ je prirodzené číslo a číslo a je deliteľné dvoma, potom je deliteľné aj štyrmi.

101. Ak r_1 je racionálne a r_2 iracionálne číslo, čísla $r_1 + r_2$, $r_1 - r_2$ sú iracionálne. Ak r_1 je racionálne číslo rôzne od nuly, čísla r_1r_2, r_1/r_2, r_2/r_1 sú iracionálne. Dokážte!

102. Dokážte, že každé číslo $\sqrt{n^2 + 1}$, kde n je nepárne číslo, je iracionálne.

103. Dokážte, že každé číslo $\sqrt{p}$, kde p je prvočíslo, je iracionálne.

104. Nájdite aspoň jedno iracionálne číslo y, pre ktoré platí $\sqrt{2} < y < \sqrt{3}$.

105. Ak $a > b$, dokážte, že platí

$$a > \frac{a + b}{2} > b.$$

Pomocou tohto výsledku dokážte, že:

a) medzi dvoma iracionálnymi číslami leží nekonečne mnoho racionálnych čísiel;

b) medzi dvoma iracionálnymi číslami leží nekonečne mnoho iracionálnych čísiel;

c) medzi dvoma reálnymi číslami leží nekonečne mnoho reálnych čísiel.

106. Pre aké čísla m, n je $\sqrt{mn}$ prirodzené číslo, pričom $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ nie sú prirodzené čísla?

107. Dokážte, že každé číslo $\sqrt{r_1r_2}$, kde r_1, r_2 sú nesúdeliteľné prvočísla, je iracionálne.

108. Zistite, či je možné, aby $\sqrt{m/n}$ bolo racionálne číslo, aj keď $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ nie sú prirodzené čísla.

109. Aby číslo $\sqrt{m/n}$, kde m, n sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla, bolo racionálne, je nutné a stačí, aby $\sqrt{m}$ a $\sqrt{n}$ boli prirodzené čísla. Dokážte! Na základe tejto vety ukážte, že čísla

$$\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \sqrt{\frac{153}{68}}, \quad \sqrt{\frac{7}{8}}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{\frac{216}{294}}, \quad \sqrt{3\frac{5}{9}}, \quad \sqrt{1\frac{1}{48}}$$

sú iracionálne.

110. Dokážte, že ak $\sqrt{n}$ nie je prirodzené číslo a n je prirodzené číslo, potom číslo $\sqrt{n}$ je iracionálne.

111. Dokážte vetu: Ak sú $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ prirodzené čísla, je aj $\sqrt{mn}$ prirodzené číslo. Rozšírte túto vetu na prípad konečného počtu činiteľov.

112. Dokážte, že súčin

$$(r_1 + s_1\sqrt{n})\,(r_2 + s_2\sqrt{n})\,(r_3 + s_3\sqrt{n})$$

je opäť číslo tvaru $r + s\sqrt{n}$, kde n je prirodzené číslo, r_1, r_2, r_3, r, s_1, s_2, s_3, s sú racionálne čísla a $\sqrt{n}$ je iracionálne číslo. Platí veta i pre väčší počet činiteľov?

113. Dokážte, že číslo $x = s\sqrt{m} + t\sqrt{n}$ je vždy iracionálne, ak čísla m, n ($m \neq n$) sa rovnajú súčinu navzájom rôznych prvočísiel a s, t sú racionálne čísla, pre ktoré platí $s^2 + t^2 > 0$.

2,2. Číselné množiny

Množinu X, ktorej všetky prvky sú čísla, nazývame *číselnou množinou*. V ďalšom bude X znamenať číselnú množinu reálnych čísiel.

Nech b je také číslo z množiny X, že pre všetky $x \in X$ platí $x \leq b$. Číslo b nazývame *maximum množiny* X (najväčšie číslo množiny X), označujeme ho $\max X$.

Nech a je také číslo z množiny X, že pre všetky $x \in X$ platí $a \leq x$. Číslo a nazývame *minimum množiny* X (najmenšie číslo množiny X), označujeme ho $\min X$.

Každá konečná číselná množina má maximum a minimum.

Číselná množina X je *zhora ohraničená*, ak existuje také číslo M, že pre každé $x \in X$ platí $x \leq M$. Číselná množina X je *zdola ohraničená*, ak existuje také číslo m, že pre každé $x \in X$ platí $m \leq x$. Číslo M nazývame *horným ohraničením* množiny X, číslo m nazývame *dolným ohraničením množiny* X. Množina, ktorá je ohraničená zdola a zhora, nazýva sa *ohraničenou*.

Najmenšie horné ohraničenie množiny X sa nazýva *supremum množiny* X, alebo aj *horná hranica množiny* X. Označujeme ho $\sup X$. Najväčšie dolné ohraničenie množiny X sa nazýva *infimum množiny* X, alebo aj *dolná hranica množiny* X. Označujeme ho $\inf X$. Čísla $\sup X$ a $\inf X$ majú tieto vlastnosti:

1. Pre každé $x \in X$ platí $\sup X \geq x$, $\inf X \leq x$.

2. Pre každé $\varepsilon > 0$ existujú také čísla $x_1 \in X$ a $x_2 \in X$, pre ktoré platí $x_1 > \sup X - \varepsilon$, $x_2 < \inf X + \varepsilon$.

Poznámka. Uvedenú vlastnosť možno vysloviť aj takto: Ku každému číslu a, pre ktoré platí $a < \sup X$ existuje aspoň jedno číslo $x_1 \in X$, pre ktoré platí $a < x_1$. Podobne ku každému číslu b, pre ktoré platí $b > \inf X$, existuje aspoň jedno číslo $x_2 \in X$, pre ktoré platí $b > x_2$.

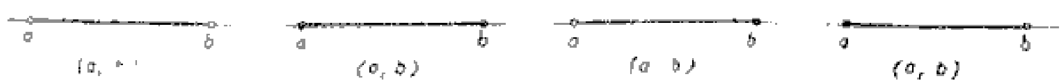
3. Ak množina X je ohraničená zhora (zdola), tak má supremum (infimum).

4. Ak $\sup X$ ($\inf X$) patrí do množiny X, tak $\sup X = \max X$ ($\inf X = \min X$).

Nech a, b sú reálne čísla a nech $a < b$. Množinu všetkých čísiel x, pre ktoré platí:

$a < x < b$ nazývame *otvoreným intervalom* a označujeme ho (a, b),
$a \leq x \leq b$ nazývame *uzavretým intervalom* a označujeme ho $\langle a, b \rangle$,
$a < x \leq b$ nazývame *zľava otvoreným a sprava uzavretým intervalom* a označujeme ho $(a, b\rangle$,
$a \leq x < b$ nazývame *zľava uzavretým a sprava otvoreným intervalom* a označujeme ho $\langle a, b)$.

Na číselnej osi vyznačujeme tieto intervaly takto (pozri *obr. 7*):



Obr. 7

Intervalmi nazývame aj množiny všetkých čísiel x určených nerovnosťami:

$a \leq x$, túto množinu označujeme $\langle a, \infty)$ a čítame: zľava uzavretý interval od a do nekonečna.
$a < x$, túto množinu označujeme (a, ∞) a čítame: zľava otvorený interval od a do nekonečna.
$x \leq b$, túto množinu označujeme $(-\infty, b\rangle$ a čítame: sprava uzavretý interval od mínus nekonečna po b.
$x < b$, túto množinu označujeme $(-\infty, b)$ a čítame: sprava otvorený interval od mínus nekonečna po b.

Množinu všetkých reálnych čísiel označujeme takto: $(-\infty, \infty)$.

Okolím čísla a (bodu a) nazývame otvorený interval, ktorý číslo a (bod a) obsahuje, označujeme ho $O(a)$. *δ-okolie* čísla a [*ε-okolie* čísla a] je interval $(a - \delta, a + \delta)$ [$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$], pričom $\delta > 0$ [$\varepsilon > 0$].

Príklad 1. Nájdime supremum, infimum, maximum a minimum množiny $M = (-1/2, 1\rangle$.

Riešenie. Znázorníme množinu M na číselnej osi *(obr. 8)*. Z toho usudzujeme, že supremum množiny M je číslo 1 a infimum množiny M je číslo $-1/2$. Ukážeme, že je to tak. Čísla x, ktoré tvoria množinu M, spĺňajú nerovnosť

$$-\frac{1}{2} < x \leq 1. \tag{1}$$

Z toho vyplýva, že daná množina je ohraničená a číslo 1 je jedno z horných ohraničení, číslo $-1/2$ je jedno z dolných ohraničení. Ukážeme, že číslo 1 je najmenším z horných ohraničení, t. j. $\sup M = 1$. Teda musia preň platiť vlastnosti 1 a 2 (str. 26):

1. $x \leqq 1$, pre každé $x \in M$;

2. ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $x_1 \in M$, pre ktoré platí $x_1 \geqq 1 - \varepsilon$.

Obr. 8

Obr. 9

Prvé tvrdenie vyplýva z nerovnosti (1). Druhé tvrdenie dokážeme tak, že ku každému $\varepsilon > 0$ zvolíme číslo $x_1 = 1 \in M$, potom platí $x_1 = 1 \geqq 1 - \varepsilon$.

Podobne dokazujeme, že $\inf M = -1/2$:

1. $-1/2 < x$, pre všetky $x \in M$;

2. ak zvolíme $\varepsilon \geqq 1/2$, potom číslo $x_2 = 0$ a platí $-1/2 + \varepsilon \geqq 0 = x_2$. Ak zvolíme $0 < \varepsilon < 1/2$, potom číslo $-1/2 + \varepsilon/2 = x_2$ je prvkom množiny M, pre ktorý platí

$$x_2 = -1/2 + \varepsilon/2 < -1/2 + \varepsilon.$$

Z toho vyplýva, že $\inf M = -1/2$.

Číslo $-1/2 = \inf M$ nie je z množiny M, preto podľa vlastnosti 4 (na str. 26) množina M nemá minimum. Číslo $1 = \sup M$ je z množiny M, a preto podľa vlastnosti 4 je číslo 1 maximum množiny M.

Príklad 2. Nájdime infimum, supremum, maximum, minimum množiny M, kde M je množina všetkých čísel tvaru $(n + 4)/(n + 5)$ a n je prirodzené číslo.

Riešenie. Znázorníme na číselnej osi niekoľko prvkov množiny M *(obr. 9)*. Z toho usudzujeme, že $\sup M = 1$, $\inf M = 5/6$.

Dokážeme to. Pre supremum musia platiť vlastnosti 1, 2 (str. 26); teda

1. $\dfrac{n + 4}{n + 5} < 1$, pre každé prirodzené číslo n.

2. Pre každé $a < 1$ existuje taký prvok $\dfrac{N + 4}{N + 5}$ z množiny M, že platí

$$a < \frac{N + 4}{N + 5}. \tag{2}$$

Prvé tvrdenie vyplýva z nerovnosti $\dfrac{n + 4}{n + 5} = 1 - \dfrac{1}{n + 5} < 1$. Druhé tvrdenie dokážeme tak, že zvolíme $a < 1$ a budeme hľadať také prirodzené číslo N, pre ktoré platí (2). Zo vzťahu (2) vyplýva

$$N > \frac{5a - 4}{1 - a} = c.$$

Ak $c \leqq 0$, potom zvolíme $N = 1$. Ak $c > 0$, z Archimedovej vlastnosti reálnych čísel vyplýva, že k číslam 1 a c existuje také prirodzené číslo N, že $N \,.\, 1 > c$. Položme preto

$$N = \begin{cases} 1 & \text{pre} \quad c \leqq 0, \\ 1 + \left[\dfrac{5a - 4}{1 - a}\right] & \text{pre } c > 0, \text{ (kde } [x] \text{ je celá časť čísla } x). \end{cases}$$

Potom platí

$$a < \frac{N+4}{N+5} < 1, \text{ pre každé } a < 1$$

a teda $\sup M = 1$.

Podobne dokazujeme, že $\inf M = 5/6$:

1. Z nerovnosti $n \geqq 1$ vyplýva

$$6n - 5n \geqq 25 - 24,$$
$$6(n+4) \geqq 5(n+5)$$

a z toho

$$\frac{n+4}{n+5} \geqq \frac{5}{6}.$$

2. Pre každé $b > 5/6$ existuje z množiny M prvok $5/6$, pre ktorý je $5/6 < b$. Teda infimum $M = 5/6$.

Supremum množiny M, t. j. číslo 1 nepatrí do M, preto množina nemá maximum. Infimum množiny M, t. j. číslo $5/6$ je prvkom množiny M, a preto $\min M = 5/6$.

114. Aké sú intervaly:

a) $\langle \pi/4, 3\rangle$; b) $\langle -2, \sqrt{2})$; c) $(\sqrt{5}, \sqrt{6})$; d) $(-\pi, 2\rangle$.

Znázornite ich na číselnej osi.

115. Nájdite prieniky a súčty intervalov:

a) $\langle 2, 3), \langle -1, \infty)$;
b) $\langle -5, 3), (-7, 1\rangle, (-4, 2)$;
c) $(-\infty, 3\rangle, (-8, 15)$;
d) $(-\infty, \infty), \langle 3, 10)$;
e) $(-2, 5\rangle, \langle -3, 4), (-1, 1)$.

Znázornite tieto množiny na číselnej osi.

116. Nájdite maximum a minimum číselných množín:

a) $\{-3, 2\}$; b) $\{5, 0\}$; c) $\{1/7, 1/10\}$; d) $\{-4, 4\}$; e) $\{-7\}$.

117. Nájdite maximum, minimum, supremum a infimum množín, ak tieto existujú:

a) M_1 je množina všetkých celých záporných čísiel;
b) M_2 je množina všetkých záporných čísiel;
c) M_3 je interval $(0, 1)$;
d) M_4 je interval $\langle 0, 1\rangle$;
e) M_5 je množina všetkých racionálnych čísiel z intervalu $\langle \sqrt{2}, \sqrt{3}\rangle$;
f) M_6 je množina všetkých racionálnych čísiel z intervalu $(0,1)$.

118. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí

$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\}$$
$$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}.$$

119. Vyjadrite pomocou intervalov množiny všetkých reálnych čísiel, pre ktoré nasledujúce výrazy sú reálne čísla:

a) $\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$;
b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$;
c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$;
d) $\sqrt{1 - \operatorname{sgn} x}$;
e) $\dfrac{1}{\sqrt{x \operatorname{sgn} x - x}}$;
f) $\dfrac{1}{\sqrt{x - x \operatorname{sgn} x}}$;

g) $\dfrac{x - x \operatorname{sgn} x}{x + x \operatorname{sgn} x}$; h) $\dfrac{3}{4 - x^2}$,

kde $\operatorname{sgn} x = 1$, pre $x > 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$ a $\operatorname{sgn} x = -1$ pre $x < 0$.

120. V nasledujúcich úlohách zistite, či sú dané množiny ohraničené a nájdite maximum, minimum, supremum a infimum týchto množín, ak tieto existujú:

a) M_1 je množina obvodov všetkých pravidelných mnohouholníkov vpísaných do kruhu s polomerom R;
b) M_2 je množiňa obvodov všetkých pravidelných mnohouholníkov opísaných kruhu s polomerom R;
c) M_3 je množina obvodov všetkých kružníc vpísaných do medzikružia tak, aby sa dotýkali oboch kružníc medzikružia K_1, K_2.

121. Nájdite najmenší interval obsahujúci všetky prvky množiny M, ak

a) množina M sú všetky riešenia rovnice $(n + 1)x = n$, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo;
b) množina M sú všetky reálné riešenia rovnice $\sin(\pi/x) = 0$;
c) množina M sú všetky celočíselné riešenia nerovnosti $-\sqrt{5} < x < \sqrt{8}$;
d) množina M sú všetky pravé zlomky väčšie ako $1/\sqrt{2}$;
e) množina M sú plošné obsahy všetkých mnohouholníkov vpísaných do polkruhu s polomerom R;
f) množina M sú plošné obsahy základní všetkých kvádrov vpísaných do gule s polomerom R;
g) množina M sú všetky riešenia rovnice $(x - 1)(x + 2)(2x - 3)(4x - 7)(3 - - 5x) = 0$.

122. Neprázdne množiny M_1 a M_2 majú supremum a infimum. Množina M je množina všetkých čísiel $x + y$, kde $x \in M_1$, $y \in M_2$. Dokážte, že množina M má supremum a infimum, pre ktoré platí

$$\sup M = \sup M_1 + \sup M_2,$$
$$\inf M = \inf M_1 + \inf M_2.$$

123. Nech M a N sú neprázdne množiny reálnych čísiel, pričom každý prvok $x \in M$ je menší ako ľubovoľný prvok z množiny N a pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existujú čísla $x \in M$, $y \in N$, pre ktoré je $y - x < \varepsilon$. Dokážte, že platí $\sup M = \inf N$.

124. Množina M sa skladá z čísiel: 0,2; 0,22; 0,222; 0,222 2; ... nájdite jej supremum.

125. Nájdite supremum a infimum množín z úlohy **119**, ak existujú.

126. Ak M je konečná množina, dokážte, že platí $\max M = \sup M$ a podobne $\min M = \inf M$.

127. Nájdite maximum, minimum, supremum a infimum množiny M, ktorej prvkami sú všetky čísla tvaru $(n + 2)/(n + 1)$, kde n je prirodzené číslo.

128. Nájdite infimum, supremum, maximum a minimum množiny M, ktorej prvky sú všetky čísla tvaru

$$(-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1},$$

kde n je prirodzené číslo.

129. Nájdite minimum, maximum, infimum, supremum množiny M, ktorej prvky sú čísla tvaru $1 + 1/n$, $1 - 1/n$, kde n je prirodzené číslo.

2,3. Nerovnosti

Základné vlastnosti nerovnosti sú:

1. Ak $a < b$ a $b < c$, potom $a < c$ *(tranzitívny zákon)*.

2. Ak $a < b$, a c je ľubovoľné číslo, potom $a + c < b + c$; slovami: nerovnosť sa nezmení, ak k obom stranám nerovnosti pripočítame to isté číslo.

3. Ak $a < b$ a $c < d$, potom $a + c < b + d$; slovami: nerovnosti rovnakého zmyslu môžeme sčítať.

4. Ak $a < b$ a $m > 0$, potom $am < bm$; ak $a < b$ a $m < 0$, potom $am > bm$; slovami: pri násobení obidvoch strán nerovnosti kladným číslom sa zmysel nerovnosti nemení; ak násobíme obidve nerovnosti záporným číslom, zmení sa zmysel nerovnosti.

5. Ak $a < b$ a $c < d$, kde a, b, c, d sú kladné čísla, potom $ac < bd$; slovami: nerovnosti rovnakého zmyslu s kladnými členmi môžeme vynásobiť.

6. Ak $0 < ab$, potom je $0 < a$, $0 < b$,
alebo $a < 0$, $b < 0$.

7. Ak $ab < 0$, potom je $0 < a$, $b < 0$,
alebo $a < 0$, $0 < b$.

8. Ak $0 < b$, $-b < a < b$, potom je $a^2 < b^2$. Obrátene, ak je $0 < b$, $a^2 < b^2$, je $-b < a < b$.

9. Ak je $0 < a$ a $a^2 < b^2$, potom platí alebo $0 < a < b$, alebo $b < -a < 0$.

Vlastnosti ostanú v platnosti, keď znak $<$ nahradíme znakom $\leqq$.

Lineárna nerovnosť s jednou neznámou x má tvar

$$ax + b \,\mathrm{N}\, 0, \tag{1}$$

kde $a \neq 0$, b sú čísla a N je niektorý zo znakov $<, >, \leqq, \geqq, \neq$.

Kvadratickou nerovnosťou s jednou neznámou nazývame nerovnosť

$$ax^2 + bx + c \,\mathrm{N}\, 0, \tag{2}$$

kde $a \neq 0$ a N má význam ako predošle.

Riešením nerovnosti (1), resp. (2), nazývame množinu všetkých čísiel, ktoré keď dosadíme do nerovnosti namiesto neznámej x, dostaneme pravdivú nerovnosť medzi číslami.

Systém lineárnych nerovností s jednou neznámou má tvar

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1 \,\mathrm{N}\, 0 \\ a_2x + b_2 \,\mathrm{N}\, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_n \,\mathrm{N}\, 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú rôzne od nuly.

Nech riešenia jednotlivých nerovností daného systému (3) sú $M_1, M_2, \dots, M_n$. Potom riešenie systému (3) je $M = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$.

Pri riešení nerovností (1) a (2) používame vlastnosti 1 až 9. Pomocou týchto z danej nerovnosti dostávame ekvivalentné nerovnosti, ktoré vieme riešiť. Pritom dve nerovnosti nazývame *ekvivalentné*, ak majú za riešenie rovnaké množiny. Úpravy, pomocou ktorých z danej nerovnosti dostaneme ekvivalentnú, nazývame *ekvivalentnými úpravami*.

Kvadratickú nerovnosť (3) možno riešiť úpravou na tvar

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \mathrm{N}\, \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{4}$$

Pri riešení nerovnosti (4) môžu nastať tri prípady:

1. $D = b^2 - 4ac > 0$, potom nerovnosť (4) riešime podľa vlastnosti 8 a 9. V tomto prípade nerovnosť (4) možno však riešiť aj tak, že ju upravíme na tvar

$$a(x - \alpha)(x - \beta) \,\mathrm{N}\, 0, \tag{5}$$

kde α a β sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Nerovnosť (5) riešime ďalej podľa vlastnosti 5 a 6

2. $D = b^2 - 4ac = 0$. Potom nerovnosť (4) nemá riešenie, ak N značí $<$; nerovnosť (4) má riešenie $(-\infty, \infty)$, ak N značí $>$ alebo $\geqq$; nerovnosť (4) má riešenie $x = -b/2a$, ak N značí $\leqq$; nerovnosť (4) má za riešenie všetky reálne čísla okrem čísla $-b/2a$, ak N značí $\neq$.

3. $D = b^2 - 4ac < 0$. Potom nerovnosť (4) nemá riešenie, ak N značí $<$ alebo $\leqq$; nerovnosť (4) má riešenie $(-\infty, \infty)$, ak N značí $>$, $\geqq$ alebo $\neq$.

Príklad 1. Nech $b > 0$, $c > 0$. Dokážme, ak $a/b < 1$, potom platí

$$\frac{a + c}{b + c} < 1.$$

Riešenie. Podľa predpokladu platí $a/b < 1$, pretože $b > 0$, podľa vlastnosti 2 platí $a < b$. Z vlastnosti 4 vyplýva, že $a + c < b + c$. Pretože $b + c > 0$, môžeme poslednú nerovnosť vynásobiť $1/(b + c) > 0$ a dostaneme

$$\frac{a + c}{b + c} < 1.$$

Príklad 2. Riešme nerovnosť

$$\frac{3 - x}{5} < \frac{2x - 8}{3} - \frac{3x - 1}{2}.$$

Riešenie. Vynásobme obidve strany nerovnosti číslom 30; podľa vlastnosti 4 dostaneme

$$18 - 6x < 20x - 80 - 45x + 15.$$

Odtiaľ je

$$18 - 6x < -25x - 65.$$

Pripočítajme na obidve strany poslednej nerovnosti výraz $25x - 18$; podľa vlastnosti 2 dostaneme

$$19x < -83.$$

Vynásobením tejto nerovnosti číslom 1/19 dostaneme

$$x < -83/19.$$

Riešením tejto nerovnosti sú všetky čísla x menšie ako $-83/19$, čo je interval $(-\infty, -83/19)$. Pri riešení sme robili iba ekvivalentné úpravy, preto nájdené riešenie je riešením danej nerovnosti.

Príklad 3. Riešme systém nerovností

$$\frac{x - 4}{4} < x + \frac{3}{2} \tag{6}$$

$$2x - 8 < 3 - \frac{x}{2}. \tag{7}$$

Riešenie. Aby sme odstránili zlomky v týchto nerovnostiach použime vlastnosť 4 a vynásobme obidve strany nerovnosti (6) číslom 4 a obidve strany nerovnosti (7) číslom 2:

$$x - 4 < 4x + 6$$

$$4x - 16 < 6 - x.$$

Použitím vlastnosti 2 dostaneme

$$-3x < 10$$
$$5x < 22$$

a podľa vlastnosti 4 je

$$x > -\frac{10}{3} \tag{8}$$

$$x < \frac{22}{5}. \tag{9}$$

Riešením nerovnosti (8) je interval $(-10/3, \infty)$. Riešením nerovnosti (9) je interval $(-\infty, 22/5)$. Riešenia znázorníme na číselnej osi *(obr. 10)*.

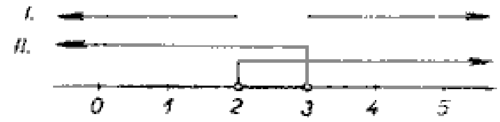
Riešením systému (8) a (9) sú čísla, ktoré súčasne vyhovujú obidvom nerovnostiam, t. j. prienik

$$\left(-\frac{10}{3},\ \infty\right) \cap \left(-\infty,\ \frac{22}{5}\right) = \left(-\frac{10}{3},\ \frac{22}{5}\right),$$

ktorý je na číselnej osi silne vytiahnutý.

Keďže všetky úpravy, ktoré sme pri riešení vykonali, boli ekvivalentné, nájdené riešenie je riešením pôvodného systému.

Obr. 10



Obr. 11

Príklad 4. Riešme nerovnosť $x^2 - x + 1 > 0$.

Riešenie. Keďže $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$, upravíme daný kvadratický trojčlen na tvar

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Potom daná nerovnosť má tvar

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Z toho

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{3}{4}.$$

Uvedená nerovnosť platí pre všetky reálne čísla. Jej riešením je interval $(-\infty, \infty)$.

Príklad 5. Riešme nerovnosť

$$x^2 - 5x + 6 < 0.$$

Riešenie. Keďže $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$, danú nerovnosť riešime tak, že rozložíme trojčlen $x^2 - 5x + 6$ na súčin koreňových činiteľov. Korene kvadratickej rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$ sú čísla 2 a 3. Preto platí $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$. Z toho vyplýva

$$(x - 3)(x - 2) < 0.$$

Uvedená nerovnosť je podľa vlastnosti 7 ekvivalentná alebo so systémom

$$\left.\begin{aligned} x - 3 &> 0 \\ x - 2 &< 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

alebo

$$\left.\begin{aligned} x - 3 &< 0 \\ x - 2 &> 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Riešením systému (10) je prienik $(-\infty, 2) \cap (3, \infty) = \emptyset$, teda prázdna množina. Riešením systému (11) je prienik $(-\infty, 3) \cap (2, \infty) = (2, 3)$. Riešením danej nerovnosti je $\emptyset \cup (2, 3) = (2, 3)$ (pozri *obr. 11*).

130. Dokážte:

a) Ak a, b, c sú kladné čísla a $a/b > 1$, potom platí

$$\frac{a+c}{b+c} > 1.$$

b) Ak $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $ab > 0$, potom z nerovnosti $a > b$ vyplýva $1/a < 1/b$. Čo platí, ak $ab < 0$?

c) Ak $a > 0$, $b > 0$, potom platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2.$$

d) Ak a, b, c, d sú reálne čísla, $a/b < c/d$ a $b > 0$, $d > 0$, potom platí

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

131. Dokážte:

a) Ak a a b sú kladné čísla, potom platí

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}.$$

b) Ak a a b sú kladné čísla a $a \geqq b$, potom platí

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leqq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqq \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

c) Ak a a b sú kladné čísla, potom platí

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqq \frac{a^n + b^n}{2},$$

kde n je prirodzené číslo. Kedy platí znak rovnosti?

d) Ak a, b, c, d sú kladné čísla, potom platí

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

132. Pre aké prirodzené čísla n platí:

a) $2^n > n^2$; b) $2^n > 2n + 1$; c) $2^n < n^3$; d) $3^n < n^4$.

133. Dokážte, že

a) pre všetky prirodzené čísla n a reálné číslo $0 < a < 1$ platí

$$(1-a)^n \geqq 1 - na;$$

b) pre všetky prirodzené čísla $n > 1$ platí

$$\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

c) pre všetky prirodzené čísla $n > 2$ platí

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

134. Dokážte matematickou indukciou, že platia nerovnosti:

a) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2;$

b) $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} < 3;$

c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24};$

d) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$

135. Dokážte, že

a) pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

b) pre ľubovoľné prirodzené čísla n, p platí

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p};$$

c) pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 1$ platí

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n;$$

d) pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

136. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

a) $\sqrt[n]{n!} \geqq \sqrt{n};$

b) $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} \geqq \frac{1}{3};$

c) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2.$

137. Dokážte, že pre všetky $x \in (0, \pi)$ platí

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} \geqq 1 + \operatorname{cotg} x.$$

138. Dokážte, že pre ľubovoľné čísla $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ platí

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

139. Riešte nerovnosti:

a) $2x + 7 < 3x - 4$;

b) $5x - 2 \leqq 4(x - 1) - 2$;

c) $2(x - 1) - x > 3(x - 1) - 2x - 5$;

d) $\dfrac{4x + 5}{-5} > x - \dfrac{2}{3}$;

e) $\dfrac{37 - 2x}{3} + 9 \leqq \dfrac{3x - 8}{4} - x$.

140. Riešte nerovnosti:

a) $\dfrac{2x - 3}{3} + \dfrac{3x - 2}{2} \geqq \dfrac{1}{6}$;

b) $\dfrac{2x - 17}{4} - \dfrac{8 - x}{2} - 2 \leqq x - 4 + \dfrac{x}{8}$;

c) $(x - 3)^2 + (x + 1)^2 < 2x^2 - 6x + 13$;

d) $ax + b < bx - a,\ a \neq 0,\ b \neq a$.

141. Nájdite, pre ktoré všetky

a) prirodzené čísla platí nerovnosť

$$\frac{3x - 1}{4} - \frac{5 - 6x}{2} \leqq 8 + \frac{3x}{2};$$

b) záporné čísla platí nerovnosť

$$\frac{x + 3}{2} - \frac{x - 2}{3} - 5 < \frac{x - 1}{2}.$$

142. Aké musí byť číslo k, aby

a) rovnica $3(x + 1) = 4 + kx$ mala riešenie väčšie ako 1;

b) rovnica $5kx - 9 = 10x - 3k$ mala kladné riešenie.

143. Pre ktoré všetky reálne čísla

a) je číslo $3x - 7$ kladné;

b) je číslo $-\dfrac{7}{3 - 2x}$ záporné;

c) platí $\dfrac{5}{2x - 1} > 0$;

d) platí $-\dfrac{11}{3x - 8} < 0$.

144. Aké „najtesnejšie" nerovnosti platia pre:

a) $8x - 11$, ak $x \in \langle -3, 5\rangle$;

b) $-2x + 3$, ak $x + 3 \in \langle -7, 1\rangle$;

c) $5x - 6$, ak $-3x \in \langle 3, 9)$;

d) $\dfrac{3x + 5}{2}$, ak $2x - 1 \in (-3, 5\rangle$;

e) $\dfrac{x - 1}{x + 2}$, ak $-2x + 6 \in (-2, 0)$.

145. Ak platí:

a) $x > 2$, aká „najtesnejšia" nerovnosť platí pre x^3;

b) $x > 3$, aká „najtesnejšia" nerovnosť platí pre $11x^2 + 4x - 41$;

c) $|x| < 4$, aká „najtesnejšia" nerovnosť platí pre $3x^2 + 5x - 15$;

d) $x \in (1, 4)$, aká „najtesnejšia" nerovnosť platí pre $5x^2 - 16$;

e) $x \in (1, 3)$, aká „najtesnejšia" nerovnosť platí pre $x^2 - 2x + 10$.

146. Zistite, aká „najtesnejšia" nerovnosť platí pre x, ak

a) $2x - 7 \in (-\infty, 8)$;

b) $-3x + 5 \in (-4, 2)$;

c) $-x + 1 \in (3, \infty)$

d) $3x - 2 \in \langle -2, 4)$.

147. Riešte systém nerovností:

a) $7 - 7x < 3x + 4$
$7 - 4x > 3 + 3x$;

b) $2x + 1 > 3x - 3$
$3x - 2 > x - 4$
$3x - 1 > 8x + 2$;

c) $\frac{1}{11}x + 11 \leqq 11\frac{1}{11}$
$0{,}175x - \frac{3}{4} < 0{,}425x - \frac{1}{2}$;

d) $1{,}375 > \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - x\right)$
$5x - 7 < 3(x + 1)$
$x + \frac{1}{12} \geqq \frac{1}{3}(x + 1)$;

e) $2(x - 0{,}4) < 3{,}5x + 1{,}7$
$7x + \frac{1}{3} > \frac{11}{15}(10x - 0{,}5)$
$\frac{x + 4}{8} < 0{,}5 - \frac{3x - 5}{6}$;

f) $3 + x < 4 + 2x$
$5x - 3 < 4x - 1$
$7 + 2x > 6 + 3x$.

148. Zistite, či platí implikácia:

a) $2x - 1 \in \langle 3, \infty) \Rightarrow x \in (10, \infty)$;

b) $-x + 5 \in \langle 3, 8) \Rightarrow x \in \langle -10, 10\rangle$;

c) $3x + 2 \in \langle 1, 3\rangle$ a $-4x + 3 \in \langle 1, 5\rangle \Rightarrow x \in (-\infty, \infty)$.

·**149.** Aká „najtesnejšia" nerovnosť platí pre x, ak

a) $x \in (-3, \infty)$ a $x \in \langle -1, 5\rangle$;

b) $2x - 1 \in (-\infty, 3)$ a $3x - 4 \in \langle -4, 7)$;

c) $-x + 5 \in \langle 3, 8)$ a $x - 1 \in (0, \infty)$;

d) alebo $x \in \langle -3, \infty)$, alebo $2x + 3 \in \langle 2, 10)$;

e) alebo $2x - 4 \in (5, \infty)$, alebo $-4x + 1 \in (-\infty, -102)$.

150. Pre ktoré všetky čísla x platí:

a) $\frac{12 - x}{x - 4} > 0$;

b) $\frac{5 - 2x}{x - 7} \geqq 3$;

c) $x(x - 1)(x - 2)(x + 1) \geqq 0$;

d) $\frac{x(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} \geqq 0$;

e) $\frac{x + 1}{x + 3} < \frac{x + 5}{x + 6}$.

151. Pre ktoré všetky čísla x je číslo

a) $x^2 - x + 6$ kladné, záporné a rovné nule;

b) $4x^2 - 8x + 3$ nezáporné;

c) $(3x - 5)^2 + (3x + 5)^2 - 37$ nekladné;

d) $(2x + 1)(3x - 2) + (4x - 1)(x - 2)$ záporné.

152. Riešte nerovnosti:

a) $x^2 - 5x - 24 > 0$;

b) $x^2 + 14x - 24 < 0$;

c) $2x^2 - 3x - 2 > 0$;

d) $6x^2 + 13x + 6 < 0$;

e) $2x^2 - 15x + 13 \geqq 0$;

f) $x^2 - 2x + 5 < 0$.

153. Riešte nerovnosti:

a) $2x^2 - 3x + 1 < 0$;

b) $2x^2 - 3x + 2 < 0$;

c) $80x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{21x - 27\,782}{12} > 1859\frac{1}{3} - 3x^2$;

d) $x(x+4)(x+1) - (x+3)(x+4) \cdot (x+7) > 18$;

e) $x^2 + x + 1 < 0$;

f) $20x - x^2 \geqq 36$.

154. Ako musíme zvoliť koeficient k v kvadratickej rovnici:

a) $kx^2 + (2k-1)x - 2 = 0$, aby korene tejto rovnice boli z intervalu $\langle -2, 2 \rangle$;

b) $2x^2 + kx + 24 = 0$, aby táto rovnica mala
α) korene reálne, β) korene komplexné;

c) $x^2 + 5x + k = 0$, aby korene tejto rovnice boli komplexné.

155. Riešte systém nerovností:

a) $x^2 - 8x + 15 > 0$, $x^2 + 3x - 28 < 0$;

b) $x^2 - x - 2 > 0$, $x^2 - 4x + 3 > 0$;

c) $x^2 - 7x + 12 < 0$, $x^2 + x - 2 < 0$.

156. Ak je

a) $x^2 + 3x - 1 \in \langle 2, 3 \rangle$,

b) $x^2 - 4x + 2 \in (5, \infty)$,

c) $-2x^2 + x + 3 \in (-\infty, -3\rangle$,

čo platí pre x?

157. Riešte nerovnosti:

a) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} > 0$;

b) $1 + \frac{x-4}{x-3} < \frac{x-2}{x-1}$;

c) $\frac{x+3}{x-1} + \frac{x+4}{x-4} \geqq 2$;

d) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{2} - 3 > 0$;

e) $\frac{5}{3-x} + \frac{8}{x-4} - \frac{10}{x+2} \leqq 0$;

f) $\frac{x+2}{x+3} - \frac{2x-1}{3x+1} \geqq 0$.

158. Pre ktoré všetky čísla x je číslo:

a) $\frac{1}{1-x^2}$ kladné, záporné;

b) $\frac{x}{x^2-3}$ kladné, nula a záporné;

c) $x > \frac{2x}{1-x^2}$.

159. Riešte nerovnosti:

a) $x(x^2 - 7x + 10) > 0$;

b) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - x - 2} < 0$;

c) $\frac{x^4}{x+2} + \frac{x^4}{3-x} < \frac{(10x-6)x^2}{-x^2+x+6}$;

d) $\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} > 0$;

e) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x^2+x} < \frac{-1}{2x^2+x}$.

160. Nájdite dvojciferné kladné číslo menšie ako 64, ak číslica desiatok je menšia o 3 ako číslica jednotiek.

161. Nájdite také najmenšie prirodzené číslo n, aby $1 + 2 + \ldots + n > 28$.

162. Nájdite zlomok, pre ktorý platí: a) ak menovateľa zmenšíme o 1, rovná sa 1/2, b) ak čitateľa zväčšíme o 20, dostaneme zlomok z intervalu (2, 3).

163. Nájdite odvesny pravouhlého trojuholníka, ak ich rozdiel sa rovná 1 a prepona je väčšia ako 11.

164. Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov s obvodom s má štvorec najväčší plošný obsah.

165. V akej vzdialenosti od Bratislavy treba zvoliť miesto na Dunaji pre kúpalisko, aby plavba loďou tam a späť netrvala dlhšie ako 120 minút (zastávku nepočítajme), ak vlastná priemerná rýchlosť lode je 20 km/h a rýchlosť prúdu Dunaja je 7 km/h.

166. Koľko gramov vody treba pridať k 2000 g 60 %-ného roztoku liehu vo vode, aby sme dostali roztok, ktorého koncentrácia liehu nie je menšia ako 40 %?

167. Zinková vanička s hmotnosťou 20 kg obsahuje 40 litrov vody teplej 20 °C. Koľko litrov vody, teplej 80 °C, treba doliať do vaničky, aby sme dostali vodu, ktorá nie je teplejšia ako 35 °C a nie je chladnejšia ako 30 °C? (Merné teplo Zn je 0,09 ca l. kg^{-1}.)

168. Ukážte, že odpor n vodičov zapojených v sérii nie je menší ako n^2-násobok odporu týchto vodičov paralelne zapojených.

169. V obytných miestnostiach je plošný obsah podlahy obvykle väčší ako plošný obsah okien. Preto pomer týchto plošných obsahov vyjadrený v % je väčší ako 100 %. Byt je po hygienickej stránke tým lepší, čím menší je tento pomer. Ako sa zmení tento pomer, ak zväčšíme plošný obsah podlahy a okien o rovnaký počet m^2? Zlepší sa byt po hygienickej stránke alebo zhorší?

2,4. Absolútna hodnota reálneho čísla

Pre reálne číslo a definujeme *absolútnu hodnotu* $|a|$ takto:

$$|a| = a, \quad \text{ak } a \geq 0,$$
$$|a| = -a, \quad \text{ak } a < 0.$$

Nech a, b sú reálne čísla. Ich absolútna hodnota má tieto vlastnosti:

1. $|a| = \max\{a, -a\}$.
2. $|a| = |-a|$.
3. $a \leq |a|$.
4. $|a| = \sqrt{a^2}$.
5. $|ab| = |a|\,|b|$.
6. $|a^n| = |a|^n$, pre každé prirodzené číslo n.
7. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, pre každé $b \neq 0$.
8. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(trojuholníková nerovnosť)*.
9. Nech $c \geq 0$. Potom z nerovnosti $-c \leq a \leq c$ vyplýva nerovnosť $|a| \leq c$ a obrátene.
10. Nech $\varepsilon > 0$. Potom pre ľubovoľné reálne čísla a, x platí

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon.$$

11. $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Poznámka 1. Vlastnosť 5 možno rozšíriť na ľubovoľný konečný počet reálnych čísiel $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$|a_1 . a_2 . \ldots . a_n| = |a_1| . |a_2| . \ldots . |a_n| .$$

Poznámka 2. Geometrický význam absolútnej hodnoty reálneho čísla a je ten, že je to vzdialenosť obrazu čísla a na číselnej osi od počiatku. Vzdialenosť $\varrho(a, b)$ bodu a od bodu b na číselnej osi je $|b - a|$.

Príklad 1. Riešme rovnicu

$$|x + 4| = \frac{1}{4} .$$

Riešenie. Uvedenú rovnicu zjednodušíme tak, aby neobsahovala absolútnu hodnotu. Uvažujme teda dva prípady:

a) $x + 4 \geqq 0$, potom $|x + 4| = x + 4$ a daná rovnica je ekvivalentná so systémom

$$x + 4 \geqq 0 \tag{1}$$

$$x + 4 = \frac{1}{4} . \tag{2}$$

Riešením nerovnosti (1) je interval $\langle -4, \infty)$. Riešením rovnice (2) je číslo $x = -15/4$. Teda riešením systému (1), (2) je prienik $\langle -4, \infty) \cap \{-15/4\} = \{-15/4\}$.

b) $x + 4 < 0$, potom $|x + 4| = -(x + 4)$ a daná rovnica je ekvivalentná so systémom

$$x + 4 < 0 \tag{3}$$

$$-(x + 4) = \frac{1}{4} . \tag{4}$$

Riešením nerovnosti (3) je interval $(-\infty, -4)$. Riešením rovnice (4) je číslo $-17/4$. Riešením systému (3), (4) je ich prienik, číslo $-17/4$.

Riešením danej rovnice sú čísla $-15/4$, $-17/4$.

Uvedenú rovnicu môžeme riešiť aj pomocou vlastnosti 4 takto:

$$|x + 4| = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{(x + 4)^2} = \frac{1}{4} .$$

Z toho vyplýva

$$(x + 4)^2 = \frac{1}{16} .$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice sú čísla $x_1 = -15/4$ a $x_2 = -17/4$.
Dosadením do danej rovnice $|x + 4| = 1/4$ zistíme, že čísla $-15/4$, $-17/4$ sú jej riešením.

Príklad 2. Riešme nerovnosť

$$|x + 1| < |x + 3| . \tag{5}$$

Riešenie. Uvažujeme štyri možné prípady pre $x + 1$ a $x + 3$:

a) $x + 1 \geqq 0$ a $x + 3 \geqq 0$.
b) $x + 1 < 0$ a $x + 3 < 0$.
c) $x + 1 \geqq 0$ a $x + 3 < 0$.
d) $x + 1 < 0$ a $x + 3 \geqq 0$.

V prípade a) platí $|x + 1| = x + 1$, $|x + 3| = x + 3$. Nerovnosť (5) je ekvivalentná so systémom nerovností

$$x + 1 \geqq 0$$
$$x + 3 \geqq 0$$
$$x + 1 < x + 3.$$

Riešením tohto systému sú všetky čísla x, pre ktoré platí súčasne $x \geq -1$, $x -3$ (tretia nerovnosť je splnená pre ľubovoľné reálne číslo), je to prienik intervalov $\langle -1, \infty) \cap \langle -3, \infty) = \langle -1, \infty)$.

V prípade b) platí $|x + 1| = -(x + 1)$, $|x + 3| = -(x + 3)$. Nerovnosť (5) je ekvivalentná so systémom nerovností

$$\begin{aligned} x + 1 &< 0 \\ x + 3 &< 0 \\ -(x + 1) &< -(x + 3), \end{aligned} \qquad \text{čiže} \qquad \begin{cases} x < -1 \\ x < -3 \\ -1 < -3. \end{cases}$$

Keďže posledná nerovnosť tohto systému nemá riešenie, uvedený systém v tomto prípade nemá riešenie.

V prípade c) platí $|x + 1| = x + 1$, $|x + 3| = -(x + 3)$. Nerovnosť (5) je ekvivalentná so systémom

$$\begin{aligned} x + 1 &\geq 0 \\ x + 3 &< 0 \\ x + 1 &< -(x + 3). \end{aligned}$$

Riešením tohto systému sú všetky čísla x, pre ktoré platia súčasne všetky tri nerovnosti $x \geq -1$, $x < -3$ a $x > -2$, t. j. prienik intervalov $\langle -1, \infty) \cap (-\infty, -3) \cap (-\infty, -2) = \emptyset$. Teda systém v tomto prípade nemá riešenie.

V prípade d) platí $|x + 1| = -(x + 1)$, $|x + 3| = x + 3$. Nerovnosť (5) je ekvivalentná so systémom nerovností

$$\begin{aligned} x + 1 &< 0 \\ x + 3 &\geq 0 \\ -(x + 1) &< (x + 3). \end{aligned}$$

Riešením tohto systému sú všetky čísla x, pre ktoré súčasne platí $x < -1$, $x \geq -3$, $x > -2$, t. j. prienik intervalov $(-\infty, -1) \cap \langle -3, \infty) \cap (-2, \infty) = (-2, -1)$.

Riešenie nerovnosti (5) je súčet intervalov $\langle -1, \infty) \cup (-2, -1) = (-2, \infty)$.

Poznámka 3. Uvedenú nerovnosť môžeme riešiť aj na základe vlastnosti 4. Z nerovnosti $|x + 1| < |x + 3|$ dostaneme

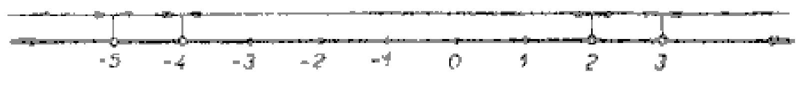
$$\sqrt{(x + 1)^2} < \sqrt{(x + 3)^2}.$$

Z toho $(x + 1)^2 < (x + 3)^2$. Po úprave máme $-4x - 8 < 0$. Riešením tejto nerovnosti a teda aj nerovnosti (5) je interval $(-2, \infty)$.

Príklad 3. Riešme nerovnosť

$$\frac{|x - 3|}{|x + 5|} \leq \frac{|x - 2|}{|x + 4|}. \tag{6}$$

Riešenie. Túto nerovnosť by sme mohli riešiť podobne ako v príkladoch 1 a 2, a to tak, že by sme uvažovali všetky možnosti, ktoré môžu nastať pre absolútnu hodnotu čísiel $x - 3$, $x - 2$, $x + 4$, $x + 5$. Týchto možností je $2^4 = 16$. Avšak veľká časť týchto možností vedie k systémom nerovností, ktoré nemajú riešenie. Preto budeme postupovať ináč. Nájdeme čísla x, pre ktoré platí $x - 3 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 4 = 0$, $x + 5 = 0$, t. j. nájdeme nulové body mnohočlenov, nachádzajúcich sa medzi znakmi absolútnej hodnoty. Tieto čísla sú: 3, 2, -4, -5 a rozdeľujú číselnú os na päť intervalov $(-\infty, -5)$, $(-5, -4)$, $(-4, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$ *(obr. 12)*.



Obr. 12

V každom z týchto intervalov môžeme rozhodnúť o absolútnych hodnotách, ktoré sa nachádzajú v nerovnosti (6) a nahradiť ju ekvivalentným systémom nerovností bez absolútnych hodnôt.

1. Pre interval $(-\infty, -5)$, t. j. $x < -5$ platí: $x - 3 < -8 < 0$, $x - 2 < -7 < 0$, $x + 5 < 0$, $x + 4 < -1 < 0$. Preto nerovnosť (6) je v tomto prípade ekvivalentná so systémom nerovností

$$\left.\begin{aligned} \frac{-(x-3)}{-(x+5)} &\leq \frac{-(x-2)}{-(x+4)} \\ x &< -5. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Po vynásobení prvej nerovnosti zo systému (7) výrazom $(x + 5)(x + 4) > 0$, dostaneme

$$(x-3)(x+4) \leq (x-2)(x+5)$$
$$x < -5,$$

alebo po úprave

$$-2x - 2 \leq 0$$
$$x < -5.$$

Riešením tohto systému je prienik intervalov $\langle -1, \infty) \cap (-\infty, -5) = \emptyset$, t. j. systém (7) v tomto prípade nemá riešenie.

2. Pre interval $(-5, -4)$, t. j. $-5 < x < -4$ platí $x - 3 < -7 < 0$, $x - 2 < -6 < 0$, $0 < x + 5$, $x + 4 < 0$. Preto nerovnosť (6) je v tomto prípade ekvivalentná so systémom nerovností

$$\left.\begin{aligned} \frac{-(x-3)}{x+5} &\leq \frac{-(x-2)}{-(x+4)} \\ -5 < x &< -4. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Po úpravách máme

$$(x-3)(x+4) \leq -(x-2)(x+5)$$
$$-5 < x < -4.$$

Z toho

$$x^2 + 2x - 11 \leq 0$$
$$-5 < x < -4.$$

Riešením tohto systému je prienik $\langle -1 - 2\sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3}\rangle \cap (-5, -4) = \langle -1 - 2\sqrt{3}, -4)$.

3. Pre interval $(-4, 2)$, t. j. $-4 < x < 2$ platí

$$x - 3 < -1 < 0, \quad x - 2 < 0, \quad 0 < 1 < x + 5, \quad 0 < x + 4.$$

Preto nerovnosť (6) je v tomto prípade ekvivalentná so systémom nerovností

$$\left.\begin{aligned} \frac{-(x-3)}{x+5} &\leq \frac{-(x-2)}{x+4} \\ -4 < x &< 2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Po úpravách dostaneme

$$-(x-3)(x+4) \leq -(x-2)(x+5)$$
$$-4 < x < 2.$$

Z toho

$$2x + 2 \leq 0$$
$$-4 < x < 2.$$

Riešením tohto systému je prienik intervalov $(-\infty, -1\rangle \cap (-4, 2) = (-4, -1\rangle$.

4. Pre interval $(2, 3)$, t. j. $2 < x < 3$ platí $x - 3 < 0$, $0 < x - 2$, $0 < 7 < x + 5$, $0 < 6 < x + 4$. Preto nerovnosť (6) je v tomto prípade ekvivalentná so systémom nerovností

$$\left.\begin{aligned} \frac{-(x-3)}{x+5} &\leq \frac{x-2}{x+4} \\ 2 < x &< 3. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Po úpravách dostaneme

$$-(x-3)(x+4) \leqq (x-2)(x+5)$$
$$2 < x < 3.$$

alebo

$$x^2 + 2x - 11 \geqq 0$$
$$2 < x < 3.$$

Riešenie tohto systému je $\langle -1 + 2\sqrt{3}, \infty) \cap (2, 3)$ a $(-\infty, -1 - 2\sqrt{3}\rangle \cap (2, 3)$. Riešením systému (10) je interval $\langle -1 + 2\sqrt{3}, 3)$.

5. Pre interval $(3, \infty)$, t. j. $3 < x$ platí: $0 < x - 3$, $0 < 1 < x - 2$, $0 < 8 < x + 5$, $0 < 7 < x + 4$. Preto nerovnosť (6) v tomto prípade je ekvivalentná so systémom nerovností

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-3}{x+5} &\leqq \frac{x-2}{x+4} \\ 3 &< x. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Po úpravách dostaneme

$$(x-3)(x+4) \leqq (x-2)(x+5)$$
$$3 < x$$

alebo

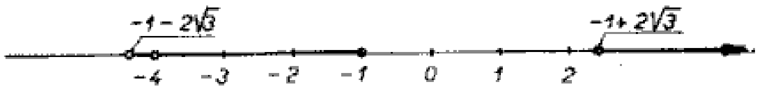
$$-2x - 2 \leqq 0$$
$$3 < x.$$

Riešenie tohto systému je $\langle -1, \infty) \cap (3, \infty) = (3, \infty)$.

Zostáva zistiť, či čísla -5, -4, 2, 3 sú riešením nerovnosti (6). Čísla -5 a -4 nie sú riešením (6), pretože menovatele na oboch stranách nerovnosti (6) sa rovnajú nule. Pre $x = 2$ platí $1/7 \leqq 0$, čo je nepravdivá nerovnosť. Pre $x = 3$ z nerovnosti (6) dostaneme $0 \leqq 1/7$, čo je pravdivá nerovnosť medzi číslami. Teda číslo 3 je riešením nerovnosti (6).

Riešením nerovnosti (6) je súčet

$\langle -1 - 2\sqrt{3}, -4) \cup (-4, -1\rangle \cup \langle -1 + 2\sqrt{3}, 3) \cup (3, \infty) \cup \{3\}$, teda $\langle -1 - 2\sqrt{3}, -4) \cup (-4, -1\rangle \cup \langle -1 + 2\sqrt{3}, \infty)$ *(obr. 13)*.



Obr. 13

170. Vypočítajte:

a) $|-5|$, $|3|$, $|-\pi|$, $|\pi - 1|$, $|2/3|$, $|-5/8|$, $|1 - 2\sqrt{2}|$, $|8 - 2\sqrt{2}|$, $|6 - 3\sqrt{3}|$, $|2 - \sqrt{4}|$;

b) $3|a| - b + 2|a - b|$, ak $a = 2 - \sqrt{2}$, $b = 2/3$.

171. Vypočítajte $\dfrac{p + |p|}{2}$.

172. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a a b platí:

a) $\min\{a, b\} = (a + b - |b - a|)/2$;

b) $\max\{a, b\} = (a + b + |b - a|)/2$.

173. Ak je:

a) $|a| \leqq 2$, $|b| \leqq 4$; b) $|a| \leqq 1$, $0 \leqq b < 3$; c) $-2 < a < 5$, $|b| \leqq 1$, čo platí pre $|a + b|$?

174. Zistite, kedy platí $|a + b| = |a| + |b|$, $|a - b| = |a| - |b|$ a na základe týchto výsledkov nájdite všetky čísla x, pre ktoré platí:

a) $|(x - 4) - (x - 6)| = |x - 4| - |x - 6|$;
b) $|(x - 3) + (x - 6)| = |x - 3| + |x - 6|$;
c) $|(x - 2) - (x - 4)| = |x - 2| - |x - 4|$;
d) $|(x - 3) - (x - 5)| = (x - 3) - (x - 5)$.

175. Na základe viet o absolútnej hodnote reálného čísla zistite, pre aké čísla x platia rovnosti:

a) $|(x - 2)(x - 4)| = (x - 2)(x - 4)$;
b) $|(x - 4)(x - 3)| = |x - 4|\,|x - 3|$;
c) $|(x - 2)(x - 5)| = -(x - 2)(x - 5)$;
d) $\left|\dfrac{x - 1/3}{x - 0{,}6}\right| = \dfrac{|x - 1/3|}{|x - 0{,}6|}$;
e) $\left|\dfrac{3 - x}{x - 2}\right| = \dfrac{3 - x}{x - 2}$;
f) $\left|\dfrac{x - 2}{3 - x}\right| = \dfrac{x - 2}{3 - x}$.

176. Na základe vlastnosti 4 riešte nerovnosti

a) $||x| - 3| \leqq |x - 5|$;
b) $|2x + 1| \leqq |x - 3|$.

177. Zistite, ktoré čísla x majú:

a) od čísla -4 vzdialenosť menšiu ako 2;
b) od čísla -3 vzdialenosť väčšiu, alebo rovnú 5.

178. Aký je geometrický význam nasledujúcich rovníc a nerovností, ak $\varepsilon > 0$; Znázornite na číselnej osi.

a) $|x| = 2$;
b) $|x| = \varepsilon$;
c) $|x - 3| = 1/2$;
d) $|x - a| = \varepsilon$;
e) $|x - a| < \varepsilon$;
f) $|x + a| \leqq \varepsilon$.

179. Nájdite podmienku vyjadrenú pomocou absolútnej hodnoty, ktorú spĺňajú čísla x, ak ich vzdialenosť

a) od 0 je menšia ako 5;
b) od 0 rovná sa 3;
c) od -2 je menšia alebo sa rovná 3;
d) od 6 je väčšia ako 3;
e) od -3 rovná sa 2.

180. Vypočítajte:

a) $\varrho(-3, 1)$;
b) $\varrho(0, 4)$;
c) $\varrho(2, 5)$;
d) $\varrho(3, -4)$.

181. Zistite, čo platí pre $\varrho(x, a)$, ak

a) $a = 0$, $x \in \langle -3, 1)$;
b) $a = -1$, $x \in \langle 2, 7 \rangle$;
c) $a = 2$, $2x \in \langle -3, 4)$.

182. Aké musí byť číslo x, aby platilo:

a) $\varrho(x, 1) < 2$;
b) $1 \leqq \varrho(x, -2) < 3$;
c) $10 < \varrho(x, 3)$;
d) $-3 < \varrho(x, 5) \leqq 2$;
e) $-10 \leqq \varrho(x, 4) < -5$.

183. Pomocou absolútnej hodnoty reálneho čísla napíšte podmienku, ktorej vyhovujú všetky čísla intervalu:

a) $\langle -5, 5\rangle$;
b) $\langle 4, 9\rangle$;
c) $(-8, -2)$;
d) $(-2, 8)$.

184. Ktorý z výrokov je pravdivý:

a) $-2 < x < 2 \Leftrightarrow |x| < 2$;
b) $-1 \leqq x < 3 \Rightarrow |x - 1| \leqq 2$;
c) $|2x - 1| < 3 \Rightarrow |x| < 4$;
d) $x \in \langle -3, 5) \Leftrightarrow |x| < 5$.

185. Riešte nerovnosti:

a) $|x| \leqq 2$;
b) $|x| < 3$;
c) $|x - 3| \leqq 2$;
d) $1 < |x - 4| < 2$;
e) $2 \leqq |x + 3| \leqq 3$.

186. Riešte nerovnosti:

a) $|2x + 3| \geqq 9$;
b) $|x - 2| > 3$;
c) $|3x + 1| > 2x$;
d) $|3x + 1| < 2x$;
e) $2x + 10 < |x|$;
f) $|2x + 1| - |3x| > 0$;
g) $|2x + 3| \geqq |4x - 3|$;
h) $|2x + 5| - |4x + 17| \geqq 0$;
i) $|x| - |5x + 2| < 0$;
j) $|(x + 3) - (4 - x)| < |x + 3| + |4 - x|$;
k) $|12 - x| > 15 - |x - 3|$;
l) $\left|-\dfrac{5}{x + 2}\right| < \left|\dfrac{10}{x - 1}\right|$;
m) $\left|\dfrac{5x - 3}{4x + 7}\right| \leqq 3$;
n) $\left|\dfrac{5x + 2}{2x - 3}\right| \geqq 1$.

187. Riešte rovnice:

a) $x + |x - 3| = 5$;
b) $x + |x + 3| = 5$;
c) $\dfrac{|x + 2|}{|x + 3|} = 7$;
d) $|(x - 3)(x - 2)| = 0$.

188. Riešte nerovnosti:

a) $|2x - 8| < 3x - 12$;
b) $|5x - 7| > 10x - 13$;
c) $\dfrac{1}{3}|2x - 5| + \dfrac{x}{2} < x - 6$;
d) $\dfrac{2x - 1}{4} + |2x - 6| \leqq \dfrac{5 - x}{2}$;
e) $\dfrac{|2 + 3x|}{4x - 1} > 1$.

189. Riešte nerovnosti:

a) $|x + 2| - 2|2x + 4| \leqq |3x - 1|$;
b) $|x - 3| \, |x - 2| \, |x + 4| > 0$;
c) $\dfrac{|x + 2|}{|x + 6|} \geqq \dfrac{|x - 1|}{|x - 4|}$;
d) $|x + 2| + \dfrac{|2x - 1|}{|x - 3|} \leqq 2$;
e) $|x^2 - 9x + 14| \, |x + 3| \geqq 0$.

190. Nájdite všetky čísla x, ktorých súčet vzdialeností od čísiel -3 a 5
a) je menší než 6; b) je väčší než 6; c) sa rovná 0.

191. Nájdite všetky čísla x, ktorých vzdialenosť od bodov -3 a 6 je menšia ako 6.

2,5. Základy kombinatoriky

Nech n je celé nezáporné číslo. Potom „*n faktoriál*" je číslo, ktoré značíme $n!$ a pre ktoré platí

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = 0 \\ \prod_{k=1}^{n} & \text{pre } n > 0, \end{cases} \tag{1}$$

pričom $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Pre $n!$ platí

$$n! = n(n-1)! \tag{2}$$

Nech n a k sú celé nezáporné čísla, pričom $k \leqq n$, potom *kombinačným číslom* „*n nad k*" nazývame číslo $\binom{n}{k}$, pre ktoré platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3}$$

Pre kombinačné čísla platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{4}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \tag{5}$$

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{r}{n} = \binom{r+1}{n+1}. \tag{5a}$$

Variácia. Uvažujme o konečnej množine M s n prvkami $a_1, a_2, \ldots, a_n$. *Variáciou k-tej triedy n prvkov s opakovaním* nazývame každú usporiadanú skupinu k prvkov z množiny M. *Variáciou k-tej triedy n prvkov bez opakovania* nazývame každú usporiadanú skupinu k rôznych prvkov z množiny M.

Počet variácií k-tej triedy n prvkov s opakovaním je

$$V'_k(n) = n^k. \tag{6}$$

Počet variácií k-tej triedy n prvkov bez opakovania je

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{7}$$

Permutácia. *Permutáciou* množiny M nazývame variáciu n-tej triedy n prvkov bez opakovania množiny M. Počet permutácií množiny M je

$$P(n) = n! \tag{8}$$

Uvažujme skupinu k-prvkov množiny M, kde $k \geqq n$. Nech táto skupina obsahuje prvok a_1 m_1-krát, prvok a_2 m_2-krát, $\ldots$, prvok a_n m_n-krát, pričom $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sú celé nezáporné čísla, pre ktoré platí $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$. Každá usporiadaná skupina k prvkov uvedenej vlastnosti sa nazýva *permutáciou k prvkov s opakovaním.* Počet permutácií k prvkov s opakovaním je

$$P'(k) = \frac{k!}{m_1!m_2!\ldots m_n!}. \tag{9}$$

Kombinácia. *Kombináciou k-tej triedy n prvkov s opakovaním* nazývame každú skupinu k prvkov z množiny M. *Kombináciou k-tej triedy n prvkov bez opakovania* nazývame každú skupinu

k rôznych prvkov z množiny M, tedy kombinácia k-tej triedy n prvkov bez opakovania je podmnožina množiny M s k prvkami.

Počet kombinácií k-tej triedy n prvkov s opakovaním je

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} \tag{10}$$

Počet kombinácií k-tej triedy n prvkov bez opakovania je

$$C_k(n) = \binom{n}{k}. \tag{11}$$

Binomická veta. Ak n je prirodzené číslo, pre každé dve čísla a, b platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k. \tag{12}$$

Súčet koeficientov $\binom{n}{k}$ vo vzorci (12) sa rovná 2^n, t. j.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{13}$$

Príklad 1. Koľko rôznych zostáv útoku môže zostaviť tréner futbalového družstva z hráčov s číslami 7, 8, 9, 10, 11 tak, aby a) hráči s párnymi číslami, b) hráči s nepárnymi číslami nehrali vedľa seba v útoku?

Riešenie. a) Počet zostáv útoku, ktoré sú zostavené z hráčov s číslami 7, 8, 9, 10, 11 je $P(5) = 5!$ Z tohto počtu treba odčítať počet zostáv, ktoré majú hráčov s párnymi číslami 8 a 10 vedľa seba. Tieto zostavy dostaneme tak, keď utvoríme zo štyroch prvkov x, (8, 10), y, z, resp. x, y, (10, 8), z všetky možné permutácie, kde x, y, z sú hráči s nepárnymi číslami. Počet týchto zostáv je $2 \,.\, P(4) = 2 \,.\, 4!$ Počet zostáv útoku, ktoré nemajú hráčov s párnymi číslami vedľa seba je

$$P = P(5) - 2 \,.\, P(4) = 5! - 2 \,.\, 4! = 72.$$

b) Počet zostáv útoku zostavených z hráčov s číslami 7, 8, 9, 10, 11, ktoré nemajú hráčov s nepárnymi číslami vedľa seba určíme nasledujúcou úvahou. Každá takáto zostava má tvar $x8y10z$, alebo $x10y8z$, kde x, y, z sú hráči s nepárnymi číslami. Preto počet týchto zostáv je

$$P = 2 \,.\, P(3) = 12.$$

Príklad 2. Koľko rôznych výsledkov môže mať hokejový zápas, ak obe mužstvá nastrieľajú najviac po troch góloch, pričom hostia dostanú aspoň jeden gól a remíza nastane iba v prípade, že obe mužstvá strelia práve tri góly.

Riešenie. Počet všetkých možných výsledkov, pri ktorých sa zápas nekončí remízou, rovná sa počtu variácií druhej triedy zo štyroch prvkov 0, 1, 2, 3 bez opakovania:

$$V_2(4) = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Z tohto počtu treba vylúčiť tie zápasy, v ktorých hostia nedostanú ani gól, t. j. výsledky $0 : Z$, kde $Z = 1, 2, 3$, a pripočítať jeden výsledok, keď sa zápas končí nerozhodne $3 : 3$. Úhrnom

$$n = V_2(4) - V_1(3) + 1 = 12 - 3 + 1 = 10.$$

Príklad 3. Na písomnej skúške z matematiky je 16 poslucháčov, z ktorých štyria sú výborne pripravení na skúšku. Polovica poslucháčov má vždy to isté zadanie úlohy. Koľkými spôsobmi možno poslucháčov rozdeliť, aby v oboch skupinách boli vždy dvaja z výborne pripravených poslucháčov?

Riešenie. Počet spôsobov, ktorými možno rozdeliť štyroch výborne pripravených poslucháčov do dvoch skupín po dvoch poslucháčoch v každej skupine je $C_2(4)$. Ku každej dvojici možno pripojiť zvyšujúcich 6 poslucháčov $C_6(16 - 4) = C_6(12)$ spôsobmi. Úhrnom teda celkový počet spôsobov, ktorými poslucháčov možno takto rozdeliť, je

$$n = \frac{1}{2}\, C_2(4) \,.\, C_6(12) = \frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{12}{6} = 2772.$$

Príklad 4. Nájdime koeficient pri x^5 v mnohočlene

$$x^2(1 - x)^6 + x^3(1 + 3x)^4 - x(1 + x)^7$$

bez umocnenia príslušných dvojčlenov.

Riešenie. Pretože prvý dvojčlen má činiteľa x^2, druhý x^3 a tretí x, vezmeme z rozvoja prvého dvojčlena člen s x^3, z druhého x^2 a z tretieho x^4. Dostaneme

$$x^2(-1)^3\binom{6}{3}x^3 + x^3\binom{4}{2}(3x)^2 - x\binom{7}{4}x^4.$$

Hľadaný koeficient je

$$a_5 = -\binom{6}{3} + 9\binom{4}{2} - \binom{7}{4} = -20 + 54 - 35 = -1.$$

192. Vypočítajte:

a) $\binom{9}{3}$; c) $\dfrac{(2!)^2}{(3^2)!}$; e) $\dfrac{5! - 8! + 6!}{3!}$; g) $\binom{1000}{998}$.

b) $\binom{9}{6}$; d) $\dfrac{(2^2)!}{(3!)^2}$; f) $\dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!}$;

193. Vyjadrite jedným kombinačným číslom:

a) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$; b) $\binom{11}{4} + \binom{11}{8}$; c) $\binom{9}{4} + \binom{9}{4}$.

194. Zjednodušte:

a) $\dfrac{(n + 1)!}{n}$; c) $\dfrac{(n + 1)!}{(n - 1)!}$; e) $\dfrac{(2n)!}{n!}$;

b) $\dfrac{n!}{n(n - 1)}$; d) $\dfrac{(2n + 1)!}{(2n - 1)!}$; f) $\dfrac{n!}{(n - 2)!}$;

g) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n + 1)!}$;

h) $\dfrac{n^2 - 9}{(n + 3)!} + \dfrac{6}{(n + 2)} - \dfrac{1}{(n + 1)!}$;

i) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{3}{(n + 1)!} - \dfrac{n^2 - 4}{(n + 2)!}$.

195. Zjednodušte:

a) $\binom{m+1}{m-6}$; c) $\binom{7}{7}+\binom{8}{7}$;

b) $\binom{m}{9}+\binom{m}{8}$; d) $\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}$;

e) $\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}$;

f) $\binom{13}{6}+\binom{12}{6}+\binom{11}{6}+\dots+\binom{6}{6}$.

196. Riešte rovnice:

a) $V_2(x+1)=30$; d) $C_3(x)+C_2(x)=15(x-1)$;

b) $5C_3(x)=C_4(x+2)$; e) $\dfrac{V_5(x)+V_3(x)}{V_3(x)}=43$.

c) $C_3(x)=\dfrac{5x(x-3)}{4}$;

197. Riešte rovnice:

a) $6(x-1)!=(x+1)!$; d) $12\binom{x+3}{x-1}=55\,\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!}$;

b) $x!\,30=(x+2)!$; e) $\dfrac{x!}{2!(x-2)!}+\dfrac{(x-1)!}{2!(x-3)!}=4$;

c) $3\binom{x}{1}\binom{x}{4}-\binom{x}{3}\binom{x}{2}=0$; f) $C_{y+1}(x)=2{,}5x$; $C_y(x-1)=10$.

198. Vypočítajte počet prvkov k, ak počet ich permutácií je 120.

199. V lavici sedí 5 dievčat, medzi nimi sú dve sestry. Koľkokrát môžeme dievčatá presadiť tak, aby sestry sedeli vedľa seba?

200. Koľko rôznych päťmiestnych čísiel možno zostaviť z číslic 0, 5, 3, 2, 9, tak, aby sa žiadna číslica neopakovala? Koľko z nich je párnych; koľko z nich je deliteľných desiatimi?

201. Koľko rôznych signálov možno utvoriť z piatich zástaviek rôznych farieb tak, aby vedľa seba boli:

a) tri zástavky, b) dve zástavky.

Koľko signálov vôbec možno utvoriť?

202. Koľko rôznych päťmiestnych čísiel možno zostaviť z číslic 3, 4, 4, 4, 2? Vypíšte tie čísla, ktoré sa začínajú číslicou 2 alebo 3.

203. Na skúške sedia okolo stola ôsmi poslucháči, z nich štyria a štyria majú rovnaké otázky. Koľkými spôsobmi možno presadiť poslucháčov tak, aby sa menili susedia a sedeli:

a) vedľa seba poslucháči s rôznymi otázkami;

b) poslucháči s rovnakými otázkami pohromade.

204. Koľko možno zostaviť päťmiestnych telefónnych čísiel tak, aby každé číslo sa skladalo z rôznych číslic (0, 1, 2, 3, …, 7, 8, 9)?

205. Nájdite súčet všetkých čísiel, ktoré možno napísať z cifier 1, 2, 3, 4, ak sa v týchto číslach žiadna cifra neopakuje.

206. Koľko rôznych hodov dostaneme pri hádzaní piatich kociek?

207. Na železničnej stanici je n návestidiel. Koľko môže byť rozličných signálov, ak každé návestidlo môže mať tri polohy?

208. Na bežeckej dráhe beží desať pretekárov, z ktorých prví traja vyhrávajú. Koľko rôznych trojíc môže vyhrať?

209. V rovine je daných sedem bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke. Koľko možno zostrojiť uzavretých lomených čiar, ktorých vrcholy sú všetky dané body?

210. Vypočítajte, koľko priamok je dané ôsmimi rôznymi bodmi, z ktorých žiadne tri neležia na priamke.

211. Koľko trojuholníkov je určených n rôznymi bodmi, z ktorých žiadne tri neležia na priamke?

212. Koľkými spôsobmi možno rozdať 32 hracích kariet dvom hráčom tak, aby každý dostal dve esá?

213. Koľkými spôsobmi možno zostaviť stráž z troch vojakov a jedného dôstojníka v rote, ktorá má 80 vojakov a troch dôstojníkov?

214. Koľko kameňov obsahuje hra „domino", keď počet bodov na každom poli sa rovná niektorému z čísiel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

215. Koľko rôznych typov musíme v Športke podať, aby smo mali istotu, že vyhráme prvú cenu?

216. Umocnite:

a) $(x + a)^6$;

b) $(x - a)^7$;

c) $(a + \sqrt{b})^{11}$, $b \geqq 0$;

d) $(\sqrt{m} - n)^5$, $m \geqq 0$;

e) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$;

f) $(2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x})^9$, $x \geqq 0$;

g) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^6$, $ab > 0$;

h) $(\sqrt{a^2 - 1} + a)^6 + (a - \sqrt{a^2 - 1})^6$, $|a| \geqq 1$.

217. Vypočítajte hodnotu mocniny:

a) $1{,}03^{12}$ na štyri desatinné miesta;

b) $1{,}012^{10}$ na päť desatinných miest;

c) $1{,}994^5$ na päť desatinných miest;

d) $0{,}997^{12}$ na päť desatinných miest.

218. Vypočítajte:

a) jedenásty člen mocniny $(x - y)^{15}$;

b) deviaty člen mocniny $(3 - \sqrt{3})^{12}$;

c) siedmy člen mocniny $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$, $x \neq 0$;

d) štvrtý člen mocniny $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$, $x \neq 0$;

e) šiesty člen mocniny $(a^2 + b^3)^{13}$;

f) dvadsiaty, dvadsiatyprvý, dvadsiatydruhý, dvadsiatytretí člen rozvoja $(1 + i)^{40}$;

g) tretí reálny člen rozvoja $(2 + i\sqrt{3})^9$;

h) posledný reálny člen rozvoja $(2 - i\sqrt{3})^9$, kde i je imaginárna jednotka.

219. Nájdite:

a) člen rozvoja $(x + y)^9$, ktorý obsahuje x^7;

b) člen rozvoja $(\sqrt{a} + b)^9$, $a \geqq 0$, ktorý obsahuje a^3;

c) člen rozvoja $(\sqrt{a} + \sqrt[4]{a})^{20}$, $a \geqq 0$, ktorý obsahuje a^7;

d) člen rozvoja $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{b} + \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{16}$, $x > 0$, $b \neq 0$, ktorý obsahuje x^4.

220. Nájdite:

a) člen rozvoja $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, $a > 0$, ktorý neobsahuje a;

b) člen rozvoja $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{z^8}} + \sqrt[3]{z^2}\right)^7$, $z \neq 0$, ktorý neobsahuje z;

c) člen rozvoja $\left(\frac{2x}{y} - \frac{\sqrt{y}}{2x}\right)^{12}$, $y > 0$, $x \neq 0$, ktorý neobsahuje x;

d) člen rozvoja $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{c^2}} + \sqrt[5]{c^3}\right)^{20}$, $c \neq 0$, ktorý neobsahuje c.

221. Pre aké x sa:

a) v rozvoji $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$, rovná piaty člen číslu 105;

b) v rozvoji $(x - \mathrm{i}\sqrt{2})^{10}$ rovná siedmy člen číslu -105;

c) v rozvoji $(\sqrt[3]{4 - 2x} + \sqrt[6]{3 - 2x})^9$ rovná siedmy člen číslu 168.

222. Nájdite taký exponent n v binomickom rozvoji, aby:

a) šiesty člen rozvoja $\left(\frac{1}{\sqrt[30]{a}} + \sqrt[5]{a}\right)^n$, $a > 0$, neobsahoval a;

b) šiesty člen rozvoja $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} - \sqrt[5]{a^3}\right)^n$, $a > 0$, neobsahoval a;

c) tretí člen rozvoja $(\sqrt[3]{a^2} + a^{-1})^n$, $a \neq 0$, neobsahoval a.

223. V rozvoji:

a) $\left(\frac{1}{z} + \sqrt{z}\right)^n$, $z > 0$, pomer koeficientu štvrtého člena ku koeficientu šiesteho člena je $5 : 18$. Nájdite člen, ktorý neobsahuje z;

b) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, $x > 0$, pomer koeficientu piateho člena ku koeficientu tretieho člena je $7 : 2$. Nájdite člen rozvoja, ktorý obsahuje prvú mocninu x.

224. Nájdite racionálne sčítance v binomickom rozvoji dvojčlenov:

a) $(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x})^5$, $x \geqq 0$;

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{10}$;

c) $(1 + \sqrt[4]{2})^{15}$;

d) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^8$.

225. Koľko racionálnych členov obsahuje rozvoj $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

226. Nájdite taký člen v binomickom rozvoji $(1 + \sqrt{3})^{100}$, ktorý je väčší ako jeho susedné členy.

227. Nájdite najväčší člen rozvoja $(p + q)^n$ podľa klesajúcich mocnín p, ak $p > 0$, $q > 0$ a $p + q = 1$. Za akých podmienok

a) najväčší člen bude prvým členom;

b) najväčší člen bude posledným členom;

c) bude rozvoj obsahovať dva susedné členy, ktoré budú väčšie ako všetky ostatné?

228. Pomocou rozvoja $(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \ldots + \binom{n}{n} x^n$ vypočítajte:

a) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n}$;

b) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \ldots + (n + 1)\binom{n}{n}$;

c) $\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \ldots + (n - 1)\binom{n}{n}$;

d) $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + \ldots + (2n + 1)\binom{n}{n}$;

e) $3\binom{n}{1} + 7\binom{n}{2} + \ldots + (4n - 1)\binom{n}{n}$;

f) $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n(n + 1)\binom{n}{n}$;

g) $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} n\binom{n}{n}$;

h) $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}^2$;

i) $\dfrac{\binom{n}{0}}{1} + \dfrac{\binom{n}{1}}{2} + \ldots + \dfrac{\binom{n}{n}}{n + 1}$;

j) $\dfrac{\binom{n}{0}}{2} + \dfrac{\binom{n}{1}}{3} + \ldots + \dfrac{\binom{n}{n}}{n + 2}$

3. ZÁKLADY LINEÁRNEJ ALGEBRY

3,1. n-tice a operácie s nimi

Usporiadanú skupinu n čísiel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nazývame *n-ticou*. Označujeme ju

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Čísla a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ nazývame *zložkami* n-tice.

n-ticu, ktorej všetky zložky sa rovnajú nule, nazývame *nulovou n-ticou* a označujeme $\boldsymbol{o} = (0, \ldots, 0)$.

Majme dve n-tice $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Dve n-tice $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *sa rovnajú*, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ vtedy a len vtedy, keď je $a_i = b_i$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$.

Súčet n-tíc $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je n-tica

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Rozdiel n-tíc $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je n-tica

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n).$$

Násobkom n-tice $\boldsymbol{a}$ *číslom* α nazývame n-ticu

$$\alpha\boldsymbol{a} = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Pre takto definované operácie platia nasledujúce zákony:

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$,
2. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$,
3. $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\,\boldsymbol{a}$,
4. $(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$,
5. $\alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, vtedy a len vtedy, keď $\alpha = 0$, alebo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$,

pritom α, β značia čísla a $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sú n-tice.

n-tica $\boldsymbol{a}$ je lineárnou kombináciou n-tíc $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, ak existujú čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ také, že

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k.$$

n-tice $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ sú *lineárne závislé*, ak existujú také čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, a platí

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}.$$

Ak n-tice nie sú lineárne závislé, hovoríme, že sú *lineárne nezávislé*.

Číslo h nazývame *hodnosťou systému* n-tíc $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ ak v tomto systéme existuje h lineárne nezávislých n-tíc a každých $h + 1$ n-tíc z tohto systému je lineárne závislých.

Príklad 1. Nech $\boldsymbol{a}_1 = (4, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1)$. Vypočítajme trojicu $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3$.

Riešenie. $\boldsymbol{b} = 3(4, 1, 3) + 5(1, 0, 3) - 2(1, 1, 1) = (12, 3, 9) + (5, 0, 15) - (2, 2, 2) = (17, 3, 24) - (2, 2, 2) = (15, 1, 22)$.

Príklad 2. Zistime, či dvojice $\boldsymbol{a} = (6, 5)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1)$ sú lineárne závislé.

Riešenie. Ak sú dvojice $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ lineárne závislé, existujú také dve čísla α_1, α_2, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, že platí

$$\alpha_1 \boldsymbol{a} + \alpha_2 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o},$$

t. j.

$$\begin{aligned} 6\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 0 \\ 5\alpha_1 + \alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Jediné riešenie tejto sústavy lineárnych rovníc je $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. To je spor s predpokladom, teda uvedené dvojice sú lineárne nezávislé.

Príklad 3. Ukážme, že dvojice $\boldsymbol{a} = (0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, 3)$ a $\boldsymbol{c} = (1, 0)$ sú lineárne závislé.

Riešenie. Ak dvojice $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sú lineárne závislé, existujú také tri čísla α_1, α_2, α_3, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, že platí

$$\alpha_1 \boldsymbol{a} + \alpha_2 \boldsymbol{b} + \alpha_3 \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o},$$

t. j.

$$\begin{aligned} 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Jedno nenulové riešenie tohto systému lineárnych rovníc je $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$. Teda uvedené dvojice sú lineárne závislé. Platí

$$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{c}.$$

229. Zistite, či platí $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, ak

a) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1, 1)$;
b) $\boldsymbol{a} = (3, 6, 9)$, $\boldsymbol{b} = (3, 6, 10)$;
c) $\boldsymbol{a} = (3/2, 6/3, 2/3)$, $\boldsymbol{b} = (6/4, 18/9, 8/12)$;
d) $\boldsymbol{a} = (\sqrt{2}, \pi, 7, 1)$, $\boldsymbol{b} = (\pi, \sqrt{2}, 7, 1)$;
e) $\boldsymbol{a} = (3, 3, 3, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, 2, 2, 2)$.

230. Pre aké čísla x, y a z platí rovnosť:

a) $(3, 3 - y, 5) = (7x - 4, 5, z/3 + 10)$;
b) $(2 + x, 1 + z, 3 + 2y) = (2, 2 + 3z, 5)$;
c) $(x + y, 2 - z, 5, 4 - 2x) = (3z, 1 + x, 5, 6)$.

231. Utvorte $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, ak

a) $\boldsymbol{a} = (4, -2)$, $\boldsymbol{b} = (-3, 7)$;
b) $\boldsymbol{a} = (0, 1, 2)$ $\boldsymbol{b} = (4, -3, 2)$;
c) $\boldsymbol{a} = (-8, 5, 2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -4, -7, 10)$;
d) $\boldsymbol{a} = (1, 0, 4, 2, 5)$, $\boldsymbol{b} = (3, 7, -1, 0, 1)$.

232. Utvorte $\alpha\boldsymbol{a}$, ak pre α a $\boldsymbol{a}$ platí:

a) $\alpha = -3/2$, $\boldsymbol{a} = (6, -2, -4)$;
b) $\alpha = 3$, $\boldsymbol{a} = (-2, 5)$;
c) $\alpha = 4/3$, $\boldsymbol{a} = (3, 6, 3/4, 9/2)$;
d) $\alpha = 0$, $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0, -2)$;
e) $\alpha = 1$, $\boldsymbol{a} = (3, 4, 2, 8)$.

233. Nájdite n-ticu $\boldsymbol{x}$ tak, aby platilo $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ak

a) $\boldsymbol{a} = (3, 2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (3, 4, 5)$;
b) $\boldsymbol{a} = (-2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, 0, 1)$;
c) $\boldsymbol{a} = (2/5, 3/7, 7/8)$, $\boldsymbol{b} = (-1/6, 4/3, 5/9)$;
d) $\boldsymbol{a} = (5, 8, -9, 2)$, $\boldsymbol{b} = (4, 5, 1, -1)$.

234. Ako treba voliť trojicu $\boldsymbol{x}$, aby platilo:

a) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{a} = (2, 3, 5)$, $\boldsymbol{o} = (0, 0, 0)$;
b) $2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{b} = (1, 1, 0)$;
c) $3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} - 3\boldsymbol{d}$, kde $\boldsymbol{c} = (1, 2, 5)$, $\boldsymbol{d} = (2, 1, 0)$;
d) $2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{f}$, kde $\boldsymbol{e} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{f} = (1, -1, -2)$.

235. Vypočítajte:

1. $\boldsymbol{a} + 2(\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}) - 3(\boldsymbol{c} - 5\boldsymbol{a})$,
2. $\dfrac{3}{2}(\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}) - \dfrac{4}{5}(5\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{b}) - \dfrac{12}{7}\left(\boldsymbol{a} - \dfrac{1}{4}\boldsymbol{c}\right)$,

ak a) $\boldsymbol{a} = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$, $\boldsymbol{c} = (0, 0, 1)$;
b) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 10, 0)$, $\boldsymbol{c} = (2, 0, 3, -1)$.

236. Nájdite štvoricu $\boldsymbol{x}$ z rovnice

a) $4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} + 5\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{a} = (-3, 2, 4, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 4, -2)$, $\boldsymbol{c} = (5, -2, 1, 3)$;
b) $2(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}) + 3(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}) = 4(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{x})$,

kde $\boldsymbol{a} = (3, 2, 5, 0)$, $\boldsymbol{c} = (8, -1, 10, 2)$, $\boldsymbol{c} = (7, 3, 3, 3)$;

c) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{a}) - \dfrac{2}{3}(\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{b}) + \dfrac{3}{5}(\boldsymbol{x} - 5\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{o}$;

kde $\boldsymbol{a} = (5, -8, -1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 4, -3)$, $c = (-3, 2, -5, 4)$.

237. Nájdite lineárne kombinácie:

a) $3\boldsymbol{a} - 13\boldsymbol{b} - 7\boldsymbol{c}$, ak $\boldsymbol{a} = (2, 1, 8)$, $\boldsymbol{b} = (3, 5, 3)$, $\boldsymbol{c} = (1, 0, 1)$;
b) $2\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b} + 8\boldsymbol{c}$, ak $\boldsymbol{a} = (4, 1, 3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, -3, 2)$, $\boldsymbol{c} = (16, 9, 1, -3)$;
c) $\sqrt{2}\boldsymbol{a} - \sqrt{3}\boldsymbol{b} - \sqrt{12}\boldsymbol{c}$, ak $\boldsymbol{a} = (\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}, 1)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{12}, 2\sqrt{3}, \sqrt{6})$, $\boldsymbol{c} = (\sqrt{3}, 0, 1)$;
d) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a} + \dfrac{3}{8}\boldsymbol{b} - \dfrac{7}{4}\boldsymbol{c}$, ak $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, -1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 0, 0, 1)$;
e) $0{,}8\boldsymbol{a} + 1{,}2\boldsymbol{b} + 0{,}5\boldsymbol{c}$, ak $\boldsymbol{a} = (1/3, 2/5, 1/4)$, $\boldsymbol{b} = (3/4, 5/8, 1/2)$, $\boldsymbol{c} = (2/3, 6/5, 4/5)$.

238. Akou lineárnou kombináciou štvoríc $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$ je štvorica $\boldsymbol{b} = (2, 3, 1, -1)$?

239. Zistite, či dvojice:

a) $\boldsymbol{a} = (3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 8)$,
b) $\boldsymbol{a} = (4, 1)$, $\boldsymbol{b} = (12, 3)$,
c) $\boldsymbol{a} = (3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (2, 2)$, $\boldsymbol{c} = (1, 4)$

sú lineárne závislé alebo nezávislé. Vyjadrite dvojicu $\boldsymbol{d} = (2, 5)$ ako lineárnu kombináciu $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, resp. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ v každom z prípadov a) až c), ak je to možné.

240. Zistite, ktoré zo systémov n-tíc sú lineárne závislé a ktoré lineárne nezávislé:

a) $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (3, 6, 9)$;
b) $\boldsymbol{a} = (2, -1, 6)$, $\boldsymbol{b} = (-6, 3, 18)$;
c) $\boldsymbol{a} = (2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (4, 2)$, $\boldsymbol{c} = (5, 1)$;
d) $\boldsymbol{d} = (1, 2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, -1, 3)$, $\boldsymbol{c} = (1, 5, 10, -6)$;
e) $\boldsymbol{a} = (3, 1, -2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (9, 3, -3, 6)$, $\boldsymbol{c} = (6, 5, -1, 4)$, $\boldsymbol{d} = (6, 2, -5, 4)$.

241. Zistite, či dané n-tice sú lineárne závislé alebo nezávislé:

a) $\boldsymbol{a} = (1, 3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (2, 4, 6)$;
b) $\boldsymbol{a} = (3, -8, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-6, 16, -2)$;
c) $\boldsymbol{a} = (3, 2, 7)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (2, 0, 3)$;
d) $\boldsymbol{a} = (3, 2, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (5, 4, 2)$;
e) $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = (3, 2, 1, 1)$;
f) $\boldsymbol{a} = (3, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (0, 3, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 0, 3)$, $\boldsymbol{d} = (1, 0, 3, 0)$.

V prípade lineárnej závislosti nájdite lineárnu kombináciu, ktorá sa rovná nule.

242. Ukážte, že ak systém n-tíc obsahuje dve rovnaké n-tice, je lineárne závislý.

243. Dokážte, že ak v systéme n-tíc je jedna n-tica číselným násobkom inej n-tice, potom je tento systém n-tíc lineárne závislý.

244. Ukážte, že ak systém n-tíc obsahuje nulovú n-ticu, je lineárne závislý.

245. Dokážte, že ak časť systému n-tíc je lineárne závislá, potom je celý systém n-tíc lineárne závislý.

246. Dokážte, že ľubovoľná časť lineárne nezávislého systému n-tíc je lineárne nezávislý systém.

247. Ukážte, že systém p n-tíc, kde $p > n$ je vždy lineárne závislý.

248. Dokážte, že ak tri trojice $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ sú lineárne závislé a trojicu $\boldsymbol{a}_3$ nemožno vyjadriť ako lineárnu kombináciu trojíc $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, je trojica $\boldsymbol{a}_1$ číselným násobkom trojice $\boldsymbol{a}_2$.

249. Nájdite všetky hodnoty λ, pre ktoré možno n-ticu $\boldsymbol{b}$ vyjadriť ako lineárnu kombináciu n-tíc $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:

a) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 5, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, 10, 8)$, $\boldsymbol{b} = (6, 15, \lambda)$;
b) $\boldsymbol{a}_1 = (3, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 7)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, -5, 3)$, $\boldsymbol{b} = (8, -8, \lambda)$;
c) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 1, 9)$, $\boldsymbol{b} = (5, 3, \lambda)$;
d) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 8, -2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 11, \lambda)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3, 5)$;
e) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 4, 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 8, 10)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, -4, -5)$, $\boldsymbol{b} = (\lambda, 6, 7)$.

250. Zistite pre ktoré hodnoty λ je trojica $\boldsymbol{d}$ lineárnou kombináciou trojíc $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, ak

a) $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 7, 8)$, $\boldsymbol{d} = (4, 3, \lambda)$;
b) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 3)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{c} = (2, 2, 1)$, $\boldsymbol{d} = (3, 6, \lambda)$;
c) $\boldsymbol{a} = (1, -2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 4, 2)$, $\boldsymbol{c} = (-1, 2, -7)$, $\boldsymbol{d} = (2, 3, \lambda)$.

Bázou danej množiny n-tíc nazývame takú podmnožinu n-tíc, ktorá má tieto vlastnosti:
1. všetky n-tice tejto podmnožiny sú lineárne nezávislé;
2. každú n-ticu z tejto množiny možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu n-tíc tejto podmnožiny.

251. Ukážte, že

a) všetky bázy danej množiny majú rovnaký počet n-tíc;
b) počet n-tíc každej bázy je najväčší počet lineárne nezávislých n-tíc danej množiny (toto číslo nazývame hodnosťou danej množiny n-tíc);
c) ak daná množina n-tíc má hodnosť r, potom každých r lineárne nezávislých n-tíc tvorí bázu.

V úlohách **252, 253, 254, 255** nájdite všetky bázy systému n-tíc:

252. $\boldsymbol{a} = (1, 2, 0, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, 2, 4)$, $\boldsymbol{c} = (3, 6, 0, 0)$.

253. $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, 3, 4)$, $\boldsymbol{c} = (3, 2, 3)$, $\boldsymbol{d} = (4, 3, 4)$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, 1)$.

254. $\boldsymbol{a} = (4, -1, 3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (8, -2, 6, -4)$, $\boldsymbol{c} = (3, -1, 4, -2)$, $\boldsymbol{d} = (6, -2, 8, -4)$.

255. $\boldsymbol{a} = (2, 1, -3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (4, 2, -6, 2)$, $\boldsymbol{c} = (6, 3, -9, 3)$, $\boldsymbol{d} = (1, 1, 1, 1)$.

256. V ktorých prípadoch má systém n-tíc jedinú bázu?

257. Nájdite ľubovoľnú bázu systému n-tíc a všetky n-tice, ktoré netvoria bázu, vyjadrite pomocou n-tíc bázy:

a) $\boldsymbol{a} = (3, 1, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (0, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{c} = (6, 2, 4, 5)$, $\boldsymbol{d} = (1, 1, 3, 3)$;

b) $\boldsymbol{a} = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (3, 5, 2)$, $\boldsymbol{c} = (1, 5, 1)$, $\boldsymbol{d} = (5, 5, 3)$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, 1)$;

c) $\boldsymbol{a} = (0, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{c} = (2, 2, 2, 2)$, $\boldsymbol{d} = (1, 0, 0, 1)$, $\boldsymbol{e} = (0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{f} = (1, 0, 0, 0)$.

3,2. Determinanty

Uvažujme množinu všetkých permutácií n čísiel $1, 2, \ldots, n$. Dvojice čísiel k_i, k_j $(i < j)$ tvoria *inverziu* v permutácii $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ z uvažovanej množiny, ak platí $k_i > k_j$.

Ak počet inverzií v permutácii $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ je párny, hovoríme, že permutácia je *párna*. Ak počet inverzií v tejto permutácii je nepárny, hovoríme, že permutácia je *nepárna*.

Nech n je prirodzené číslo. *Štvorcovou maticou* n-tého stupňa $\mathbf{A}$ nazývame tabuľku (schému) n^2 čísiel, zostavených do *n-riadkov* a *n-stĺpcov*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_1^n.$$

Transponovaná matica $\mathbf{A}'$ k matici $\mathbf{A}$ je matica $\mathbf{A}' = (a_{ji})_1^n$, t. j. matica, ktorej riadky sú stĺpce matice $\mathbf{A}$ a stĺpce sú riadkami matice $\mathbf{A}$ v nezmenenom poradí.

Determinantom matice $\mathbf{A}$ pre $n \geq 1$, (determinantom n-tého stupňa) nazývame číslo $|\mathbf{A}|$, ktoré z prvkov danej matice dostaneme takto:

$$|\mathbf{A}| = |a_{ij}|_1^n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n},$$

kde konečný súčet berieme cez všetky permutácie $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ čísiel $1, 2, \ldots, n$ a k je počet inverzií uvažovanej permutácie.

Prvky, riadky a stĺpce matice $\mathbf{A}$ nazývame aj prvkami, riadkami a stĺpcami determinantu $|\mathbf{A}|$. Pre determinant prvého stupňa platí

$$|\mathbf{A}| = |a_{11}| = a_{11}.$$

Pre determinant druhého stupňa platí

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinant druhého stupňa vypočítame podľa schémy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$- \quad +$$

Pre determinant tretieho stupňa platí

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Determinant tretieho stupňa vypočítame podľa schémy

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Tento spôsob výpočtu determinantu tretieho stupňa nazývame *Sarusovým pravidlom.*

Subdeterminantom (minorom) M_{ij} k prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ stupňa $n \geqq 2$ nazývame determinant matice stupňa $(n - 1)$, ktorú dostaneme vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca matice $\mathbf{A}$.

Algebraickým doplnkom alebo len *doplnkom* k prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ nazývame súčin $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Determinanty stupňa vyššieho ako tretieho obvykle počítame podľa vety:

1. Determinant sa rovná súčtu súčinov prvkov ľubovoľného riadku (alebo stĺpca) a k nim príslušných algebraických doplnkov:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Uvedený súčet nazývame rozvojom determinantu $|\mathbf{A}|$ podľa prvkov i-tého riadku matice $\mathbf{A}$. Podobne:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

je rozvoj determinantu $|\mathbf{A}|$ podľa j-tého stĺpca matice $\mathbf{A}$.

Determinanty majú tieto vlastnosti:

2. Determinant transponovanej matice $\mathbf{A}'$ sa rovná determinantu matice $\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$.

3. Ak všetky prvky ľubovoľného riadku (stĺpca) matice $\mathbf{A}$ sa rovnajú nule, determinant tejto matice sa rovná nule.

4. Ak v matici $\mathbf{A}$ navzájom vymeníme dva riadky (alebo stĺpce), determinant $|\mathbf{A}|$ zmení znamienko.

5. Ak dva riadky (stĺpce) matice $\mathbf{A}$ sú rovnaké, determinant $|\mathbf{A}|$ sa rovná nule.

6. Ak v matici $\mathbf{A}$ vynásobíme všetky prvky daného riadku (stĺpca) tým istým číslom c, determinant tejto matice sa rovná súčinu čísla c a determinantu pôvodnej matice. To značí, že spoločný činiteľ všetkých prvkov jedného riadku (stĺpca) môžeme vyňať pred determinant.

7. Ak všetky prvky jedného riadku (stĺpca) matice $\mathbf{A}$ sú úmerné zodpovedajúcim prvkom iného riadku (stĺpca) matice $\mathbf{A}$, determinant $|\mathbf{A}|$ sa rovná nule.

8. Ak všetky prvky i-tého riadku sú súčty k sčítancov, determinant sa rovná súčtu k determinantov, ktoré majú s pôvodným determinantom všetky riadky okrem i-tého rovnaké a v i-tom riadku obsahuje prvý determinant prvé sčítance, druhý determinant druhé sčítance, ..., k-tý determinant k-té sčítance z i-tého riadku pôvodného determinantu. Pravidlo platí aj pre stĺpce determinantu.

9. Ak k ľubovoľnému riadku matice pripočítame lineárnu kombináciu iných riadkov matice determinant novej matice sa rovná determinantu pôvodnej matice. Pravidlo platí aj pre stĺpce determinantu.

10. Ak sú riadky alebo stĺpce matice $\mathbf{A}$ lineárne závislé, jej determinant sa rovná nule.

11. Ak nahradíme v rozvoji determinantu $|\mathbf{A}|$ podľa i-tého riadku matice $\mathbf{A}$, prvky i-tého riadku prvkami iného riadku matice $\mathbf{A}$, tento súčet sa rovná nule:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots a_{in}A_{kn} = 0, \text{ pre } i \neq k.$$

Podobne platí aj pre stĺpce

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots a_{nj}A_{nk} = 0, \text{ pre } j \neq k.$$

Príklad 1. Vypočítajme determinant

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1, & 3, & 5, & 0 \\ 7, & 1, & -2, & 1 \\ 6, & 8, & -14, & 2 \\ 2, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Riešenie. Budeme postupovať podľa viet (vlastností) prv uvedených pre počítanie s determinantmi)*.

$$|\mathbf{A}| = \underset{\text{„9"}}{\begin{vmatrix} 1, & 3, & 5, & 0 \\ 5, & 0, & -2, & 0 \\ 6, & 8, & -14, & 2 \\ 2, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}} = 2 \underset{\text{„6"}}{\begin{vmatrix} 1, & 3, & 5, & 0 \\ 5, & 0, & -2, & 0 \\ 3, & 4, & -7, & 1 \\ 2, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}} = 2 \underset{\text{„9"}}{\begin{vmatrix} 1, & 3, & 5, & 0 \\ 5, & 0, & -2, & 0 \\ 1, & 3, & -7, & 0 \\ 2, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}}.$$

$$|\mathbf{A}| = \underset{\text{„1"}}{2 \,.\, 1 \,.\, (-1)^{4+4}} \begin{vmatrix} 1, & 3 & 5 \\ 5, & 0, & -2 \\ 1, & 3, & -7 \end{vmatrix} = 2 \underset{\text{„9"}}{\begin{vmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 5, & 0, & -2 \\ 0, & 0, & -12 \end{vmatrix}} = \underset{\text{„1"}}{2 \,.\, (-12) \,.\, (-1)^{3+3}} \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 5, & 0 \end{vmatrix}.$$

$$|\mathbf{A}| = -24(0 - 15) = 360.$$

Príklad 2. Vypočítajme determinant

$$D = \begin{vmatrix} 3, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 3, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 3 \end{vmatrix}.$$

Riešenie. Pripočítame druhý, tretí a štvrtý stĺpec k prvému (veta 9),

$$D = \begin{vmatrix} 6, & 1, & 1, & 1 \\ 6, & 3, & 1, & 1 \\ 6, & 1, & 3, & 1 \\ 6, & 1, & 1, & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 3, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 3 \end{vmatrix},$$

kde sme vyňali podľa vety 6 pred druhý determinant spoločný činiteľ 6 z prvého stĺpca. Odpočítajme prvý riadok od ostatných (veta 9) dostaneme

$$D = 6 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2 \end{vmatrix} = 6 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 48,$$

pretože pod hlavnou uhlopriečkou sú nulové prvky.

Poznámka. Uvedený postup je jednou z metód na výpočet determinantov, ktorú nazývame *prevedením determinantu na trojuholníkový tvar*.

Príklad 3. Vypočítajme

$$J = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}$$

*) Čísla v úvodzovkách značia čísla viet, ktoré sme pri výpočte použili.

Riešenie. Označme

$$J_1 = |2|, \qquad J_2 = \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 1, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}, \quad J_4 = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}, \quad J_5 = J.$$

Determinant J rozviňme podľa prvkov posledného stĺpca

$$J_5 = 1(-1)^9 \begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{10} \begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix} = 2J_4 - J_3.$$

Podobne

$$J_4 = 2J_3 - J_2,$$
$$J_3 = 2J_2 - J_1.$$

Keďže $J_1 = 2$, $J_2 = 3$, dostaneme $J_3 = 4$, $J_4 = 5$, $J_5 = J = 6$.

Poznámka. Uvedený spôsob je podstatou jednej z metód na výpočet determinantov, ktorú nazývame *metódou rekurentných vzťahov.*

258. Vypočítajte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 3, & 4 \\ 7, & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3, & 4 \\ -5, & 8 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1, & -3 \\ -2, & 5 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 + \sqrt{3}, & 3 - \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5}, & 1 - \sqrt{3} \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} a + 1, & a \\ a, & a - 1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a - b, & a + b \\ a + b, & a - b \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} \cos x, & \sin x \\ \sin x, & \cos x \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} \sin x, & -\cos x \\ \sin y, & \cos y \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1, & \log_b a \\ \log_a b, & 1 \end{vmatrix}$ pre $a \neq 1$, $a > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$;

j) $\begin{vmatrix} b, & c - d\mathrm{i} \\ c + d\mathrm{i}, & a \end{vmatrix}$;*) k) $\begin{vmatrix} 2 + \sqrt{2}\,\mathrm{i}, & \sqrt{2} \\ 4, & 2 - \sqrt{2}\,\mathrm{i} \end{vmatrix}$; l) $\begin{vmatrix} 1, & z \\ z, & -1 \end{vmatrix}$,

kde $z = \cos \dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\pi}{3}$;

m) $\begin{vmatrix} 1, & \cos u + \mathrm{i} \sin u \\ \cos u - \mathrm{i} \sin u, & 1 \end{vmatrix}$

259. Vypočítajte determinanty tretieho stupňa:

a) $\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \\ 1, & 4, & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2, & 3, & 7 \\ 1, & 2, & 1 \\ -4, & -5, & -19 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2, & 5, & 0 \\ -1, & 7, & 1 \\ 4, & 1, & -4 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 4, & 2, & 6 \\ 2, & 6, & 4 \\ 6, & 4, & 2 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 5, & 6, & 3 \\ 3, & 5, & 6 \\ 6, & 3, & 5 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 2, & 0, & 2 \\ 2, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 2 \end{vmatrix}$;

*) i je imaginárna jednotka.

g) $\begin{vmatrix} 1, & 2, & 4 \\ 1, & 3, & 9 \\ 1, & 5, & 25 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 2, & 1, & 0 \\ 3, & 2, & 1 \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$.

260. Vypočítajte determinanty tretieho stupňa:

a) $\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c \\ a^2, & b^2, & c^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ z, & x, & y \\ y, & z, & x \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a, & y, & y \\ y, & b, & y \\ y, & y, & c \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} \sin x, & 1, & \cos x \\ \sin y, & 1, & \cos y \\ \sin z, & 1, & \cos z \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1, & \cos x, & \cos y \\ \cos x, & 1, & \cos z \\ \cos y, & \cos z, & 1 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 1+\mathrm{i}, & 0, & 1 \\ \mathrm{i}, & 1, & 0 \\ 1, & -\mathrm{i}, & \mathrm{i}-1 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1, & u, & u^2 \\ u^2, & 1, & u \\ u, & u^2, & 1 \end{vmatrix}$, kde $u = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

261. Zistite počet inverzií v permutáciách:

a) 3, 4, 2, 5, 1;
c) 2, 4, 1, 3, 5;
b) 6, 4, 3, 5, 1, 2;
d) 5, 6, 3, 4, 1, 2;
e) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$;
f) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$.

Zistite, ktoré z týchto permutácií sú párne a ktoré nepárne.

262. Koľko inverzií tvorí číslo: a) 1; b) n, ktoré sa nachádza na k-tom mieste permutácie čísiel $1, 2, \ldots, n$?

263. Aký najväčší počet inverzií môže mať permutácia čísiel $1, 2, \ldots, n$? Napíšte túto permutáciu.

264. Zistite, ktoré zo súčinov sa vyskytujú v determinantoch príslušného stupňa a aké majú znamienka v týchto determinantoch:

a) $a_{34}a_{21}a_{43}a_{12}$;
d) $a_{21}a_{53}a_{44}a_{32}a_{\cdot 5}$;
b) $a_{23}a_{41}a_{32}a_{13}$;
e) $a_{37}a_{45}a_{12}a_{63}a_{74}a_{51}a_{26}$.
c) $a_{61}a_{45}a_{23}a_{36}a_{52}a_{14}$;

265. Zvoľte čísla i a k tak, aby súčin

a) $a_{14}a_{i3}a_{k1}a_{42}$; b) $a_{35}a_{i2}a_{14}a_{k3}a_{51}$; c) $a_{64}a_{5i}a_{13}a_{2k}a_{46}a_{35}$

bol členom determinantu príslušného stupňa so záporným znamienkom.

266. Na základe definície determinantu nájdite členy determinantu

$$\begin{vmatrix} x, & 2, & 1, & x \\ 1, & x, & 1, & 3 \\ 2, & 3, & x, & x \\ 1, & 1, & 2, & x \end{vmatrix},$$

ktoré obsahujú mocniny x^3 a x^4.

267. Priamo z definície vypočítajte tieto determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 2, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 3, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, 0, \dots, n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0, 0, 0, \dots, 0, 1 \\ 0, 0, 0, \dots, 1, 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0, 1, 0, \dots, 0, 0 \\ 1, 0, 0, \dots, 0, 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a_{11}, 0, & 0, & \dots, 0 \\ a_{21}, a_{22}, & 0, & \dots, 0 \\ a_{31}, a_{32}, & a_{33}, & \dots, 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2}, & a_{n3}, & \dots, a_{nn} \end{vmatrix}$.

268. Z rekurentnej definície determinantu*) dokážte vety

a) determinant n-tého stupňa má $n!$ členov;

b) každý člen determinantu sa až na znamienko rovná súčinu n-prvkov vzatých po jednom z každého riadku a každého stĺpca;

c) polovica členov determinantu sa berie so znamienkom kladným a polovica so znamienkom záporným.

269. Bez vypočítania uvedených determinantov ukážte, že sa navzájom rovnajú:

a) $\begin{vmatrix} 3, & 1, & 3 \\ 4, & 2, & 1 \\ 5, & 6, & -3 \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} 3, & 1, & 0 \\ 4, & 2, & -3 \\ 5, & 6, & -8 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 0 \\ 3, & 5, & 7 \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} 9, & -7, & 2 \\ 1, & -2, & 0 \\ 3, & 5, & 7 \end{vmatrix}$.

270. Nasledujúce rovnosti dokážte iba na základe vlastností 2 až 10:

a) $$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ m, & n, & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + kd, & b + ke, & c + kf \\ d, & e, & f \\ m, & n, & p \end{vmatrix};$$

b) $$\begin{vmatrix} 1, & a, & a^3 \\ 1, & b, & b^3 \\ 1, & c, & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2 \\ 1, & b, & b^2 \\ 1, & c, & c^2 \end{vmatrix};$$

c) $$\begin{vmatrix} 1, & a, & bc \\ 1, & b, & ca \\ 1, & c, & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2 \\ 1, & b, & b^2 \\ 1, & c, & c^2 \end{vmatrix};$$

d) $$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ -b, & a, & d, & -c \\ -c, & -d, & a, & b \\ -d, & c, & -b, & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2;$$

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & a \\ 1, & 0, & 1, & b \\ 1, & 1, & 0, & c \\ a, & b, & c, & d \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d.$$

---

*) 1. Ak matica $\mathbf{A} = (a_{11})$, vtedy $|\mathbf{A}| = a_{11}$.

2. Ak sú definované determinanty matíc stupňa $n - 1$, determinant matice A stupňa n definujeme vzorcom $|\mathbf{A}| = a_{11} |A_{11}| - a_{21} |A_{21}| + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} |A_{n1}|$, pre každé prirodzené číslo $n \geqq 2$.

271. Pre aké x, y a z platí

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos x, & \cos y \\ \cos x, & 1, & \cos z \\ \cos y, & \cos z, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & \cos x, & \cos y \\ \cos x, & 0, & \cos z \\ \cos y, & \cos z, & 0 \end{vmatrix}.$$

272. Nasledujúce determinanty vypočítajte iba na základe vlastností 2 až 10:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} u+v, & z, & 1 \\ v+z, & u, & 1 \\ z+u, & v, & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1, & a, & bc \\ 1, & b, & ca \\ 1, & c, & ab \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x, & y, & 2x+3y \\ 2x, & 3y, & 4x+9y \\ 3x, & 2y, & 6x+6y \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} \sin^2 x, & \sin^2 y, & \sin^2 z \\ 1, & 1, & 1 \\ \cos^2 x, & \cos^2 y, & \cos^2 z \end{vmatrix}.$$

273. Bez použitia Sarusovho pravidla ukážte, že platí:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2);$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x, & y, & z \\ x^2, & y^2, & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x);$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} ax, & a^2 + x^2, & 1 \\ ay, & a^2 + y^2, & 1 \\ az, & a^2 + z^2, & 1 \end{vmatrix} = a(x - y)(y - z)(z - 1);$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1, & x, & x^2 \\ 1, & -x, & -x^2 \\ 1, & y, & y^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x^2, & x \\ y^2, & y \end{vmatrix};$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ \operatorname{tg} x, & \operatorname{tg} y, & \operatorname{tg} z \\ \operatorname{tg}^2 x, & \operatorname{tg}^2 y, & \operatorname{tg}^2 z \end{vmatrix} = \frac{\sin(x - y)\sin(y - z)\sin(z - x)}{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z}.$$

274. Vyjadrite uvedené súčty alebo rozdiely jediným determinantom:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3, & b, & 5 \\ 2, & m, & 2 \\ 4, & p, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3, & a, & 5 \\ 2, & n, & 2 \\ 4, & q, & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 3, & 4, & -5 \\ 5, & 1, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2, & 2, & 1 \\ 4, & 4, & -5 \\ 3, & 1, & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 4, & 7, & 7 \\ 3, & 4, & 1 \\ 4; & 1, & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & 3, & -8 \\ 3, & 4, & 1 \\ 4, & 1, & 7 \end{vmatrix}.$$

275. Ako sa zmení determinant n-tého stupňa, ak jeho riadky napíšeme v opačnom poradí?

276. Ako sa zmení determinant matice, ak ju preklopíme okolo vedľajšej uhlopriečky?

277. Ako sa zmení determinant matice, ak zameníme každý jej prvok prvkom symetricky položeným s daným prvkom vzhľadom na „stred" matice?

278. Ukážte, že nutnou a postačujúcou podmienkou, aby sa determinant matice druhého stupňa rovnal nule je, aby stĺpce jeho matice boli úmerné.

279. Determinant

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 3, & 7 \\ 2, & 0, & 1 \\ 6, & -2, & 2 \end{vmatrix}$$

vypočítajte tak, že najprv v jeho matici vykonáte jednu z nasledujúcich úprav a potom použite Sarusovo pravidlo:

a) od ostatných stĺpcov odčítajte prvý stĺpec,
b) od druhého stĺpca odčítajte tretí,
c) druhý riadok odčítajte od ostatných,
d) ostatné stĺpce pripočítajte k prvému stĺpcu,
e) vynásobte tretí riadok dvoma a odčítajte od druhého riadku.

280. Nasledujúce determinanty vypočítajte rozvinutím podľa vhodného stĺpca alebo riadku:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2, & -3, & 4, & 1 \\ a, & b, & c, & d \\ 1, & -2, & 5, & 2 \\ 4, & 3, & -1, & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 6, & 1, & a, & 1 \\ 8, & 1, & b, & 7 \\ 3, & 7, & c, & -1 \\ 2, & 1, & d, & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1, & 0, & -1, & 1 \\ 0, & -1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c, & d \\ -1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix}.$$

V príkladoch 281 a 282 vypočítajte determinanty:

281.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a, & 5, & 0, & 9 \\ 0, & b, & 0, & 12 \\ 7, & 8, & c, & -3 \\ 0, & 0, & 0, & d \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 10, & 0, & 3, & a \\ 5, & 0, & b, & 0 \\ -2, & c, & 8, & 13 \\ d, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} a, & 10, & 7, & 0, & -5 \\ 0, & b, & 0, & 0, & -4 \\ 0, & 15, & c, & 0, & -3 \\ 3, & 7, & 8, & d, & -2 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & e \end{vmatrix}.$$

282.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 12\,527, & 14\,027 \\ 25\,055, & 26\,555 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 331, & 433, & 333 \\ 1091, & 553, & 453 \\ 353, & 775, & 675 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 0, & 2, & 2, & 2 \\ 2, & 0, & 2, & 2 \\ 2, & 2, & 0, & 2 \\ 2, & 2, & 2, & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 5, & 3, & 2, & 4 \\ 10, & 2, & -2, & 10 \\ -5, & 6, & 8, & 5 \\ 0, & 1, & -1, & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{e)} \begin{vmatrix} -8, & -2, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & -1, & 7 \\ 11, & 3, & 1, & 1 \\ 7, & -7, & 5, & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 2, & 0, & 1, & 3 \\ 0, & 1, & 3, & 2 \\ 1, & 3, & 2, & 0 \\ 3, & 2, & 0, & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} 35, & 59, & 71, & 52 \\ 42, & 70, & 77, & 54 \\ 43, & 68, & 72, & 52 \\ 29, & 49, & 65, & 50 \end{vmatrix}; \quad \text{h)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 4, & 9, & 16, & 25, & 36 \\ 8, & 27, & 64, & 125, & 216 \\ 16, & 81, & 256, & 625, & 1296 \end{vmatrix};$$

$$\text{i)}\ \begin{vmatrix} 3, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 3, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 3 \end{vmatrix}; \qquad \text{j)}\ \begin{vmatrix} 24, & 11, & 13, & 17, & 19 \\ 51, & 13, & 32, & 40, & 46 \\ 61, & 11, & 14, & 50, & 56 \\ 62, & 20, & 7, & 13, & 52 \\ 80, & 24, & 45, & 57, & 70 \end{vmatrix}$$

283. Riešte rovnicu

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & x^2, & \dots, & x^n \\ 1, & a_1, & a_1^2, & \dots, & a_1^n \\ 1, & a_2, & a_2^2, & \dots, & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & a_n, & a_n^2, & \dots, & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

kde $a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_n$.

284. Nasledujúce determinanty vypočítajte prevedením na trojuholníkový tvar:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} a, & x, & x, & x, & x \\ x, & b, & x, & x, & x \\ x, & x, & c, & x, & x \\ x, & x, & x, & d, & x \\ x, & x, & x, & x, & e \end{vmatrix}; \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & 2, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & 1, & 3, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 1, & 1, & \dots, & n \end{vmatrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 6 \\ 3, & 4, & 5, & 6, & 6, & 6 \\ 4, & 5, & 6, & 6, & 6, & 6 \\ 5, & 6, & 6, & 6, & 6, & 6 \\ 6, & 6, & 6, & 6, & 6, & 6 \end{vmatrix}$$

285. Vypočítajte

$$\begin{vmatrix} a, & b, & b, & \dots, & b \\ b, & a, & b, & \dots, & b \\ b, & b, & a, & \dots, & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b, & b, & b, & \dots, & a \end{vmatrix}$$

286. Ukážte, že platí

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & \dots, & n \\ 2, & 3, & 4, & \dots, & 1 \\ 3, & 4, & 5, & \dots, & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n, & 1, & 2, & \dots, & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} n^{n-1} (n+1)/2.$$

287. Rozložením na súčet determinantov vypočítajte determinanty:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} x+a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n \\ a_1, & x+a_2, & a_3, & \dots, & a_n \\ a_1, & a_2, & x+a_3, & \dots, & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & x+a_n \end{vmatrix}; \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & \dots, & n-1, & n \\ 1, & 3, & 3, & \dots, & n-1, & n \\ 1, & 2, & 5, & \dots, & n-1, & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 2, & 3, & \dots, & 2n-3, & n \\ 1, & 2, & 3, & \dots, & n-1, & 2n-1 \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 2, & 2, & 2, & \dots, & 2, & 2, & 1 \\ 2, & 2, & 2, & \dots, & 2, & 2, & 2 \\ 2, & 2, & 2, & \dots, & 3, & 2, & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2, & 2, & n-2, & \dots, & 2, & 2, & 2 \\ 2, & n-1, & 2, & \dots, & 2, & 2, & 2 \\ n, & 2, & 2, & \dots, & 2, & 2, & 2 \end{vmatrix}.$$

288. Vyňatím lineárnych činiteľov z nasledujúcich determinantov vypočítajte:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0, & x, & y, & z \\ x, & 0, & z, & y \\ y, & z, & x, & 0 \\ z, & y, & x, & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} -x, & a, & b, & c \\ a, & -x, & c, & b \\ b, & c, & -x, & a \\ c, & b, & a, & -x \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2-x^2, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1, & 5 \\ 2, & 3, & 1, & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

289. Nech

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ -1, & a_2, & 1, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & a_3, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & a_{n-1}, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & -1, & a_n \end{vmatrix}.$$

Ukážte, že platí rovnosť

$$D_n = a_n D_{n-1} + D_{n-2}.$$

290. Vypočítajte:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & \binom{2}{1}, & \binom{3}{1}, & \binom{4}{1}, & \dots, & \binom{n}{1} \\ 1, & \binom{3}{2}, & \binom{4}{2}, & \binom{5}{2}, & \dots, & \binom{n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & \binom{n}{n-1}, & \binom{n+1}{n-1}, & \binom{n+2}{n-1}, & \dots, & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$

291. Dokážte rovnosť

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \binom{x_1}{1}, & \binom{x_2}{1}, & \binom{x_3}{1}, & \dots, & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2}, & \binom{x_2}{2}, & \binom{x_3}{2}, & \dots, & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1}, & \binom{x_2}{n-1}, & \binom{x_3}{n-1}, & \dots, & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{V_n}{1!\,.\,2!\,.\,3!\,\dots\,(n-1)!},$$

kde V_n je *Vandermondov determinant*

$$V_n = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & \dots, & x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & \dots, & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & x_3^{n-1}, & \dots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

3,3. Matice

Maticou nazývame obdĺžnikovú tabuľku čísiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a označujeme $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$. Takúto maticu nazývame *maticou typu m/n*. Ak $m = n$, hovoríme o *štvorcovej matici n-tého stupňa* a označujeme ju $(a_{ij})_1^n$. Čísla, z ktorých pozostáva matica, nazývame jej *prvkami*. Vodorovné rady jej prvkov nazývame *riadkami*, zvislé *stĺpcami* matice. Prvky štvorcovej matice, ktoré ležia na úsečke spájajúcej prvok a_{11} s prvkom a_{nn}, nazývame *hlavnou uhlopriečkou* matice. Podobne *vedľajšou uhlopriečkou* matice nazývame prvky, ktoré ležia na úsečke spájajúcej prvky a_{1n} a a_{n1}.

Submaticou matice $\mathbf{A}$ nazývame štvorcovú maticu, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním niekoľkých riadkov a stĺpcov (prípadne žiadnych). Jej determinant nazývame *subdeterminantom matice* $\mathbf{A}$.

Pre matice zavádzame tieto tri základné operácie: *súčet dvoch matíc, súčin dvoch matíc, súčin matice a čísla*.

Súčtom dvoch matíc rovnakého typu m/n $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m,n}$ nazývame maticu toho istého typu

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}.$$

Súčinom matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ s a čísla α nazývame maticu

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})_{m,n}.$$

Súčinom dvoch matíc $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ a $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n,p}$ v danom poradí, pričom počet stĺpcov prvej matice sa rovná počtu riadkov druhej matice, nazývame maticu $\mathbf{C} = (c_{ik})_{m,p} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)_{m,p}$ a označujeme $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Pre tieto operácie platí:

1. $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$
2. $$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$
3. Rovnica $\mathbf{B} + \mathbf{X} = \mathbf{A}$ má jediné riešenie, ktoré označujeme
$$\mathbf{X} = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$
4. Pre ľubovoľné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typov m/n, n/m nemusí platiť $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, t. j. pre násobenie matíc neplatí komutatívny zákon.
5. Pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ typov m/n, n/p, p/q platí
$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\,\mathbf{C}$$
6. Pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ typov m/n, m/n, n/p platí
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC},$$

a pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ typov m/n, m/n, p/m platí

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}.$$

7. $$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{A}.$$

8. Pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typov m/n, n/m platí
$$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\,\mathbf{B}.$$
kde α, β sú čísla.

9. Pre štvorcové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí
$$|\,\mathbf{AB}\,| = |\,\mathbf{A}\,|\,|\,\mathbf{B}\,|\,,$$

Majme maticu $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$, potom matica $\mathbf{A}' = (a'_{ij})_{n,m}$ pričom $a'_{ij} = a_{ji}$ sa nazýva *transponovanou maticou* k matici $\mathbf{A}$. Transponovanú maticu dostaneme z pôvodnej matice výmenou riadkov za stĺpce v pôvodnom poradí.

10. Pre súčin transponovaných matíc platí
$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$$

Maticu typu m/n, ktorej všetky prvky sa rovnajú nule, nazývame *nulovou maticou* $\mathbf{0}$ typu m/n. *Jednotkovou maticou* n-tého stupňa nazývame štvorcovú maticu
$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Pre ľubovoľnú štvorcovú maticu $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matica toho istého stupňa.

Štvorcovú maticu $\mathbf{A}$ nazývame *regulárnou*, ak $|\,\mathbf{A}\,| \neq 0$; ak $|\,\mathbf{A}\,| = 0$, maticu nazývame *singulárnou maticou*.

Inverznou maticou regulárnej štvorcovej matice $\mathbf{A}$ n-tého stupňa nazývame maticu
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\,\mathbf{A}\,|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{21}, & \ldots, & A_{n1} \\ A_{12}, & A_{22}, & \ldots, & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n}, & A_{2n}, & \ldots, & A_{nn} \end{pmatrix},$$
kde A_{ij} je algebraickým doplnkom k prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$.

12. $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$,
13. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
14. $|\,\mathbf{A}\,|\,|\,\mathbf{A}^{-1}\,| = 1$,
15. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Pre každú maticu $\mathbf{A}$ existujú dve čísla $h_r(\mathbf{A})$, $h_s(\mathbf{A})$, udávajúce hodnosť riadkov, resp. hodnosť stĺpcov matice ako hodnosť sústavy n-tíc.

16. Pre každú maticu $\mathbf{A}$ je $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$.

Hodnosťou matice $\mathbf{A}$ nazývame číslo $h(\mathbf{A})$.

17. Ak matica $\mathbf{A}$ má subdeterminant r-tého stupňa rôzny od nuly a všetky subdeterminanty stupňa $(r + 1)$, ktoré obsahujú tento subdeterminant r-tého stupňa rovnajú sa nule, potom $h(\mathbf{A}) = r$.

Hodnosť matice vypočítame aj tak, že maticu $\mathbf{A}$ prevedieme na „trojuholníkový" tvar*) úpravami, ktoré nemenia jej hodnosť. Z tejto matice môžeme ľahko zistiť $h(\mathbf{A})$ na základe vety o hodnosti matice.

18. Hodnosť matice nemenia tieto úpravy:

a) vzájomná výmena dvoch ľubovoľných riadkov matice,

b) vynásobenie ľubovoľného riadku matice číslom $c \neq 0$,

c) pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov matice $\mathbf{A}$ k danému riadku matice $\mathbf{A}$,

d) pridanie alebo vynechanie riadku matice $\mathbf{A}$, ktorý je lineárnou kombináciou jej iných riadkov, vynechanie riadku, ktorý obsahuje samé nuly,

e) vzájomné vymenenie riadkov matice $\mathbf{A}$ za jej stĺpce.

Poznámka. Úpravy a) až d), ako to vyplýva z e), platia aj pre stĺpce matice.

---

*) Pod „*trojuholníkovým*" tvarom matice budeme rozumieť maticu, ktorej všetky prvky $a_{ij} = 0$ pre $i < j$.

Príklad 1. Riešme rovnicu

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix}3, & 2\\ 1, & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 2\end{pmatrix}.$$

Riešenie. Najprv zistíme, či matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3, & 2\\ 1, & 3\end{pmatrix}$ je regulárna, $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix}3, & 2\\ 1, & 3\end{vmatrix} = 7$. Ďalej nájdeme inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3, & -2\\ -1, & 3\end{pmatrix}$$

a vynásobíme rovnicu sprava maticou $\mathbf{A}^{-1}$. Dostaneme

$$\frac{1}{7}\mathbf{X}\begin{pmatrix}3, & 2\\ 1, & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3, & -2\\ -1, & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3, & -2\\ -1, & 3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2, & 1\\ 1, & 4\end{pmatrix}.$$

Podľa vlastnosti 11 je $\mathbf{XE} = \mathbf{X}$ a úhrnom máme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}\frac{2}{7}, & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{7}, & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$$

alebo aj

$$\mathbf{X} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2, & 1\\ 1, & 4\end{pmatrix}.$$

Príklad 2. Nájdime hodnosť matice $\mathbf{A}$ metódou rozširovania jej submatíc, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}4, & 3, & -5, & 2, & 3\\ 8, & 6, & -7, & 4, & 2\\ 4, & 3, & -8, & 2, & 7\\ 4, & 3, & 1, & 2, & -5\\ 8, & 6, & -1, & 4, & -6\end{pmatrix}.$$

Riešenie. Počítajme determinant submatice prvého stupňa $\mathbf{A}_1 = (a_{15})$, $|\mathbf{A}_1| = 3$. Rozšírme submaticu $\mathbf{A}_1$ na submaticu

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix}a_{14}, & a_{15}\\ a_{24}, & a_{25}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2, & 3\\ 4, & 2\end{pmatrix}.$$

Jej determinant je $-8 \neq 0$. Skúsme rozšíriť $\mathbf{A}_2$ o prvky z tretieho stĺpca a riadku. Determinant tejto submatice $\mathbf{A}_3$ je

$$\begin{vmatrix}-5, & 2, & 3\\ -7, & 4, & 2\\ -8, & 2, & 7\end{vmatrix} = 0.$$

Podobne rozšírením submatice $\mathbf{A}_2$ dostaneme

$$\begin{vmatrix}-5, & 2, & 3\\ -7, & 4, & 2\\ 1, & 2, & -5\end{vmatrix} = 0, \text{ a } \begin{vmatrix}-5, & 2, & 3\\ -7, & 4, & 2\\ -1, & 4, & -6\end{vmatrix} = 0.$$

Determinanty ostatných submatíc tretieho stupňa, ktoré sú rozšírením submatice $\mathbf{A}_2$, rovnajú sa nule, pretože obsahujú prvky z prvého alebo druhého stĺpca matice, ktoré sú úmerné prvkom v štvrtom stĺpci matice. Preto hodnosť matice je $h(\mathbf{A}) = 2$.

Príklad 3. Nájdime hodnosť matice $\mathbf{A}$ z predchádzajúceho príkladu metódou úprav na „trojuholníkový" tvar.

Riešenie: Násobme štvrtý stĺpec matice $\mathbf{A}$ z príkladu 2 postupne číslami —2, —3/2 a pripočítajme k prvému, resp. druhému stĺpcu matice $\mathbf{A}$:

$$h\begin{pmatrix} 4, & 3, & -5, & 2, & 3 \\ 8, & 6, & -7, & 4, & 2 \\ 4, & 3, & -8, & 2, & 7 \\ 4, & 3, & 1, & 2, & -5 \\ 8, & 6, & -1, & 4, & -6 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 0, & 0, & -5, & 2, & 3 \\ 0, & 0, & -7, & 4, & 2 \\ 0, & 0, & -8, & 2, & 7 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & -5 \\ 0, & 0, & -1, & 4, & -6 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} -5, & 2, & 3 \\ -7, & 4, & 2 \\ -8, & 2, & 7 \\ 1, & 2, & -5 \\ -1, & 4, & -6 \end{pmatrix},$$

kde sme vynechali nulové stĺpce podľa úpravy 18d). Vynásobme druhý stĺpec matice 1/2 a vymeňme ho s prvým stĺpcom. Dostaneme

$$h(\mathbf{A}) = h\begin{pmatrix} 1, & -5, & 3 \\ 2, & -7, & 2 \\ 1, & -8, & 7 \\ 1, & 1, & -5 \\ 2, & -1, & -6 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1, & -5, & 3 \\ 0, & 3, & -4 \\ 0, & -3, & 4 \\ 0, & 6, & -8 \\ 0, & 9, & -12 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1, & -5, & 3 \\ 0, & 3, & -4 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1, & -5, & 3 \\ 0, & 3, & 4 \end{pmatrix} = 2,$$

kde sme v prvej matici odčítali vhodne zvolené násobky prvého riadku od ostatných riadkov, to isté sme robili v druhej matici s druhým riadkom, pričom sme prvý ponechali bez zmeny, a v tretej matici sme vynechali nulové riadky.

292. Zistite, či pre matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ platí $\mathbf{A} = \mathbf{B}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & 2, & 1 \\ \pi, & 2, & 3 \\ \sqrt{12}, & 2, & \sqrt{18} \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9/3, & 4/2, & 1 \\ \pi, & 2\pi/\pi, & 3\pi/\pi \\ 2\sqrt{3}, & 8/4, & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 2, & 1, & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 5, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 5, & 3, & 1 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6/2, & 4/2, & 2/2 \\ -i^2, & 2, & 3 \end{pmatrix}$,

kde i je imaginárna jednotka.

293. Pre aké čísla x, y, z a u platí:

a) $\begin{pmatrix} 2x + 5y, & 4 \\ 9 & 2y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 9, & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2x + 3, & 4, & 6, & 8 \\ 8, & 12, & 6, & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x + 1, & 2y + 3, & 6, & 8 \\ 8, & 6z + 2, & 3u, & 4 \end{pmatrix}$.

294. Nájdite transponované matice k maticiam

a) $\begin{pmatrix} 3, & 1, & 2, & 3 \\ 4, & 2, & 1, & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3, & 5, & 0 \\ 0, & 1, & 2 \\ 3, & 0, & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

295. Nájdite čísla x a y tak, aby matica

$\begin{pmatrix} 1, & 3x+2 \\ 3y+6, & 2 \end{pmatrix}$ bola transponovaná k matici $\begin{pmatrix} 1, & 12/19 \\ 39/7, & 2 \end{pmatrix}$.

296. Nájdite súčet nasledujúcich matíc $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4, & -2 \\ 5, & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 7, & 11 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5, & 1, & -2 \\ 7, & 1, & -3 \\ 3, & 2, & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 2 \\ 2, & 2, & 1 \\ 1, & 3, & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 1, & 2 \\ 2, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 2, & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$.

297. Vynásobte matice:

a) $\begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 5, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & -2 \\ 2, & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1, & -2 \\ 2, & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 5, & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 3, & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5/7, & 4/7 \\ 3/7, & -1/7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4, & -3 \\ 3, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ -2, & 2, & 2 \\ 4, & -4, & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ -2, & -4, & -6 \\ 3, & 6, & 9 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 1, & 2, & 4 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 3, & 2 \\ 2, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ c, & b, & a \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & a, & c \\ 1, & b, & b \\ 1, & c, & a \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & 2, & 1 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 5, & 7, & -3, & -4 \\ 7, & 6, & -4, & -5 \\ 6, & 4, & -3, & -2 \\ 8, & 5, & -6, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 3, & 5, & 7 \\ 2, & 4, & 6, & 8 \end{pmatrix}$.

298. Vynásobte matice:

a) $(1,\ 2,\ 1)\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot(1,\ 2,\ 1)$; c) $\begin{pmatrix}1, & 2, & 2\\2, & 3, & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1, & 3\\1, & 4\\2, & 2\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}1, & 3, & 4, & 2\\-2, & 3, & -1, & 2\\4, & 1, & 2, & 3\\1, & 2, & 2, & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\-1\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}2, & 3, & 4, & 5\\1, & 3, & 2, & 4\\1, & 1, & 2, & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2, & 1, & 1\\7, & 5, & 2\\3, & 4, & 2\\1, & 2, & 1\end{pmatrix}$.

299. Dokážte, že operácia transponovania matíc má tieto vlastnosti:

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}'+\mathbf{B}'$; c) $(c\mathbf{A})' = c\mathbf{A}'$;

b) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$; d) $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$,

kde c je číslo a $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú matice.

300. Vypočítajte:

a) $\begin{pmatrix}1, & -3\\2, & -1\end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix}1, & 2\\3, & 1\end{pmatrix}^2$; c) $\begin{pmatrix}1, & 3\\2, & 2\end{pmatrix}^5$; d) $\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\2, & 1, & 3\\1, & 2, & 2\end{pmatrix}^2$; e) $\begin{pmatrix}1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}^n$;

f) $\begin{pmatrix}\cos x, & -\sin x\\\sin x, & \cos x\end{pmatrix}^n$; g) $\begin{pmatrix}2, & -1\\3, & -2\end{pmatrix}^n$; h) $\begin{pmatrix}x_1, & 0, & 0, & \dots, & 0\\0, & x_2, & 0, & \dots, & 0\\\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\0, & 0, & 0, & \dots, & x_n\end{pmatrix}^k$.

301. Vypočítajte $\begin{pmatrix}17, & -6\\35, & -12\end{pmatrix}^5$, ak viete, že

$$\begin{pmatrix}17, & -26\\35, & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2, & 3\\5, & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2, & 0\\0, & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7, & 3\\5, & -2\end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix}2, & 3\\5, & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7, & 3\\5, & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix}.$$

302. Vypočítajte

$$\begin{pmatrix}7, & -12, & 6\\10, & -19, & 10\\12, & -24, & 13\end{pmatrix}^4$$

s použitím rovnosti

$$\begin{pmatrix}7, & -12, & 6\\10, & -19, & 10\\12, & -24, & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2, & 1, & 3\\1, & 0, & 5\\0, & -1, & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\0, & 1, & 0\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5, & -9, & 5\\-6, & 12, & -7\\-1, & 2, & -1\end{pmatrix}.$$

303. Nájdite determinant matice, ktorá sa rovná súčinu matice $\begin{pmatrix}4, & 1, & 1, & 3\\ 3, & 2, & 1, & 2\end{pmatrix}$ a k nej transponovanej matice.

304. Ukážte, že pre matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, ak

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1, & 3\\ 2, & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}2, & 4\\ 7, & 1\end{pmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1, & 3, & 2\\ 0, & 1, & 1\\ 2, & 3, & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}2, & 1, & 1\\ 0, & 1, & 1\\ 2, & 0, & 1\end{pmatrix}$.

305. Vypočítajte $5\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$, $\mathbf{AB} + \mathbf{BA}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})$, a $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$, ak

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2, & 3\\ 0, & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}3, & 5\\ 7, & 1\end{pmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 2, & 2, & 1\\ 3, & 1, & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}3, & 1, & -2\\ 2, & -1, & 1\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$.

306. Nájdite všetky matice komutatívne s maticou $\mathbf{A}$, t. j. matice $\mathbf{X}$, pre ktoré platí $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1, & 3\\ 2, & 4\end{pmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$; c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2, & 0, & 0\\ 0, & 2, & 0\\ 3, & 1, & 2\end{pmatrix}$; d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0, & 2, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 2, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 2\\ 0, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$.

307. Ak pre štvorcové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, dokážte:

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$;

b) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$;

c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \mathbf{A}^n + \binom{n}{1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + \binom{n}{2}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + \ldots + \mathbf{B}^n$, kde n je prirodzené číslo.

308. Nájdite všetky štvorcové matice druhého rádu, ktorých

a) druhá mocnina sa rovná nulovej matici;

b) druhá mocnina sa rovná jednotkovej matici;

c) tretia mocnina sa rovná jednotkovej matici.

309. Dokážte, že každá matica druhého rádu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}$ vyhovuje rovnici

$$\mathbf{X}^2 - (a + d)\,\mathbf{X} + (ad - bc)\,\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

310. Presvedčte sa o platnosti týchto zákonov:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\,\mathbf{C}$,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,
   $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$,
3. $a(b\mathbf{A}) = (ab)\,\mathbf{A}$,
4. $a(\mathbf{AB}) = (a\mathbf{A})\,\mathbf{B}$,

kde a, b sú čísla a $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sú matice druhého rádu.

311. Dokážte, že pre determinant súčinu matíc $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, kde $\mathbf{A}$ je matica typu m/n a $\mathbf{B}$ je matica typu n/m, platí

$$|\mathbf{C}| = \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqq n} |\mathbf{A}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}| \, |\mathbf{B}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}|$$

pre $m \leqq n$, kde $\mathbf{A}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ je submatica m-tého rádu matice $\mathbf{A}$, utvorená zo stĺpcov matice $\mathbf{A}$ s indexami $i_1, i_2, \ldots, i_m$ a $\mathbf{B}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ je submatica m-tého rádu matice $\mathbf{B}$, utvorená z jej riadkov s indexami $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Ak $m > n$, potom

$$|\mathbf{C}| = 0.$$

312. Násobením dvoch obdĺžnikových matíc dokážte identitu

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) -$$
$$-(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = \sum_{i<k} (a_ib_k - a_kb_i)^2.$$

Na základe predchádzajúceho výsledku dokážte Buňakovského nerovnosť

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

313. K uvedeným maticiam nájdite inverzné matice:

a) $\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \cos x, & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \\ -4, & -5, & 6 \\ -3, & -3, & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 3i, & 1, & 2-i \\ 0, & 3, & 5 \\ 2i, & i, & 3+i \end{pmatrix}$, kde i je imaginárna jednotka;

g) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1, & 0, & -1, & 2 \\ 1, & 1, & -1, & 1 \\ -2, & 0, & 3, & -6 \\ -4, & -1, & 6, & -10 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & \ldots, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & 1, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}$.

314. Riešte rovnice pre neznámu maticu $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4, & 6 \\ 6, & 9 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{X} \begin{pmatrix} 3, & 5 \\ 2, & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 5 \\ -2, & 6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7, & 5 \\ 6, & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3, & -1, & 2 \\ 4, & -3, & 3 \\ 1, & 3, & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3, & 9, & 7 \\ 1, & 11, & 7 \\ 7, & 5, & 7 \end{pmatrix}$; f) $\mathbf{X} \begin{pmatrix} 2, & 7, & 3 \\ 3, & 9, & 4 \\ 1, & 5, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$.

315. Ak pre regulárne matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, dokážte platnosť vzťahu

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}.$$

316. Nájdite hodnosť matíc metódou rozširovania ich submatíc:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3, & -6, & 2, & 1, & 1 \\ 2, & -4, & 1, & 2, & 4 \\ 3, & -6, & 5, & -11, & -29 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 6, 2, 3, 4, -1 \\ 3, 1, 2, 2, -1 \\ 3, 1, 1, 2, \ \ 0 \\ 6, 2, 1, 4, \ \ 1 \\ 3, 1, 2, 2, -1 \end{pmatrix}; \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, 2 \\ 2, & -4, & 4, 1 \\ -1, & -19, & 5, 0 \\ 3, & 15, & -1, 2 \end{pmatrix}.$$

317. Nájdite hodnosť matíc metódou úprav na „trojuholníkový" tvar matice:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 16, & 33, & 19, & 41 \\ 48, & 100, & 59, & 126 \\ 48, & 100, & 60, & 128 \\ 16, & 34, & 22, & 46 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 13, & 108, & 26, & 19, & 0 \\ 6, & 102, & 21, & 17, & -1 \\ 7, & 6, & 5, & 2, & 1 \\ 1, & -96, & -16, & -15, & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 3, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 4, & 1 \\ 5, & 4, & 6, & 3 \\ 2, & -1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1, & 1, & 1 \\ 2, & 3, & 2, & 0, & 1 \\ 3, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 2, & -3, & 0, & 2, & 2 \\ 6, & 4, & 4, & 2, & 3 \end{pmatrix}.$$

318. Nájdite hodnosť matíc:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 6, & 9, & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1, & 3, & -2 \\ 2, & 6, & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & -1, & 1 \\ 1, & 7, & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 4 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 1, & -2, & 3 \\ -3, & -6, & -9 \\ 4, & 8, & 12 \end{pmatrix}; \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 2, & 1, & 3, & -1 \\ 3, & -1, & 2, & 0 \\ 1, & 3, & 4, & -2 \\ 4, & -3, & 1, & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{g)} \begin{pmatrix} 2, & 0, & 2, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \\ 2, & 1, & 0, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{h)} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

319. Aká môže byť hodnosť matice $\mathbf{A}$ pre rôzne hodnoty čísla x, ak

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 3, & -2, & 18 \\ x, & 2, & 1, & 5 \\ 3, & 1, & 2, & -2 \end{pmatrix}. \quad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & x, & 10, & 1 \\ 2, & -1, & x, & 3 \\ 5, & 10, & 30, & -5 \end{pmatrix}.$$

320. Pre aké čísla x a y je hodnosť matice $\mathbf{A}$ najmenšia:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 3, & -1 \\ x, & y, & -2 \\ 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4, & 3, & -2, & 1 \\ 2, & -1, & 3, & 4 \\ x, & 2, & 1, & 1 \\ y, & -3, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

321. Ako sa môže zmeniť hodnosť matice, ak k nej pripíšeme: a) jeden stĺpec; b) dva stĺpce.

322. Zostavte maticu, ktorá má hodnosť a) 1; b) 2; c) 3.

323. Ako sa zmení súčin matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, ak

a) zameníme i-tý riadok s j-tým riadkom matice $\mathbf{A}$;
b) k i-tému riadku matice $\mathbf{A}$ pripočítame jej j-tý riadok vynásobený číslom c;
c) ak v matici $\mathbf{B}$ zameníme i-tý stĺpec za j-tý stĺpec;
d) k i-tému stĺpcu matice $\mathbf{B}$ pripočítame jej j-tý stĺpec vynásobený číslom c.

3,4. Systém lineárnych rovníc

Nehomogénny systém lineárnych rovníc

Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi má tvar

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \tag{1}$$

Čísla a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, nazývame *koeficientmi* systému lineárnych rovníc (1). Čísla b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, nazývame *absolútnymi členmi* systému (1) a $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nazývame *neznámymi*.

Riešením systému (1) nazývame takú n-ticu čísiel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, že po dosadení čísiel a_1 za x_1, a_2 za x_2, $\ldots$, a_n za x_n do systému (1) dostaneme m správnych rovností.

Maticu

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *maticou systému* (1).

Maticu

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}, & b_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírenou maticou systému* (1).

Cramerovo pravidlo. Ak pre systém lineárnych rovníc (1) sa $m = n$ (t. j. počet rovníc sa rovná počtu neznámych) a determinant matice systému (1) je rôzny od nuly, $D = |a_{ij}|_1^n \neq 0$, systém (1) má jediné riešenie

$$(D_1/D, D_2/D, \ldots, D_n/D), \tag{2}$$

kde determinanty $D_1, D_2, \ldots, D_n$ dostaneme z determinantu matice systému (1) nahradením prvého, druhého, $\ldots$, n-tého stĺpca stĺpcom absolútnych členov.

Príklad 1. Riešme systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= -9. \end{aligned}$$

Riešenie. Vypočítame najprv determinant matice systému

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 3, & -4, & 5 \\ 2, & 5, & -7 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Keďže determinant systému je rôzny od nuly, riešime systém pomocou Cramerovho pravidla. Vypočítame ďalej

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5, & 2, & -3 \\ 10, & -4, & 5 \\ -9, & 5, & -7 \end{vmatrix} = -7, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1, & 5, & -3 \\ 3, & 10, & 5 \\ 2, & -9, & -7 \end{vmatrix} = -39$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -5 \\ 3, & -4, & 10 \\ 2, & 5, & -9 \end{vmatrix} = -35.$$

Riešením uvedeného systému podľa (2) je trojica (7/4, 39/4, 35/4).

Frobeniova veta. Systém lineárnych rovníc (1) má riešenie vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice systému (1) sa rovná hodnosti jeho rozšírenej matice.

Nech systém lineárnych rovníc (1), v ktorom $m \neq n$, má riešenie a hodnosť matice systému (1) nech je $r \geq 1$. Systém (1) riešime tak, že nájdeme v matici systému (1) subdeterminant D stupňa r, ktorý je rôzny od nuly. V systéme (1) zvolíme r rovníc, z koeficientov ktorých sú vytvorené riadky subdeterminantu D. Zvyšné rovnice vynecháme. Za hlavné neznáme považujeme tie, ktorých koeficienty tvoria prvky subdeterminantu D. Tieto hlavné neznáme (v počte r) ponecháme na ľavých stranách týchto r rovníc a zvyšných $n - r$ neznámych prenesieme na pravé strany rovníc.

Zvyšné neznáme považujeme za ľubovoľné parametre (voľné neznáme). Uvedeným spôsobom dostávame systém r lineárnych rovníc a r neznámymi, ktoré riešime Cramerovým pravidlom. Toto riešenie nazývame *všeobecným riešením.* Dosadením ľubovoľných čísiel za voľné neznáme dostávame jednotlivé riešenia systému (1).

Príklad 2. Riešme systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Riešenie. Počítajme hodnosť matice systému. Determinant submatice druhého stupňa v ľavom hornom rohu matice systému je

$$\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Rozšírme uvedenú submaticu druhého stupňa na všetky submatice tretieho stupňa a vypočítajme ich determinanty:

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 8 \\ 2, & 1, & 7 \\ 3, & 1, & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1, & 2, & 8 \\ 2, & 1, & 7 \\ 2, & -1, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hodnosť matice systému je $h(\mathbf{A}) = 2$. Pri výpočte hodnosti rozšírenej matice systému stačí vyšetriť determinanty matíc, ktoré dostaneme rozšírením submatice $\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}$. Pre tieto platí

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 9 \\ 2, & 1, & 6 \\ 3, & 1, & 7 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1, & 2, & 9 \\ 2, & 1, & 6 \\ 2, & -1, & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Hodnosť rozšírenej matice systému je preto $h(\mathbf{B}) = 2$. Systém lineárnych rovníc má riešenie; nájdeme ho tak, že budeme uvažovať prvé dve lineárne nezávislé rovnice systému

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Hlavné neznáme ponecháme na ľavých stranách a voľné neznáme, t. j. v našom prípade členy s x_3, prenesieme na pravé strany rovníc. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 9 - 8x_3 \\ 2x_1 + x_2 &= 6 - 7x_3. \end{aligned}$$

Riešením tohto systému je dvojica $(1 - 2x_3, 4 - 3x_3)$. Ak položíme $x_3 = q$, riešením pôvodného systému lineárnych rovníc je trojica

$$(1 - 2q, 4 - 3q, q),$$

kde q je ľubovoľné reálne číslo.

Eliminačná metóda. Dva systémy lineárnych rovníc nazývame *ekvivalentnými*, ak každé riešenie prvého systému je riešením i druhého systému a naopak.

Elementárnymi úpravami systému lineárnych rovníc nazývame nasledujúce úpravy:

1. vzájomnú výmenu dvoch rovníc v systéme,
2. vynásobenie ľubovoľnej rovnice systému číslom rôznym od nuly,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie zvyšných rovníc k danej rovnici systému.

Tieto úpravy prevádzajú daný systém rovníc na ekvivalentný systém lineárnych rovníc.

Ak všetky koeficienty a_{ij} systému (1) sa rovnajú nule a aspoň jeden z absolútnych členov b_i je rôzny od nuly, systém (1) nemá riešenie.

Ak všetky koeficienty a_{ij} systému (1) sa rovnajú nule a všetky absolútne členy b_i sa rovnajú nule, každá n-tica čísiel je riešením systému (1).

Ak sa všetky koeficienty systému (1) nerovnajú nule, systém (1) možno riešiť eliminačnou metódou. Ak $a_{ki} \neq 0$, vzájomnou výmenou k-tej rovnice a prvej rovnice systému (1) a neznámych x_1 a x_i dostaneme nový systém, ktorý má prvý koeficient v prvej rovnici rovný a_{ki}. V tomto systéme vykonáme tieto elementárne úpravy:

1. vynásobíme prvú rovnicu číslom $1/a_{ki}$,
2. pripočítame k všetkým ostatným rovniciam také násobky prvej rovnice, aby koeficienty pri neznámej x_i sa rovnali nule.

Tak dostaneme systém, ktorý obsahuje neznámu x_i iba v prvej rovnici, zvyšné rovnice obsahujú už iba $(n - 1)$ neznámych. Tento postup môžeme opakovať s ostatnými $(n - 1)$ rovnicami. Pritom môžu nastať dva prípady:

1. Postup možno vykonať práve m-krát.
2. Postup možno vykonať k-krát, kde $k < m$, t. j. všetky koeficienty zvyšných $m - k$ rovníc sa rovnajú nule.

V druhom prípade sú dve možnosti:

a) Jedna alebo viac posledných $(m - k)$ rovníc má absolútne členy rôzne od nuly, t. j. má tvar $0 = \alpha$, kde $\alpha \neq 0$. Systém (1) nemá riešenie.

b) Všetkých zvyšných $(m - k)$ rovníc má absolútne členy rovnajúce sa nule, t. j. majú tvar $0 = 0$. Vynechaním týchto rovníc dostaneme systém ekvivalentný so systémom (1).

V prípade 1 a 2b dostaneme po jednoduchej úprave riešenie systému (1).

Príklad 3. Riešme eliminačnou metódou systém lineárnych rovníc

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= -6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad &= 9. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Riešenie. Výmenou prvej a druhej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad &= 9. \end{aligned}$$

Vynásobíme prvú rovnicu 1/2 a odčítame postupne vhodné násobky tejto rovnice od ostatných tak, aby vypadli členy s x_1. Máme

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= -6 \\ \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 3 \\ \frac{9}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Pretože $a_{22} = 1 \neq 0$, druhú rovnicu vynásobíme vhodnými číslami a odčítame od ostatných rovníc, aby vypadli členy s x_2. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= -1 \\ x_2 + 2x_3 &= -6 \\ -\frac{9}{2}x_3 &= 18 \\ -\frac{13}{2}x_3 &= 26. \end{aligned}$$

Vynásobíme tretiu rovnicu s číslom $-2/9$ a odčítame vhodné násobky tejto rovnice od ostatných tak, aby vypadli členy s x_3. Máme

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \quad &= 2 \\ x_3 &= -4 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Vynechaním poslednej rovnice dostaneme systém ekvivalentný so systémom (3), ktorého riešením je trojica $(1, 2, -4)$. Riešenie systému (3) je $(1, 2, -4)$.

Príklad 4. Riešme eliminačnou metódou systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 - 13x_3 + 7x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Riešenie. Prvú rovnicu, násobenú postupne 3, 1, odčítame od ostatných. Máme

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_2 - 8x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 10x_2 - 16x_3 + 8x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Druhú rovnicu vynásobíme 1/5 a odčítame vhodné násobky tejto rovnice od ostatných tak, aby vypadli členy s x_2. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 &= \frac{2}{5} \\ x_2 - \frac{8}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 &= \frac{1}{5} \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Vynechaním poslednej rovnice a prevedením voľných neznámych na pravú stranu rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5} \\ x_2 &= \frac{8}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Ak položíme $x_3 = 5p$ a $x_4 = 5q - 1$, dostaneme ako riešenie daného systému štvoricu $(p - 3q + 1,\ 8p - 4q + 1,\ 5p,\ 5q - 1)$, kde p a q sú ľubovoľné čísla.

Príklad 5. Riešme eliminačnou metódou systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 - 13x_3 + 7x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Riešenie. Podobnými úpravami ako v predošlom príklade dostaneme systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 &= \frac{2}{5} \\ x_2 - \frac{8}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 &= \frac{1}{5} \\ 0 &= 3. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že pôvodný systém lineárnych rovníc nemá riešenie.

Poznámka. Eliminačnú metódu je výhodnejšie zapisovať priamo pomocou rozšírenej matice systému.

Homogénny systém lineárnych rovníc

Systém lineárnych rovníc nazývame *homogénnym*, ak všetky jeho absolútne členy sa rovnajú nule. Každý homogénny systém lineárnych rovníc má nulové (triviálne) riešenie. Aby homogénny systém lineárnych rovníc mal nenulové riešenie je nutné a stačí, aby hodnosť matice systému bola menšia ako počet neznámych.

Ak v homogénnom systéme lineárnych rovníc sa počet rovníc rovná počtu neznámych, nutnou a postačujúcou podmienkou existencie nenulového riešenia je, aby determinant systému sa rovnal nule.

324. Zistite, či dané n-tice sú riešeniami danej rovnice:

a) $2x + 3y = 11$, $(0, -3)$, $(1, 2)$, $(7, -1)$;

b) $x - y + 2z = -1$, $(1, 1, 1)$, $(2, -3, 0)$, $(-1, -2, -1)$;

c) $2x + y + z + u = 0$, $(0, 0, 0, 0)$, $(1, -1, -2, 1)$.

325. Ukážte, že všetky riešenia rovnice

a) $x - 2y = 0$ sú dvojice $(2t, t)$ kde t je ľubovoľné číslo;

b) $x + 2y - 3z = 7$ sú trojice $(7 + 3t - 2s, s, t)$, kde s, t sú ľubovoľné čísla;

c) $x + y + z + 3u = 2$ sú štvorice $(2 - p - q - 3r, p, q, r)$, kde p, q, r sú ľubovoľné čísla.

326. Ukážte, že n-tica a) (1, 2, 5); b) (1, 1, 3, 2) je riešením nasledujúceho systému lineárnych rovníc:

a) $$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 9; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 14. \end{aligned}$$

327. Nájdite čísla p, q, r tak, aby štvorica (1, 3, 2, 1) bola riešením systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} px_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2px_1 + qx_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2qx_2 + rx_3 - 3x_4 &= 10. \end{aligned}$$

328. V nasledujúcich úlohách ukážte, že každé riešenie systému lineárnych rovníc (1) je riešením rovnice (2) bez toho, že by ste našli riešenie systému (1).

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ x + 2y &= 11, \end{aligned}\right\}$ (1) $\qquad 7x + 9y = -3;$ (2)

b) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 10, \end{aligned}\right\}$ (1) $\qquad x_1 - 8x_2 + 11x_3 = 15.$ (2)

329. Riešte systémy lineárnych rovníc:

a) $$\begin{aligned} 8x - 3y + 12 &= 0 \\ 3x + 2y - 33 &= 0; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 8; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x - 6y &= -2 \\ x - 3y &= 4; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Urobte diskusiu o každom riešení!

330. Riešte systémy rovníc:

a) $$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 8 \\ -x + 3y + 2z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= -4; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z - 7 &= 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - z - 8 &= 0 \\ -\frac{2}{3}x + y + \frac{1}{3}z - 10 &= 0; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + y + z - u &= 12 \\ x + y - z + u &= 13 \\ x - y + z + u &= 5 \\ -x + y + z + u &= 8; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x : y : z : u &= 1 : 2 : 3 : 4 \\ 8x - 7y + 6z - 5u &= 16. \end{aligned}$$

331. Pomocou Cramerovho pravidla riešte systémy lineárnych rovníc

a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 11x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 10; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 - 15x_3 - 5x_4 &= 1; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12; \end{aligned}$$

e) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 - x_4 &= -2; \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4; \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 5; \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 15 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0; \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= 2 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} &= n. \end{aligned}$

Použitím Frobeniovej vety rozhodnite, či systémy lineárnych rovníc uvedené v úlohách **332**, **333**, **334** majú riešenie a riešte ich.

332. a) $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 4x - 2y &= 9; \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x - 6y &= 9 \\ x - 2y &= 3; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 2x - y &= 0 \\ 4x - 5y &= 6; \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} -2x + y &= -1 \\ x + 2y &= 8 \\ -6x - 3y &= 3. \end{aligned}$

333. a) $\begin{aligned} x - 2x + 2z &= -9 \\ 3x + 5y + 4z &= 10 \\ 5x + 12y + 6z &= 29; \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= -4 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1; \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 7x_1 + 14x_2 - 21x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 10x_2 - 15x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 3. \end{aligned}$

334. a) $\begin{aligned} 6x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 10x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 &= 1; \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 9x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 12x_2 - 6x_3 + 10x_4 &= 1; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_4 &= -1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 10x_4 &= -2 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 &= -4 \\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 &= -6 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -1; \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 &= -1; \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8; \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ -2x_1 - 2x_2 &= -6. \end{aligned}$

335. Nasledujúce systémy lineárnych rovníc riešte eliminačnou metódou:

a) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0\\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= -3\\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 &= 16; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0\\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1\\ 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= 1\\ 2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 &= 13; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4\\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13\\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7\\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 12x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 21x_4 + 21x_5 &= 15\\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 &= 43\\ 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 38x_4 + 40x_5 &= 26\\ 84x_1 + 49x_2 + 105x_3 + 141x_4 + 144x_5 &= 99. \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 5x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 25x_4 &= 15\\ 15x_1 + 34x_2 + 25x_3 + 64x_4 &= 40\\ 20x_1 + 46x_2 + 34x_3 + 89x_4 &= 70\\ 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 &= 25; \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 &= 6\\ 20x_1 - 13x_2 + 14x_3 - 13x_4 &= -23\\ 8x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 10x_4 &= 10\\ 9x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 &= -3\\ 18x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 17x_4 &= 3. \end{aligned}$$

336. Riešte systémy lineárnych rovníc v závislosti od parametra a:

a) $$\begin{aligned} 2x + 9y + 2z &= 7a - 4\\ 3x + 3y + 4z &= 3a - 6\\ 4x - 6y + 2z &= -a - 8, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1\\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1\\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1; \end{aligned}$$

napíšte riešenie pre $a = 0, 1, -2$;

c) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 2\\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1\\ x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 22x_4 &= 9\\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= a; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 &= 1\\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 &= 1\\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1; \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2\\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_4 &= 2\\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + ax_4 &= 7\\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2. \end{aligned}$$

V úlohách **337** a **338** riešte systémy lineárnych rovníc v závislosti od parametrov a, b:

337. a) $$\begin{aligned} ax + 3y &= 1\\ bx + 2y &= 3; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} ax - by &= b - a\\ a^2x - b^2y &= a - b; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} ax + by &= 2ab\\ bx + ay &= a^2 + b^2; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} ax + y + z &= 1\\ 6x - 3y + bz &= 2. \end{aligned}$$

338. a) $$\begin{aligned} ax - 2y + bz &= 1\\ -2x + by - 2z &= 3\\ x - y + z &= 0; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} ax + y + z &= 4\\ x + by + z &= 3\\ x + 2by + z &= 4. \end{aligned}$$

339. Riešte systémy lineárnych rovníc v závislosti od parametrov a, b, c:

a) $$\begin{aligned} ax + 2y - 3z &= 2 \\ x + y - z &= c \\ bx - y + z &= 3; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= d \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ x + by + z &= b \\ x + y + cz &= c; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a - 1 \\ x + y + az &= (a - 1)^2. \end{aligned}$$

V úlohách **340**, **341** a **342** riešte homogénne systémy lineárnych rovníc.

340. a) $$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 3x - y &= 0; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ 4x + 6y &= 0; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 5x + 2y - 18z &= 0 \\ 2x + y - 8z &= 0; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x - 4y + 2z &= 0 \\ 4x + 2y - 5z &= 0; \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 3x + 4y - 7z &= 0 \\ 5x + 2y - 6z &= 0. \end{aligned}$$

341. a) $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 8x_4 &= 0; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0; \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 26x_3 + 22x_4 &= 0 \\ x_1 - 8x_3 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

342. a) $$\begin{aligned} 3x_1 - x_3 - 2x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 5x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 9x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 10x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 13x_5 &= 0; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 8x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_3 - x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_4 &= 0 \\ -x_3 + x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_5 + x_6 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_3 - x_5 + x_6 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &= 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_3 + x_6 &= 0. \end{aligned}$$

343. Dokážte, že ak v homogénnom systéme lineárnych rovníc je počet rovníc o jednotku menší ako počet neznámych, potom riešenie je:

$$x_1 = M_1t, \qquad x_2 = -M_2t, \qquad x_3 = M_3t, \qquad x_4 = -M_4t, \; \ldots, \; x_n = (-1)^{n-1}M_nt,$$

kde $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú determinanty submatíc, ktoré dostaneme z matice systému vynechaním prvého, druhého, ..., n-tého stĺpca a t je ľubovoľné reálne číslo.

344. Na základe výsledkov predchádzajúcej úlohy riešte homogénne systémy lineárnych rovníc

a) $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$
$x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 0;$

b) $3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0;$

c) $3x_1 - 7x_2 + x_3 + 6x_4 = 0$
$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0.$

Uvedené úlohy riešte aj inými metódami; porovnajte riešenia.

345. Nájdite parametre a, b tak, aby nasledujúce homogénne systémy lineárnych rovníc mali nenulové riešenia:

a) $2x + 3y - z = 0$
$ax + 4y + 2z = 0;$

b) $3x + ay = 0$
$bx - y = 0;$

c) $2x - 5y + (4 - a)z = 0$
$3x - (7 + a)y + 5z = 0$
$(4 - a)x - 9y + 6z = 0;$

d) $ax + 2y + z = 0$
$3x + 2ay + z = 0$
$-a^2x - y + (1 - a)z = 0.$

Nájdite tieto riešenia.

346. Zistite, aké podmienky musia spĺňať koeficienty uvedeného homogénneho systému lineárnych rovníc, aby tento systém mal nenulové riešenie:

a) $ax_1 + bx_2 + x_3 = 0$
$cx_1 + dx_2 - x_4 = 0$
$-ex_2 + cx_3 + ax_4 = 0$
$ex_2 + dx_3 + bx_4 = 0;$

b) $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$
$bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0$
$cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0$
$dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0;$

c) $x_1 - bx_2 - cx_3 - dx_4 - ex_5 = 0$
$-ax_1 + x_2 - cx_3 - dx_4 - ex_5 = 0$
$-ax_1 - bx_2 + x_3 - dx_4 - ex_5 = 0$
$-ax_1 - bx_2 - cx_3 + x_4 - ex_5 = 0$
$-ax_1 - bx_2 - cx_3 - dx_4 + x_5 = 0.$

347. Štvorciferné číslo má ciferný súčet 20. Súčet jeho posledných dvoch cifier sa rovná druhej cifre zväčšenej o 5, súčet krajných cifier sa rovná druhej cifre zmenšenej o 3. Ak cifry tohto čísla napíšeme v opačnom poradí, číslo sa zväčší o 2178. Nájdite toto číslo.

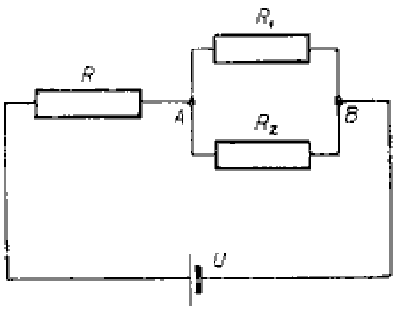
348. Ak jednu stranu trojuholníka zväčšíme o 11 cm a druhú stranu o toľko zmenšíme, dostaneme rovnostranný trojuholník. Ak prvú stranu vynásobíme štyrmi, je o 10 cm väčšia ako trojnásobok tretej strany. Zistite aké veľké sú strany trojuholníka.

349. Ak sa jeden rozmer kvádra zväčší o 1 cm, povrch kvádra sa zväčší o 54 cm^2. Ak sa druhý rozmer kvádra zväčší o 2 cm, povrch kvádra sa zväčší o 96 cm^2. Ak tretí rozmer kvádra zväčšíme o 3 cm, jeho povrch sa zväčší o 126 cm^2. Určte rozmery kvádra. Riešte úlohu vo všeobecnom prípade.

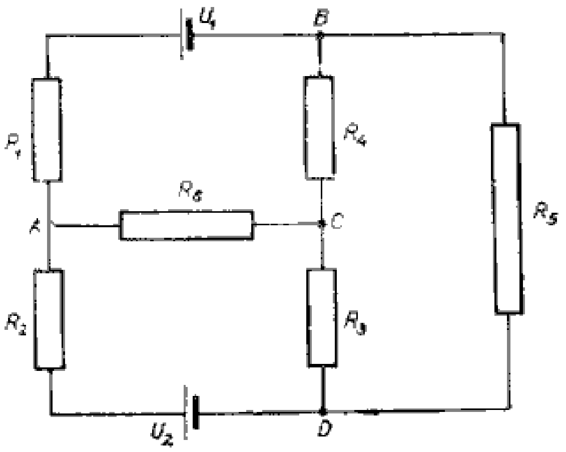
350. Na kúpalisku je 5500 mužov, žien a detí. Žien je dvakrát toľko ako mužov a detí štyrikrát toľko ako žien. Koľko je mužov, žien a detí?

351. Kyselina sírová sa skladá z vodíka, síry a kyslíka, pričom pomer hmotnosti vodíka a síry je 1 : 16 a pomer hmotnosti kyslíka a síry je 2 : 1. Koľko každého prvku obsahuje 1323 g kyseliny?

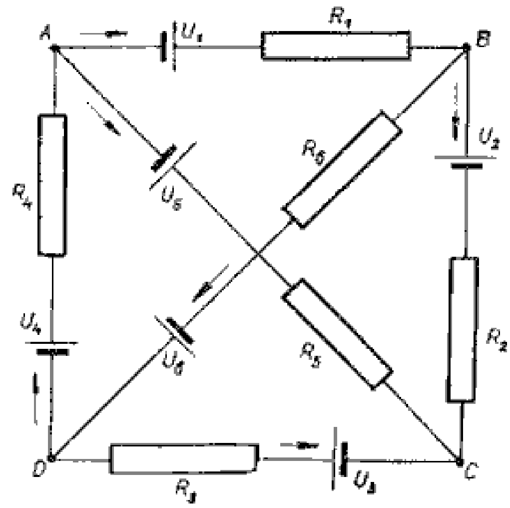
352. Hutník má štyri rôzne zliatiny, ktoré obsahujú cín, olovo, vizmut a kadmium. Prvá zliatina obsahuje 20 kg cínu a 10 kg olova (cínová spájka). Druhá obsahuje 12 kg olova a 6 kg cínu (olovená spájka). Tretia obsahuje 10,5 kg vizmutu, 6,4 kg olova, 3,1 kg cínu (vizmut — Roseov kov). Posledná zliatina obsahuje 10 kg vizmutu, 5 kg olova, 2,5 kg kadmia a 2,5 kg cínu. Aké množstvo každej zliatiny treba použiť na prípravu zliatiny, ktorá by obsahovala 81 kg vizmutu, 75 kg olova, 15 kg kadmia a 40 kg cínu?



Obr. 14a



Obr. 14b



Obr. 14c

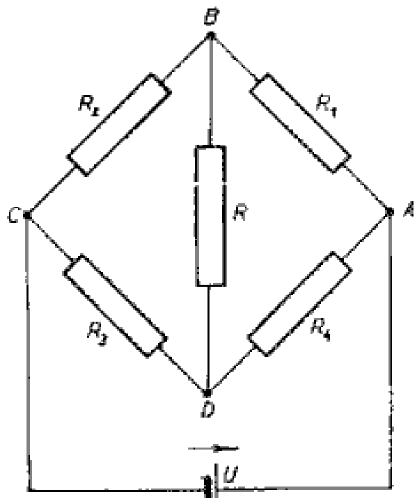
353. Vypočítajte prúdy vo všetkých vetvách elektrických sietí podľa *obr. 14a, b, c,* kde hodnoty jednotlivých odporov a elektromotorických síl sú:

a) $R = 1000\ \Omega$, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $U = 2$ V;

b) $U_1 = 46$ V, $U_2 = 62$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 1{,}5\ \Omega$ $R_6 = 2\ \Omega$;

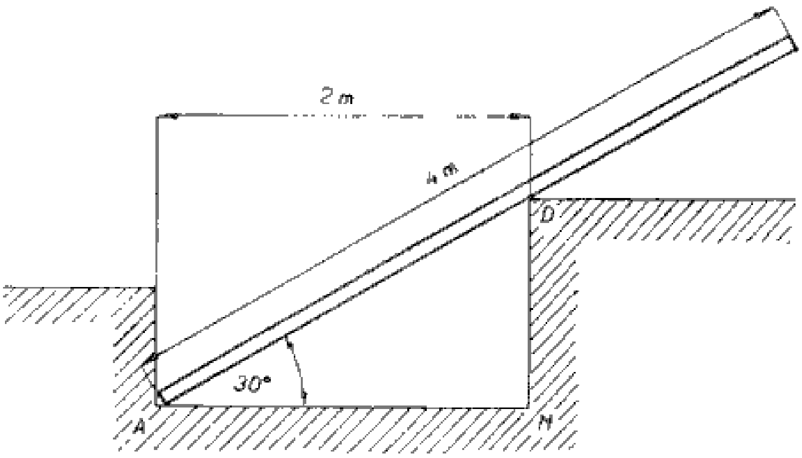
c) $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 5\ \Omega$, $R_6 = 6\ \Omega$, $U_1 = 4$ V, $U_2 = 8$ V, $U_3 = 12$ V, $U_4 = 16$ V, $U_5 = 20$ V, $U_6 = 24$ V.

354. Vypočítajte prúd vo vetve *BD* Wheatstoneovho môstika (pozri *obr. 15*).



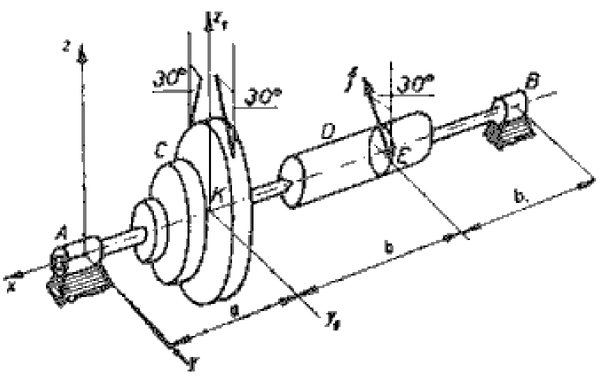
Obr. 15

355. Homogénna tyč dĺžky $l = 4$ m, na ktorú pôsobí tiaž $P = 60$ kp, je opretá jedným koncom A o schodík a v bode D sa opiera o hranu múru. Tyč zviera s vodorovnou rovinou uhol 30°, pričom $AM = 2$ m. Určte reakcie v bodoch A a D (pozri *obr. 16*).



Obr. 16

356. Stupňovitý zotrvačník C sústruhu sa poháňa remeňovým prevodom (*obr. 17*). Reakcia hnacej časti remeňa je $\mathfrak{t}_1$ a reakcia poháňanej časti je $\mathfrak{t}_2$, pričom $t_1 = 2t_2 = 40$ kp. Na opracúvaný valcovitý dielec D pôsobí v bode E nôž silou $\mathfrak{f}$, ktorá leží v rovine kolmej na os otáčania. Určte reakcie ložísk A, B a veľkosť sily $\mathfrak{f}$, ak sa dielec otáča rovnomerne a ak $b = 2a/3$, $R = 2r$, kde R je polomer zotrvačníka, na ktorý je nahodený remeň, r je polomer opracúvaného dielca. Pôsobenie tiaže na zotrvačník a dielec D zanedbajte.



Obr. 17

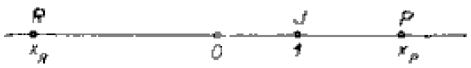
4. ZÁKLADY VEKTOROVEJ ALGEBRY A ANALYTICKEJ GEOMETRIE V ROVINE A V PRIESTORE

4,1. Súradnicové systémy v rovine

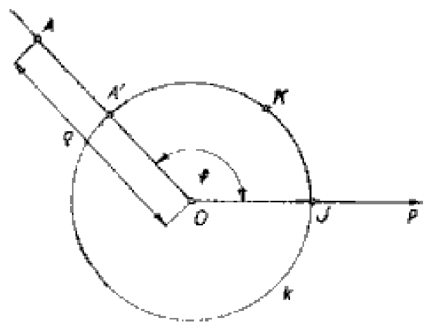
Súradnicový systém na priamke definujeme takto: Majme priamku p, na ktorej sú dané dva rôzne body O, J, pričom dĺžka úsečky OJ sa rovná 1. Každému bodu P priamky p priradíme jediné reálne číslo x, pre ktoré platí: x rovná sa dĺžke úsečky OP, ak P leží na polpriamke určenej bodmi O a J alebo x sa rovná záporne vzatej dĺžke úsečky OP, ak bod P neleží na polpriamke určenej bodmi O, J. Ak $P = O$, potom $x = 0$. Takúto priamku nazývame *číselnou osou* alebo *súradnicovou osou* a číslo x nazývame *súradnicou bodu P* a označujeme $P(x)$ alebo $P = (x)$. Bod O nazývame *počiatkom súradnicovej osi* a bod J *jednotkovým bodom súradnicovej osi (obr. 18)*.

Kosouhlý súradnicový systém v rovine definujeme takto: Majme v rovine usporiadanú dvojicu rôznobežných súradnicových osí so spoločným počiatkom O. Prvú zo súradnicových osí nazývame *osou o_x (osou úsečiek)*, druhú *osou o_y (osou poradníc)*. Ľubovoľným bodom A roviny veďme rovnobežky so súradnicovými osami. Nech A_1, A_2 sú priesečníky týchto rovnobežiek s osami o_x a o_y a majú súradnice $A_1 = (x)$, $A_2 = (y)$. Čísla x, y nazývame *kosouhlými súradnicami bodu A* a označujeme $A = (x, y)$, alebo $A(x, y)$. Číslo x nazývame *prvou kosouhlou* alebo *x-ovou súradnicou bodu A*, číslo y nazývame *druhou kosouhlou* alebo *y-ovou súradnicou bodu A*.

Ak súradnicové osi sú navzájom kolmé, hovoríme o **pravouhlom súradnicovom systéme.**



Obr. 18



Obr. 19

Polárny súradnicový systém v rovine zavádzame takto: v rovine zvolíme nejakú polpriamku p s počiatkom v bode O *(obr. 19)*. Priesečník kružnice k o polomere 1 so stredom v O s polpriamkou p označme J. K nech je bod tejto kružnice rôzny od J. Ľubovoľným bodom $A \neq 0$ roviny veďme polpriamku, ktorej počiatočný bod je O. Označme A' priesečník kružnice k s touto polpriamkou. *Prvou polárnou súradnicou ϱ bodu $A \neq O$*, nazývame dĺžku úsečky OA. Ak $A = O$, potom $\varrho = 0$. *Druhou polárnou súradnicou bodu A*, ktorý je rôzny od bodu O, nazývame číslo φ, pre ktoré platí:

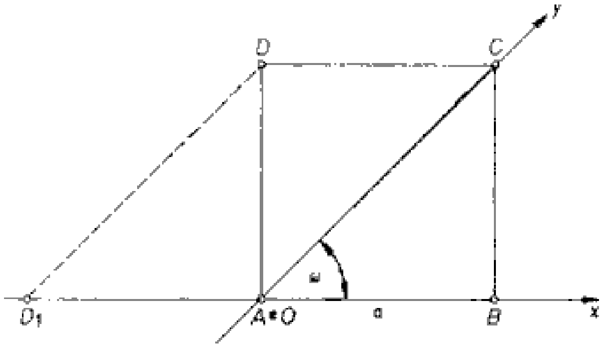
1. φ je dĺžka oblúka JA', ak oblúk JA' obsahuje časť alebo celý oblúk JK a $A' \neq J$;
2. $\varphi = 0$, ak bod $A' = J$;
3. φ je ľubovoľné číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi)$, ak $A = O$.

Niekedy kvôli jednoznačnosti berieme $\varphi = 0$. Ak ϱ a φ sú polárne súradnice bodu A, označujeme to takto: $A = (\varrho, \varphi)$ alebo $A(\varrho, \varphi)$. Číslo $\varrho(\varrho \geqq 0)$ nazývame aj *polárnym sprievodičom* a čísla φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ nazývame *polárnym uhlom* alebo *amplitúdou*. Bod O je *počiatok (pól)* a polpriamka p je *os (polárna os)* polárneho súradnicového systému.

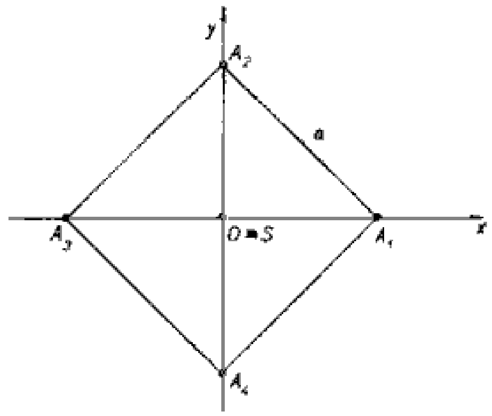
Často sa hovorí o polárnych súradniciach v tomto zmysle, že každému bodu roviny priraďujeme nekonečne mnoho dvojíc tvaru $(\varrho, \varphi + 2k\pi)$, kde k je ľubovoľné celé číslo a (ϱ, φ) je dvojica polárnych súradníc, ako sme ju prv zaviedli.

Príklad 1. Nájdime kosouhlé súradnice vrcholov štvorca $ABCD$ so stranou a, ak kladné časti osi o_x a osi o_y kosouhlého súradnicového systému sú určené úsečkami AB a AC.

Riešenie. Označme vrcholy štvorca $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $D = (x_4, y_4)$. Potom $x_1 = 0$ a $y_1 = 0$, pretože $A = O$. Ďalej $x_2 = a$ a $y_2 = 0$, pretože bod B je na osi o_x a vzdialenosť $\varrho(A, B) = a$. Pretože vrchol C leží na osi o_y a jeho vzdialenosť od A sa rovná dĺžke uhlopriečky štvorca je $x_3 = 0$ a $y_3 = a\sqrt{2}$. Súradnica $x_4 = -a$, pretože rovnobežka s osou o_y prechádzajúca vrcholom D pretína os o_x v bode D_1, ktorého x-ová súradnica je $-a$. Ďalej je $y_4 = y_3 = a\sqrt{2}$ (*obr. 20*). Vrcholy štvorca sú: $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (0, a\sqrt{2})$ a $D = (-a, a\sqrt{2})$.



Obr. 20



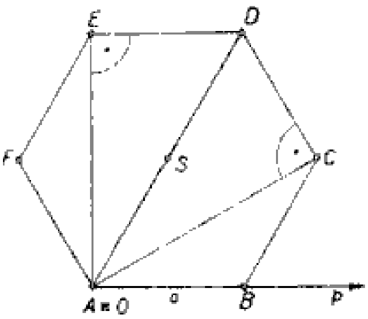
Obr. 21

Príklad 2. Štvorec v pravouhlom súradnicovom systéme má všetky vrcholy na súradnicových osiach. Nájdime súradnice vrcholov, ak dĺžka strany štvorca je a.

Riešenie. Označme vrcholy štvorca $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$, $A_4 = (x_4, y_4)$ (pozri *obr. 21*).

Keďže uhlopriečky tohto štvorca sa pretínajú v počiatku O, t. j. stred štvorca $S \equiv O$, platí

$$\varrho(O, A_1) = \varrho(O, A_2) = \varrho(O, A_3) = \varrho(O, A_4) = a\sqrt{2}/2.$$



Obr. 22

Pre súradnice vrcholov preto platí:

$$x_1 = \varrho(O, A_1) = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad y_1 = 0,$$

$$x_2 = 0, \qquad y_2 = \varrho(O, A_2) = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$x_3 = -\varrho(O, A_3) = -\frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad y_3 = 0,$$

$$x_4 = 0, \qquad y_4 = -\varrho(O, A_4) = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vrcholy štvorca sú: $A_1 = (a\sqrt{2}/2, 0)$, $A_2 = (0, a\sqrt{2}/2)$, $A_3 = (-a\sqrt{2}/2, 0)$, $A_4 = (0, -a\sqrt{2}/2)$.

Príklad 3. Nájdime polárne súradnice vrcholov pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ so stranou a, ak počiatok polárnej súradnicovej sústavy je bod A a polárna os prechádza bodom B (pozri *obr. 22*).

Riešenie. Označme vrcholy šesťuholníka $A = (\varrho_1, \varphi_1)$, $B = (\varrho_2, \varphi_2)$, $C = (\varrho_3, \varphi_3)$, $D = (\varrho_4, \varphi_4)$, $E = (\varrho_5, \varphi_5)$, $F = (\varrho_6, \varphi_6)$. Pre ϱ_1 a φ_1 platí $\varphi_1 = 0$, $\varrho_1 = 0$, pretože $A \equiv O$. Keďže bod B je na polárnej osi a $\varrho(A, B) = a$, je $\varrho_2 = a$ a $\varphi_2 = 0$. Z trojuholníka ABC vyplýva, že

$\varrho_3 = a\sqrt{3}$ a $\varphi_3 = \pi/6$. Z trojuholníka ACD vyplýva, že $\varrho_4 = 2a$ a $\varphi_4 = \pi/6 + \varphi_3 = \pi/3$. Z trojuholníka ADE vyplýva, že $\varrho_5 = a\sqrt{3}$ a $\varphi_5 = \pi/6 + \varphi_4 = \pi/2$. Súradnica $\varrho_6 = a$, pretože $\varrho(A, F) = a$ a $\varphi_6 = 2\pi/3$, pretože je to uhol $\sphericalangle BAF$, ktorý zvierajú dve strany šesťuholníka so spoločným vrcholom.

Vrcholy šesťuholníka sú: $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a\sqrt{3}, \pi/6)$, $D = (2a, \pi/3)$, $E = (a\sqrt{3}, \pi/2)$ a $F = (a, 2\pi/3)$.

Analytické vyjadrenie množiny bodov v rovine

Predpokladajme, že v rovine je daný pravouhlý súradnicový systém. Uvažujme o systéme rovníc a nerovností s dvoma neznámymi

$$\left.\begin{array}{llll} f_1(x, y) = 0, & f_2(x, y) = 0, & \ldots, & f_k(x, y) = 0, \\ g_1(x, y)\ N\ 0, & g_2(x, y)\ N\ 0, & \ldots, & g_m(x, y)\ N\ 0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

(Pritom sa v systéme (1) nemusí vyskytovať žiadna rovnica, a teda (1) pozostáva z jednej alebo niekoľkých nerovností alebo naopak systém (1) pozostáva iba z rovníc.)

Systémom (1) je určená množina C všetkých bodov v rovine, ktorých súradnice vyhovujú systému (1), t. j. bod M patrí do C vtedy a len vtedy, ak dvojica (x, y) jeho súradníc v danom súradnicovom systéme vyhovuje systému (1). Hovoríme, že systém (1) je *analytickým vyjadrením množiny* C.

Podobne je to aj v polárnom súradnicovom systéme.

Príklad *4*. Dokážme, že systém pozostávajúci z jednej rovnice

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \tag{2}$$

kde $R > 0$ je analytickým vyjadrením kružnice C o polomere R so stredom v počiatku pravouhlého súradnicového systému.

Riešenie. 1. Vezmime ľubovoľný bod $M = (x_0, y_0)$ na kružnici C. Platí $\varrho(O, M) = R$. Keďže $\varrho(O, M) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, je $x_0^2 + y_0^2 = R^2$ alebo $x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$, t. j. súradnice bodu M spĺňajú rovnicu (2).

2. Nech x_0' a y_0' spĺňajú rovnicu (2), t. j. nech platí $x_0'^2 + y_0'^2 - R^2 = 0$. Uvažujme bod M' o súradniciach x_0', y_0'. Potom $\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}$ je vzdialenosť bodu M' od $O = (0, 0)$. Teda $\varrho(O, M') = R$. Z definície kružnice vyplýva, že bod M' je bodom kružnice C.

357 Zostrojte body $A = (\sqrt{2})$, $B = (-\sqrt{3})$, $C = (2\sqrt{3})$ a vypočítajte vzdialenosť bodov A a B, B a C, A a C.

358. Nájdite súradnice bodu D symetrického s bodom $A = (5)$ vzhľadom na:
a) počiatok súradnicového systému;
b) bod $B = (1)$; c) bod $C = (7)$.

Vypočítajte v jednotlivých prípadoch $\varrho(A, D)$.

359. Daný je bod $A = (-3)$. Nájdite súradnice bodov $B = (x_1)$, $C = (x_2)$, $D = (x_3)$, $E = (x_4)$, ak $\varrho(A, B) = 5$, $\varrho(A, C) = 3$, $\varrho(A, D) = 3{,}5$ a $\varrho(A, E) = 8$. Zostrojte tieto body.

360. Zostrojte body $A = (3, 5)$, $B = (0, 2)$, $C = (-3, 1)$, $D = (-2, -3)$, $E = (6, -2)$, $F = (4, 0)$, $G = (0, -3)$, $H = (-5, 0)$ v danom pravouhlom súradnicovom systéme v rovine. Nájdite súradnice kolmých priemetov týchto bodov na obe súradnicové osi.

361. Zostrojte body $A = (4, 2)$, $B = (-6, 2)$, $C = (-2, -7)$, $D = (4, -3)$ v kosouhlom súradnicovom systéme v rovine, ktorého osi zvierajú uhly:

a) $\alpha = 60°$; b) $\alpha = 45°$; c) $\alpha = 120°$.

362. Nájdite súradnice vrcholov daných mnohouholníkov:

a) rovnostranného trojuholníka so stranou a, ak počiatok súradnicového systému je v strede jeho strany a os o_y prechádza protiľahlým vrcholom;
b) štvorca so stranou a, ak súradnicové osi ležia v osiach strán;
c) pravidelného šesťuholníka so stranou 6, ktorý má stred v počiatku a jeden vrchol leží na osi o_x pravouhlého súradnicového systému;
d) pravidelného osemuholníka $ABCDEFGH$ so stranou a, ak za počiatok súradnicového systému zvolíme bod A, za jednotkový bod na osi o_x bod B a za jednotkový bod na osi o_y bod F.

363. V lichobežníku $ABCD$ je základňa AB päťkrát väčšia ako strana CD. Nájdite súradnice vrcholov lichobežníka, priesečníka uhlopriečok a priesečníka bočných strán lichobežníka, ak počiatok súradnicového systému je v bode A, jednotkový bod na osi o_x v bode B a jednotkový bod na osi o_y v bode D.

364. V pravouhlom súradnicovom systéme je daný bod $M = (x_0, y_0)$. Nájdite bod symetrický s bodom M:

a) podľa počiatku súradnicového systému;
b) podľa osi o_x;
c) podľa osi o_y;
b) podľa symetrály prvého a tretieho kvadrantu.

365. Akú vzájomnú polohu majú body $A = (x, y)$, $B = (-x, y)$, $C = (x, -y)$, $D = (-x, -y)$?

366. Nájdite súradnice vrcholov trojuholníka súmerného k trojuholníku $A = (3, 1)$, $B = (4, 7)$, $C = (1, 2)$ podľa:

a) osi o_x;
b) osi o_y;
c) počiatku;
d) osi prvého kvadrantu;
e) osi druhého kvadrantu.

367. V polárnom súradnicovom systéme zostrojte body: $A = (4, \pi/6)$, $B = (2, \pi/2)$, $C = (1, -3\pi/4)$, $D = (5/2, 2\pi/3)$, $E = (5, 4)$, $F = (9/2, -1)$, $G = (0, 0)$.

368. Daný je štvoruholník, ktorého vrcholy v polárnom súradnicovom systéme sú: $A = (1, \pi/4)$, $B = (5, \pi/2)$, $C = (4, 5\pi/6)$, $D = (0, 0)$. Nájdite štvoruholník súmerný k danému podľa

a) polárnej osi; b) počiatku polárneho súradnicového systému.

369. Vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme nájdite analytické vyjadrenie:

a) osi o_x;
b) osi o_y;
c) osi druhého a štvrtého kvadrantu;
d) priamky rovnobežnej s osou o_x prechádzajúcej bodom $A = (-1, 2)$;
e) priamky rovnobežnej s osou o_y prechádzajúcej bodom $B = (2, -3)$;
f) úsečky AB, ak $A = (-2, 3)$, $B = (3, 3)$;
g) úsečky CD, ak $C = (0, -1)$, $D = (0, 2)$.

370. V pravouhlom súradnicovom systéme trojuholník má vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 2)$. Nájdite analytické vyjadrenie:

a) úsečiek, ktoré tvoria jeho strany;
b) priamok, ktoré prechádzajú jeho stranami;
c) množiny všetkých bodov tohto trojuholníka.

Vo zvolenom polárnom súradnicovom systéme riešte úlohy **371, 372, 373.**

371. Nájdite analytické vyjadrenie:

a) polárnej osi;
b) úsečky OA, ak $A = (3, \pi/6)$;
c) polpriamky OA, ak $A = (3, \pi/6)$;
d) priamky, ktorá prechádza bodmi O, A, kde $A = (3, \pi/6)$;
e) štvrťkružnice so stredom v O a s koncovými bodmi $B = (2, \pi/4)$, $C = (2, -\pi/4)$;
f) kružnice so stredom v O, ktorá prechádza bodom $D = (4, \pi)$;
g) kruhu ohraničeného kružnicou z úlohy f).

372. Nech K_1, K_2 sú dané kruhy o rovnakom polomere 2 so stredmi $O = (0, 0)$ a $A = (2, 0)$. Nájdite analytické vyjadrenie:

a) kruhov K_1, K_2;
b) kružníc ohraničujúcich K_1, K_2;
c) množín $K_1 \cap K_2$, $K_1 \cup K_2$, $K_2 - K_1$.

373. Dané sú body $A = (\pi/4, 5)$, $B = (3\pi/4, 2)$. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov ohraničenej polpriamkami OA, OB a kružnicami so stredom v počiatku súradnicového systému, prechádzajúcimi bodmi A, B.

V úlohách **374, 375, 376** znázornite množiny všetkých bodov v rovine, pre ktoré v pravouhlom súradnicovom systéme platí:

374.

a) $x = 0$;
b) $y = 0$;
c) $x = -3$;
d) $y = 1$;
e) $x = -2$, $y = -x$;
f) $x = 0$, $y = -2$;
g) $x = 1$ alebo $y = 3$;
h) $x > 2$, $y = x$;
i) $x = 2$, $1 \leqq y \leqq 4$;
j) $-1 \leqq x \leqq 3$, $y = -4$;
k) $x = y$, $-1 \leqq y \leqq 4$.

375.

a) $2 \leqq x \leqq 6$, $1 \leqq y \leqq 4$;
b) $0 \leqq y \leqq x$;
c) $1 \leqq y \leqq x$, $1 \leqq x \leqq 4$;
d) $x \leqq 5$, $y \leqq 3$;
e) $x \geqq -2$, $y \leqq 2$, $y \geqq x$.

376.

a) $|x| > 0$;
b) $x \geqq 0$;
c) $x \geqq 2$, $|y| \geqq 2$;
d) $(x - 1)(y - 3) = 0$;
e) $(x - 1)(y - 3) < 0$.

377. V polárnom súradnicovom systéme znázornite množiny všetkých bodov v rovine, pre ktoré platí:

a) $\varphi = 2$;
b) $\varrho = 3$;
c) $1 \leqq \varphi \leqq 2$, $\varrho = 5$;
d) $\varphi = \pi/4$, $1 \leqq \varrho \leqq 5$;
e) $0 \leqq \varphi \leqq \pi/3$;
f) $\varrho \leqq 2$, $\pi/4 \leqq \varphi \leqq \pi/2$;
g) $|\varphi| \leqq \pi/6$, $\varrho \geqq 3$;
h) $1 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, $\pi \leqq \varrho \leqq 2\pi$;
i) $|\varphi| > 0$;
j) $|\varrho| \geqq 0$;
k) $(\varrho - 2)(\varphi - \pi/2) = 0$.

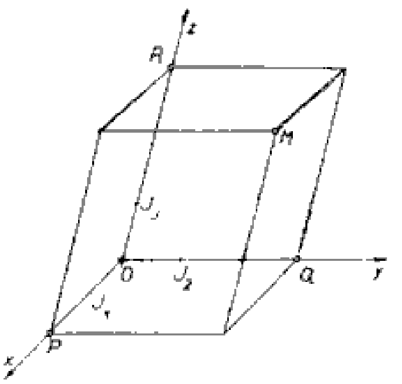
4,2. Súradnicové systémy v priestore

Kosouhlý (afinný) súradnicový systém v priestore *(obr. 23)* je určený:

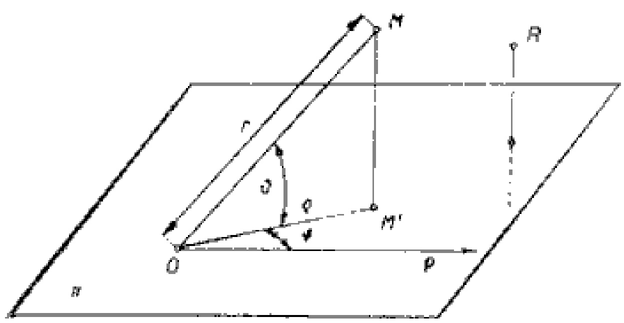
1. troma priamkami p_1, p_2, p_3, ktoré sa pretínajú v jednom bode O a neležia v jednej rovine,
2. jednotkovými bodmi J_1, J_2, J_3 na týchto troch priamkach.

Priamky nazývame *súradnicovými osami* a označujeme ich o_x, o_y, o_z, priesečník osí O nazývame *počiatkom súradnicového systému*. Roviny určené súradnicovými osami o_x a o_y, o_x a o_z, o_y a o_z nazývame *súradnicovými rovinami* a označujeme R_{xy}, R_{xz}, R_{yz}. Ak sú osi navzájom kolmé, hovoríme o *pravouhlom súradnicovom systéme v priestore*.

Zvoľme ľubovoľný bod priestoru M. Veďme bodom M roviny rovnobežné so súradnicovými rovinami R_{yz}, R_{xz}, R_{xy}. Priesečníky týchto rovín so súradnicovými osami označme P, Q, R. Nech bod P má na osi o_x súradnicu x, bod Q na osi o_y súradnicu y, bod R na osi o_z súradnicu z. Čísla x, y, z nazývame *kosouhlými*, resp. *pravouhlými súradnicami* bodu M a označujeme to $M = (x, y, z)$ alebo $M(x, y, z)$.



Obr. 23



Obr. 24

Sférický súradnicový systém v priestore *(obr. 24)* je určený:

1. rovinou π, v ktorej je daný polárny súradnicový systém,
2. bodom R, ktorý leží mimo roviny π.

Zvoľme ľubovoľný bod M priestoru, ktorý neleží v rovine π a spusťme z bodu M kolmicu na rovinu π. Priesečník tejto kolmice s rovinou označme M'. Polárne súradnice bodu M' nech sú (ϱ, φ). Nech $|\vartheta|$ značí veľkosť uhla MOM', ak úsečka OM nie je kolmá na rovinu π, a $|\vartheta| = \pi/2$, ak $\overline{OM}$ je kolmá na rovinu π. Uhol ϑ je kladný, ak bod M leží v polpriestore určenom rovinou π a bodom R, a záporný, ak neleží v tomto polpriestore. Ak bod M leží v rovine π, pričom $M \neq O$, potom $\vartheta = 0$.

Ak $M = O$, potom ϑ je ľubovoľné číslo z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Niekedy kvôli jednoznačnosti berieme $\vartheta = 0$.

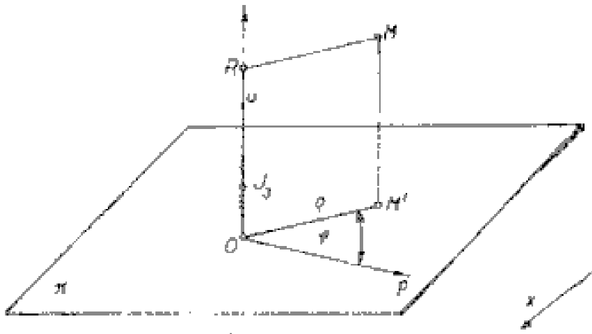
Sférickými súradnicami bodu M nazývame čísla: 1. vzdialenosť $r = \varrho(O, M)$, 2. polárny uhol φ, 3. uhol ϑ a značíme $M = (r, \varphi, \vartheta)$. Pre sférické súradnice bodu M platí: $0 \leqq r$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 \leqq Q \leqq \pi/2$.

Cylindrický súradnicový systém v priestore *(obr. 25)* je určený 1. rovinou π, v ktorej je daný polárny súradnicový systém, 2. priamkou k kolmou na rovinu π, ktorá prechádza pólom O, na ktorej je zvolený jednotkový bod J_3. Bod O nazývame *počiatkom* súradnicového systému, kolmicu k nazývame osou o_u.

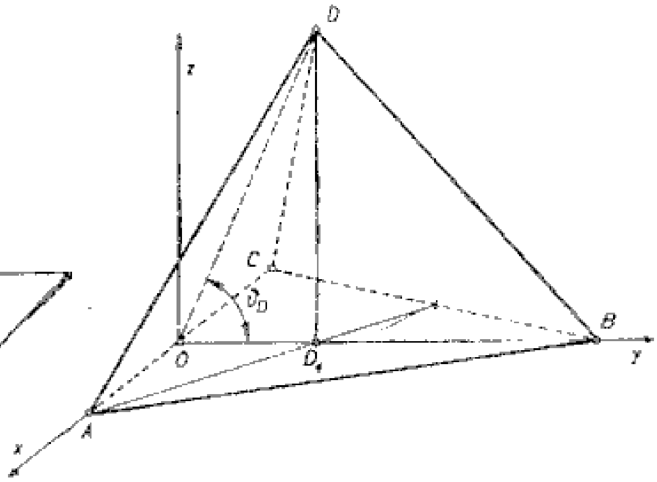
Zvoľme ľubovoľný bod M v priestore a zostrojme z neho kolmicu na rovinu π. Priesečník tejto kolmice s rovinou označme M'. Polárne súradnice bodu M' nech sú ϱ a φ. Bodom M veďme rovnobežnú rovinu s rovinou π a priesečník osi o_u s touto rovinou označme R. Bod R nech má na osi o_u súradnicu u. *Valcovými (cylindrickými) súradnicami* bodu M nazývame čísla ϱ, φ, u a označíme $M = (\varrho, \varphi, u)$. Pre cylindrické súradnice platí: $0 \leqq \varrho$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$.

Príklad 1. Nájdime pravouhlé súradnice vrcholov pravidelného štvorstena so stranou a, ak dva jeho vrcholy ležia na osi o_x, tretí na kladnej časti osi o_y a štvrtý v polpriestore $z > 0$ (*obr. 26*).

Riešenie. Základňa štvorstena je rovnostranný trojuholník so stranou a. Keďže vrchol B leží na osi o_y, výška tohto trojuholníka je v osi o_y a body A, C ležia súmerne na osi o_x vzhľadom na počiatok O. Teda $A = (a/2, 0, 0)$, $C = (-a/2, 0, 0)$. Výška v $\triangle ABC$ je $v = a\sqrt{3}/2$, preto $B = (0, a\sqrt{3}/2, 0)$. Pôdorys D_1 vrcholu D je ťažisko v $\triangle ABC$, čiže y_{D_1} sa rovná 1/3 ťažnice. Preto je $D_1 = \left(0, \frac{a}{6}\sqrt{3}, 0\right)$.



Obr. 25



Obr. 26

Pre z_D $\triangle OD_1D$ dostaneme

$$(\overline{OD})^2 = y_{D_1}^2 + z_D^2 .$$

Z toho je

$$z_D = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

a

$$D = \left(0, \frac{a}{6}\sqrt{3}, \frac{a}{3}\sqrt{6}\right).$$

Príklad 2. Nájdime súradnice vrcholov štvorstena z príkladu 1 vo sférickom súradnicovom systéme, pre ktorý je $\pi \equiv R_{xy}$, $P = 0$ a bod R leží na kladnej časti osi o_z.

Riešenie. Pre vrcholy základne dostaneme

$$A = \left(\frac{a}{2}, 0, 0\right), \qquad B = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, 0\right), \qquad C = \left(\frac{a}{2}, \pi, 0\right).$$

Pre ϑ_D platí

$$\sin\vartheta_D = \frac{\frac{a}{6}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

čiže

$$\vartheta_D = \arcsin\frac{1}{3} = 0{,}339\,84\ldots,$$

(v stupňoch $\vartheta_p \doteq 19°28'16{,}7''$), a preto

$$D = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3},\ \frac{\pi}{2},\ \arcsin\frac{1}{3}\right).$$

Analytické vyjadrenie množiny bodov v priestore

Predpokladajme, že v priestore je daný pravouhlý súradnicový systém. Uvažujme o systéme rovníc a nerovností s troma neznámymi

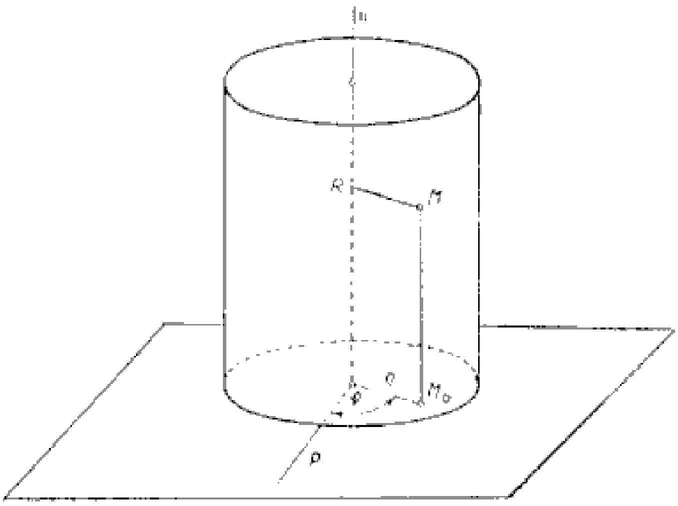
$$\left.\begin{array}{lll} f_1(x, y, z) = 0, & f_2(x, y, z) = 0, \ldots, & f_k(x, y, z) = 0, \\ g_1(x, y, z)\ \mathrm{N}\ 0, & g_2(x, y, z)\ \mathrm{N}\ 0, \ldots, & g_m(x, y, z)\ \mathrm{N}\ 0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

(Pritom sa v systéme (1) nemusí vyskytovať žiadna rovnica, a teda (1) pozostáva z jednej alebo niekoľkých nerovností, alebo naopak systém (1) pozostáva iba z jednej alebo niekoľkých rovníc.)

Systémom (1) je určená množina C všetkých bodov v priestore, ktorých súradnice vyhovujú systému (1), t. j. bod M patrí do C vtedy a len vtedy, ak trojica (x, y, z) jeho súradníc v danom súradnicovom systéme vyhovuje systému (1). Hovoríme, že systém (1) je *analytickým vyjadrením množiny C*.

Podobne zavádzame analytické vyjadrenie množiny bodov M v cylindrickom a sférickom súradnicovom systéme.

Príklad 3. Nájdime analytické vyjadrenie rotačného valca s polomerom $r = 3$ a výškou $v = 5$, ak jeho os leží v kladnej časti osi o_z a základňa v rovine R_{xy} *(obr. 27)*.



Obr. 27

Riešenie. a) Uvažujme ľubovoľný bod M daného valca. Pôdorys tohto bodu M, bod M_0, leží v kruhu so stredom v O a s polomerom $r = 3$ (základňa). Preto pre polárne súradnice bodu $M_0 = (\varrho, \varphi)$ platí

$$0 \leqq \varrho \leqq 3, \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi.$$

Pre súradnicu u bodu M dostaneme $0 \leqq u = u_M \leqq v$ alebo $0 \leqq u \leqq 5$. Úhrnom platí

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqq \varrho \leqq 3 \\ 0 \leqq \varphi < 2\pi \\ 0 \leqq u \leqq 5. \end{array}\right\} \tag{2}$$

b) Majme trojicu čísiel ϱ_1, φ_1, u_1, ktorá spĺňa vzťahy (2). Bod M_1 o súradniciach $M_1 = (\varrho_1, \varphi_1, u_1)$ má vzdialenosť od osi valca $\varrho_1 \leqq 3$, teda leží vnútri alebo na príslušnej valcovej ploche. Keďže $0 \leqq u \leqq 5$, bod leží medzi rovinami $u = 0$ a $u = 5$, t. j. je bodom daného valca.

378. Vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v priestore zobrazte body: $A = (2, 1, 5)$, $B = (-3, 3, -1)$, $C = (2, -1, -4)$, $D = (0, -6, 2)$, $E = (-2, -3, 0)$, $F = (-2, -3, -7)$.

379. Dané sú body: $A = (3, 5, 6)$, $B = (-1, 3, 2)$, $C = (2, 5, 0)$ a $D = (0, 0, -3)$. Nájdite súradnice ich kolmých priemetov

a) do roviny R_{xy};
b) do roviny R_{yz};
c) do roviny R_{xz};
d) na os o_x;
e) na os o_y;
f) na os o_z.

380. Kde ležia body, pre ktorých súradnice platí:

a) $x = 0$;
b) $y = 0$;
c) $z = 0$;
d) $x = 0, \quad y = 0$;
e) $y = 0, \quad z = 0$;
f) $z = 0, \quad x = 0$.

381. Nájdite súradnice bodu symetrického k bodu $D = (a, b, c)$, vzhľadom na:

a) rovinu R_{xy};
b) rovinu R_{xz};
c) rovinu R_{yz};
d) os o_x;
e) os o_y;
f) os o_z;
g) počiatok súradnicového systému.

382. Dané sú vrcholy trojuholníka $A = (2, -1, 1)$, $B = (5, 5, 4)$, $C = (3, 2, -1)$. Nájdite súradnice vrcholov trojuholníka súmerného k danému trojuholníku podľa:

a) roviny R_{xy};
b) roviny R_{yz};
c) roviny R_{xz};
d) osi o_x;
e) osi o_y;
f) osi o_z;
g) počiatku súradnicového systému.

383. Dané sú štyri vrcholy kocky $A = (-3, -3, -3)$, $B = (3, -3, -3)$, $D = (-3, 3, -3)$ a $G = (3, 3, 3)$. Nájdite jej ostatné vrcholy.

384. Kocka so stranou a má jeden vrchol v počiatku pravouhlého súradnicového systému, tri steny v súradnicových rovinách R_{xy}, R_{yz}, R_{xz} a súradnice vrcholov sú nezáporné. Nájdite súradnice vrcholov:

a) danej kocky;
b) pravidelného štvorstena vpísaného do tejto kocky;
c) pravidelného osmistena vpísaného do tejto kocky, ktorého telesové uhlopriečky sú rovnobežné so súradnicovými osami.

385. Nájdite súradnice stredu gule o polomere $r = 4$, ktorá sa dotýka všetkých troch súradnicových rovín a všetky jej body spĺňajú podmienky:

a) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$; b) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \leqq 0$; c) $x \leqq 0$, $y \leqq 0$, $z \leqq 0$.

386. Vo zvolenom cylindrickom súradnicovom systéme znázornite body: $A = (2, \pi, 1)$, $B = (0, 0, 2)$, $C = (2, 0, 2)$, $D = (1, 1, -1)$, $E = (3, \pi/2, 0)$.

387. V cylindrickom súradnicovom systéme je daný trojuholník $A = (3, \pi/4, 1)$, $B = (4, 3\pi/4, -2)$, $C = (1, \pi/2, 3)$. Nájdite súradnice vrcholov trojuholníka súmerného k danému podľa:

a) polárnej osi; b) osi o_y;

c) počiatku cylindrického súradnicového systému;
d) roviny π.

388. Nájdite cylindrické súradnice vrcholov kocky, ktorá má dĺžku hrany a, ak jej dve hrany sú na polárnej osi a na osi o_u.

389. Vo sférickom súradnicovom systéme znázornite body: $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, \pi, \pi/2)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (3, \pi/4, -\pi/4)$, $E = (1, \pi/2, 0)$.

390. Vo sférickom súradnicovom systéme je daný štvorsten $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, \pi/2, -\pi/4)$, $C = (3, \pi/4, \pi/4)$, $D = (5, \pi/4, \pi/6)$. Nájdite súradnice vrcholov štvorstena súmerného k danému podľa:

a) roviny π;
b) počiatku súradnicového systému;
c) polárnej osi v rovine π;
d) roviny kolmej na rovinu π, ktorá prechádza polárnou osou.

391. Nájdite sférické súradnice vrcholov kocky, ktorá má dĺžku hrany a, ak

a) jedna jej stena leží v rovine π a dva protiľahlé vrcholy základne sú O a bod A, ktorý leží na polárnej osi;
b) stred kocky je O a jedna jej stena je rovnobežná s rovinou π a jedna hrana pretína polárnu os.

392. Vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme nájdite analytické vyjadrenie:

a) rovín R_{xy}, R_{xz}, R_{yz};
b) súradnicových osí o_x, o_y, o_z;
c) rovín rovnobežných so súradnicovými rovinami, ktoré prechádzajú bodom $A = (-2, 3, 5)$;
d) priamok rovnobežných so súradnicovými osami, ktoré prechádzajú bodom $A = (-2; 3, 5)$;
e) priamky, ktorá je osou prvého a siedmeho oktantu.

393. V pravouhlom súradnicovom systéme je kocka daná štyrmi vrcholmi $A = (4, 2, 3)$, $B = (4, 5, 3)$, $C = (1, 5, 3)$, $E = (4, 2, 6)$. Nájdite:

a) zvyšné vrcholy;
b) analytické vyjadrenie rovín, ktoré ohraničujú kocku;
c) analytické vyjadrenie stien $BCFG$, $CDHG$ kocky;
d) analytické vyjadrenie priamok, ktoré prechádzajú hranami FG, AB, DH kocky;
e) analytické vyjadrenie hrán AE, GH kocky;
f) analytické vyjadrenie kocky.

394. Znázornite množiny všetkých bodov v priestore, pre ktorých súradnice v pravouhlom súradnicovom systéme platí:

a) $x = 0$;
b) $y = 0$;
c) $z = 0$;
d) $x = 3$;
e) $y = -2$;
f) $z = 5$;
g) $x = 1$, $y = 3$;
h) $x \leqq 1$, $y = 3$;
i) $x = 1$, $y = 3$, $z > 2$;
j) $x = 1$, $y = 3$, $3 \leqq z \leqq 5$.

395. Znázornite množiny všetkých bodov v priestore, pre ktorých súradnice v pravouhlom súradnicovom systéme platí:

a) $2 \leqq x \leqq 5$, $1 \leqq y \leqq 3$, $2 \leqq z \leqq 6$;
b) $0 \leqq x \leqq 3$, $0 \leqq y \leqq 5$;
c) $0 \leqq y \leqq x$;
d) $x \leqq 5$, $y \leqq 3$;
e) $|x| \geqq 3$, $|y| \geqq 3$, $|z| \geqq 3$;
f) $(x - 1)(y - 3)(x + 2) > 0$;
g) $x = y = z$;
h) $|x| - |y| = z$.

396. V danom cylindrickom súradnicovom systéme nájdite analytické vyjadrenie:

a) roviny π;
b) polárnej osi;
c) osi o_u;
d) roviny, ktorá prechádza polárnou osou a osou o_u;
e) roviny, ktorá prechádza osou o_u a bodom $A = (3, 2, -3)$;
f) rotačnej valcovej plochy, ktorá má os v osi o_u a polomer $r = 6$;
g) povrchu rotačného valca, ktorý má os v osi o_u a základňu v rovine π, pričom polomer valca $r = 4$ a výška $v = 10$ $(u \geqq 0)$;
h) priamky, ktorá je kolmá na rovinu π a prechádza bodom $B = (4, 1, 10)$;
i) kružnice, ktorá leží v rovine π so stredom v počiatku súradnicového systému a polomerom $r = 7$;
j) kružnice, ktorá leží v rovine rovnobežnej s rovinou π so stredom v bode $S = (0, 0, 8)$ a polomerom $r = 4$.

397. Znázornite množiny všetkých bodov v priestore, pre ktoré v cylindrickom súradnicovom systéme platí:

a) $\varphi = 3$;
b) $\varrho = 2$;
c) $2 \leqq \varrho \leqq 3$, $\varphi = \pi$;
d) $0 \leqq \varphi \leqq 1$;
e) $\varrho \leqq 2$;
f) $\varrho \leqq 3$, $0 \leqq u \leqq 5$;
g) $\varrho = 2$, $\varphi = \pi$, $1 \leqq u \leqq 4$;
h) $\varphi = \pi/2$, $2 \leqq \varrho \leqq 5$, $0 \leqq u \leqq 3$;
i) $(\varrho - 3)(|u| - 4) = 0$.

398. V danom sférickom súradnicovom systéme nájdite analytické vyjadrenie týchto útvarov:

a) roviny π;
b) polárnej osi;
c) guľovej plochy so stredom v O a polomerom $r = 3$;
d) gule so stredom v O a polomerom $r = 3$;
e) rotačnej kužeľovej plochy s vrcholom v O, ktorej os je kolmá na rovinu π a vrcholový uhol je $\pi/6$;
f) roviny, ktorá prechádza polárnou osou kolmo na rovinu π;
g) roviny, ktorá prechádza bodom $A = (5, 2, 3/2)$ kolmo na rovinu π;
h) priamky, ktorá prechádza bodmi O a $B = (3, 1, -1)$;
i) kružnice, ktorá leží v rovine rovnobežnej s rovinou π, so stredom $S = (5, 0, \pi/2)$ a polomerom $r = 5$;
j) kružnice, ktorá leží v rovine π so stredom v počiatku a polomerom $r = 2$.

399. Znázornite množiny všetkých bodov v priestore, pre ktoré v sférickom súradnicovom systéme platí:

a) $r \leqq 1$;
b) $\vartheta = \pi/4$;
c) $\varphi = \pi$;
d) $r \leqq 2$, $\vartheta \geqq \pi/4$;
e) $2 \leqq r \leqq 4$;
f) $r = 3$, $\varphi = \pi/2$;
g) $r = 4$, $\vartheta > 0$;
h) $r = 4$, $\vartheta = \pi/4$;
i) $\varphi = \pi/4$, $|\vartheta| < \pi/4$;
j) $\varphi = \pi/3$, $\vartheta = \pi/6$.

4,3. Vzdialenosť dvoch bodov v rovine a v priestore

Majme v pravouhlom súradnicovom systéme v rovine dané dva body $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. Ich *vzdialenosť* je

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1}$$

Ak sú dané dva body A, B v pravouhlom súradnicovom systéme v priestore, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, ich vzdialenosť je

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{2}$$

Príklad 1. Na osi o_y nájdime bod rovnako vzdialený od počiatku a od bodu $A = (4, 8)$.

Riešenie. Pre hľadaný bod $B = (0, y)$ musí platiť

$$\sqrt{(0 - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(0 - 4)^2 + (y - 8)^2}. \tag{3}$$

Po umocnení máme

$$y^2 = y^2 - 16y + 64 + 16$$

a ďalej

$$16y = 80,$$
$$y = 5.$$

Po dosadení $y = 5$ do rovnice (3) dostaneme správnu rovnosť.
Teda hľadaný bod na osi o_y je $B = (0, 5)$.

Príklad 2. Dokážme, že trojuholník s vrcholmi $A = (4, -2, 7)$, $B = (0, 6, -1)$, $C = (2, -4, 3)$ je pravouhlý.

Riešenie. Na dôkaz, že daný trojuholník je pravouhlý, stačí ukázať, že pre dĺžky jeho strán platí Pytagorova veta. Máme

$$\varrho(A, B) = \sqrt{4^2 + (6 + 2)^2 + (-1 - 7)^2} = \sqrt{144},$$
$$\varrho(B, C) = \sqrt{2^2 + (-4 - 6)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{120},$$
$$\varrho(C, A) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-2 + 4)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{24}.$$

Keďže platí

$$\varrho^2(B, C) + \varrho^2(C, A) = \varrho^2(A, B),$$

daný trojuholník je pravouhlý.

400. Vypočítajte vzdialenosť bodov A, B, ak:

a) $A = (1, 1)$, $B = (3, 3)$;
b) $A = (-5, 3)$, $B = (-1, 6)$;
c) $A = (-1, 2)$, $B = (4, 12)$;
d) $A = (\sqrt{2} - 2, 3\sqrt{7} + 1)$, $B = (3\sqrt{2} - 2, \sqrt{7} + 1)$;
e) $A = (11/2, 7)$, $B = (3, 13)$.

401. Vypočítajte obvod trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (-7, 13)$, $B = (-2, 1)$, $C = (1, 5)$.

402. Nájdite dĺžky všetkých strán a uhlopriečok päťuholníka $ABCDE$, ak $A = (-3, 4)$, $B = (0, 0)$, $C = (-6, 8)$, $D = (-5, 6)$, $E = (7, 1)$.

403. Zistite, či daný trojuholník ABC je rovnostranný, rovnoramenný alebo pravouhlý:

a) $A = (6, 10)$, $B = (-5, 9)$, $C = (1, 4)$;
b) $A = (14, 9)$, $B = (-3, 5)$, $C = (9, 15)$;
c) $A = (7, 9)$, $B = (15, -33)$, $C = (11 + 21\sqrt{3}, -12 + 4\sqrt{3})$;
d) $A = (3, -2)$, $B = (4, 0)$, $C = (7, -4)$.

404. Ukážte, že štvoruholník $ABCD$, kde $A = (-1, -3)$, $B = (-4, 1)$, $C = (-8, -2)$, $D = (-5, -6)$, je štvorec.

405. Nájdite obsah štvorca, ak body $M = (-1, -2)$ a $N = (-3, -10)$ sú jeho:
a) susedné vrcholy; b) protiľahlé vrcholy.

406. Kosoštvorec má stranu $a = 5\sqrt{2}$ a dva jeho protiľahlé vrcholy sú $A = (-1, -1)$ a $C = (-3, 5)$. Vypočítajte jeho obsah.

407. Nájdite vnútorné uhly trojuholníka ABC, ak $A = (3, -2)$, $B = (-2, -1)$, $C = (1, 1)$.

408. Na osi o_y nájdite bod, ktorého vzdialenosť od bodu $A = (4, 7)$ sa rovná 5.

409. Na súradnicových osiach pravouhlého súradnicového systému nájdite body, ktoré majú od bodu $C = (2, 3)$ vzdialenosť $d = 3$.

410. Vypočítajte x-ovú súradnicu bodu $A = (x, 6)$, ak viete, že jeho vzdialenosť od bodu $B = (2, -6)$ je 13.

411. Nájdite tretí vrchol pravouhlého trojuholníka MPN, kde $M = (-7, 2)$, $N = (-4, -2)$ a bod P leží na osi o_x.

412. Nájdite zvyšné vrcholy štvorca, ak:
a) body $A = (-1, 3)$, $B = (-8, 4)$ sú jeho protiľahlé vrcholy;
b) body $A = (-3, 1)$, $B = (-6, 5)$ sú jeho susedné vrcholy.

413. Bodom $M = (3, 4)$ prechádza kružnica, ktorá sa dotýka oboch súradnicových osí. Nájdite jej stred S a polomer r.

414. Bodom $N = (-2, 4)$ prechádza kružnica s polomerom $r = 10$, ktorá sa dotýka osi o_y. Nájdite stred kružnice.

415. Vypočítajte súradnice bodu M súmerného k bodu $N = (8, -3)$ vzhľadom na priamku, ktorá prechádza bodmi $A = (8, -5)$ a $B = (6, -7)$.

416. Vrcholy trojuholníka sú v bodoch:
a) $A = (2, 3)$, $B = (4, 0)$, $C = (0, 1)$;
b) $A = (-2, 10)$, $B = (10, -6)$, $C = (-4, 8)$;
c) $A = (-2, 3)$, $B = (0, -1)$, $C = (-1, 2)$.
Nájdite stred a polomer jeho opísanej kružnice.

417. Odvoďte vzťah pre vzdialenosť dvoch bodov $M_1 = (\varrho_1, \varphi_1)$, $M_2 = (\varrho_2, \varphi_2)$ v rovine, ak je v nej daný polárny súradnicový systém. Na základe tohto vzťahu vypočítajte:
a) vzdialenosť dvoch bodov $A = (2, \pi/18)$, $B = (3, 7\pi/18)$;
b) dĺžky strán trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (3, \pi/8)$, $B = (8, 7\pi/24)$, $C = (6, 5\pi/8)$.

418. Vypočítajte obsah štvorca, ak v danom polárnom súradnicovom systéme sú:
a) $M = (12, -3\pi/10)$, $N = (3, -2\pi/15)$ jeho susedné vrcholy;
b) $M = (4, 2\pi/3)$, $N = (6, -\pi/12)$ jeho protiľahlé vrcholy.

419. Vypočítajte vzdialenosť bodov $A = (1, 3, 5)$, $B = (-4, 2, 4)$, $C = (4, 12, -6)$, $D = (-12, -16, -15)$ od počiatku pravouhlého súradnicového systému.

420. Vypočítajte vzdialenosť bodov A, B, keď:
a) $A = (1, -3, 3)$, $B = (4, 3, 5)$;
b) $A = (1, -1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$;
c) $A = (2, -2, 2)$, $B = (1, 2, 10)$.

421. Vypočítajte obvod trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (-1, 2, 0)$, $B = (3, -1, 2)$, $C = (1, -2, 0)$.

422. Vypočítajte dĺžky hrán štvorstena, ktorého vrcholy sú $A = (4, -4, -7)$, $B = (5, -5, -4)$, $C = (6, -1, -13)$, $D = (2, -1, -16)$.

423. Zistite, ktorý z daných trojuholníkov je rovnoramenný a ktorý pravouhlý;
a) $A = (1, 4, 7)$, $B = (-3, 12, -1)$, $C = (-1, 2, 3)$;
b) $A = (-1, 2, 0)$, $B = (-4, -1, 0)$, $C = (-7, 5, -1)$;
c) $A = (-7, 2, 6)$, $B = (0, -1, -1)$, $C = (-2, -3, -2)$;
d) $A = (2, 8, 6)$, $B = (5, 2, 7)$, $C = (-1, 6, 3)$.

424. Zistite, ktorý z nasledujúcich trojuholníkov má všetky vnútorné uhly ostré a ktorý má jeden z vnútorných uhlov tupý:
a) $A = (0, -2, 2)$, $B = (-4, 10, -6)$, $C = (-1, 4, -4)$;
b) $A = (1, 3, 6)$, $B = (-4, 6, -2)$, $C = (3, 6, 0)$;
c) $A = (3, -1, 2)$, $B = (0, -4, 2)$, $C = (-3, 2, 1)$.

425. Na osi o_x nájdite bod, ktorého vzdialenosť od bodu $A = (-4, 6, 6)$ sa rovná 12.

426. Na osi o_y nájdite bod, ktorého vzdialenosť od bodov $A = (1, -3, 7)$ a $B = (5, 7, -5)$ je rovnaká.

427. Na osi o_z nájdite taký bod C, aby body $A = (-4, 1, 7)$, $B = (3, 5, -2)$, C boli vrcholmi rovnoramenného trojuholníka.

428. Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = (14, -1, 6)$ od súradnicových osí pravouhlého súradnicového systému.

429. V rovine R_{xz} a v rovine R_{yz} nájdite bod rovnako vzdialený od bodov $A = (3, 1, 2)$, $B = (4, -2, -2)$, $C = (0, 5, 1)$.

430. Nájdite bod, ktorý má od štyroch bodov $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$, $C = (0, 0, 6)$, $D = (8, 4, 10)$ rovnakú vzdialenosť.

431. Guľa je daná štyrmi bodmi $M = (-1, 2, 9)$, $N = (3, 2, 9)$, $P = (0, 5, 9)$, $R = (-1, 2, 5)$. Nájdite jej stred a polomer.

432. Vypočítajte súradnice vrcholov pravidelného štvorstena v prvom oktante, ak dĺžka jeho hrany je 2, jeden vrchol leží v počiatku súradnicového systému a ostatné vrcholy v súradnicových rovinách.

4,4. Obsah mnohouholníka a objem štvorstena

Obsah mnohouholníka

V pravouhlom súradnicovom systéme v rovine sú dané body $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$. Obsah trojuholníka ABC sa rovná absolútnej hodnote čísla Δ, kde

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2, & y_2 \\ x_3, & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3, & y_3 \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

alebo po úprave

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Obsah mnohouholníka s danými vrcholmi $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, ..., $A_n = (x_n, y_n)$ sa rovná absolútnej hodnote čísla Δ_n, kde

$$\Delta_n = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2, & y_2 \\ x_3, & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n, & y_n \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix}\right). \tag{2}$$

Obsah trojuholníka v priestore

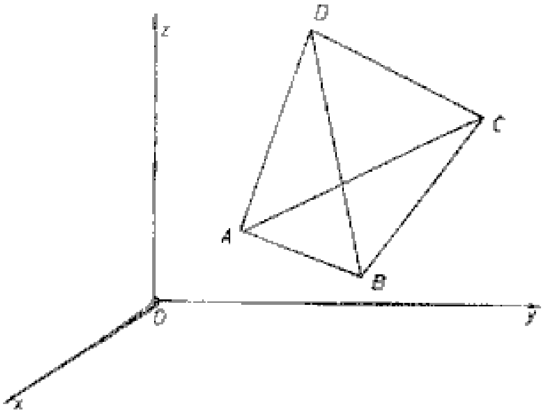
Ak vrcholy trojuholníka sú $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, obsah trojuholníka P je

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}^2}. \tag{3}$$

Objem štvorstena

Objem štvorstena, ktorého vrcholy v pravouhlom súradnicovom systéme sú $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, $D = (x_4, y_4, z_4)$ *(obr. 28)*, rovná sa absolútnej hodnote čísla Δ, kde

$$\Delta = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix}. \tag{4}$$



Obr. 28

Príklad 1. Vrcholy trojuholníka sú dané bodmi $A = (2, 0)$, $B = (9, 1)$, $C = (7, 3)$. Nájdime obsah trojuholníka ABC.

Riešenie. Podľa (1) je

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2, & 0, & 1 \\ 9, & 1, & 1 \\ 7, & 3, & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

Obsah trojuholníka $P = |\Delta| = 8$.

Príklad 2. Vypočítajte obsah štvoruholníka s vrcholmi $A = (4, 0)$, $B = (5, 5)$, $C = (7, 2)$, $D = (6, -3)$.

Riešenie. Podľa vzorca (2) pre obsah mnohouholníka máme

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 4, & 0 \\ 5, & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5, & 5 \\ 7, & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7, & 2 \\ 6, & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6, & -3 \\ 4, & 0 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}(20 - 25 - 33 + 12) = -13.$$

Obsah štvoruholníka $P = |\Delta| = |-13| = 13$.

Príklad 3. Vrcholy štvorstena v pravouhlom súradnicovom systéme v priestore sú $A = (2, 1, 0)$, $B = (5, 4, 3)$, $C = (4, 5, 4)$, $D = (3, 4, 6)$. Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$.

Riešenie. Podľa vzorca (4) pre objem štvorstena máme

$$\Delta = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 1 \\ 5, & 4, & 3, & 1 \\ 4, & 5, & 4, & 1 \\ 3, & 4, & 6, & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{6}\begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \\ 2, & 4, & 4, & 0 \\ 1, & 3, & 6, & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(24 + 6 + 4 - 4 - 12 - 12) = -3.$$

(V druhom determinante sme odčítali prvý riadok od ostatných, vyňali z druhého riadku 3 a nakoniec sme rozvinuli determinant podľa prvkov posledného stĺpca.) Objem štvorstena $V = |\Delta| = |-3| = 3$.

433. Nájdite obsah trojuholníka, ktorého vrcholy sú:

a) $A = (-1, 4)$, $B = (1, -3)$, $C = (3, 5)$;
b) $A = (3, -1)$, $B = (6, 2)$, $C = (3, 5)$;
c) $A = (-2, 1)$, $B = (5, 2)$, $C = (0, 7)$;
d) $A = (0, 6)$, $B = (-6, 3)$, $C = (7, -2)$;
e) $A = (2, 4)$, $B = (-6, 1)$, $C = (6, -2)$.

434. Rovnobežník má tri vrcholy $A = (-5, 4)$, $B = (1, -4)$, $C = (-6, 2)$. Nájdite jeho obsah.

435. Nájdite dĺžky výšok trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (-1, 9)$, $B = (-5, 6)$, $C = (-2, 2)$.

436. Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = (4, 1)$ od priamky, ktorá prechádza bodmi $K = (3, 2)$, $L = (7, 5)$.

437. Dokážte, že tri body $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ ležia na jednej priamke vtedy a len vtedy, ak platí

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

438. Zistite, či body:

a) $P = (1, 4)$, $Q = (3, 0)$, $R = (0, 6)$;
b) $P = (0, 3)$, $Q = (-3, 6)$, $R = (11, -8)$;
c) $P = (1, 1)$, $Q = (0, 4)$, $R = (4, 3)$

ležia na jednej priamke.

439. Nájdite súradnice vrcholu C trojuholníka ABC, ak

a) jeho obsah je $P = 3$, vrchol $A = (4, 0)$, vrchol $B = (2, -4)$ a vrchol C leží na osi o_x;
b) $P = 4$, $A = (3, 3)$, $B = (4, 0)$ a C leží na osi o_y;
c) $P = 21$, $A = (4, 3)$, $B = (6, -3)$ a dĺžka strany AC rovná sa 7.

440. Vrcholy trojuholníka v polárnych súradniciach sú $A = (\varrho_1, \varphi_1)$, $B = (\varrho_2, \varphi_2)$, $C = (\varrho_3, \varphi_3)$. Odvoďte vzorec pre obsah tohto trojuholníka.

441. Nájdite obsah trojuholníka s vrcholmi, ktoré sú dané v polárnom súradnicovom systéme:

a) $O = (0, 0)$, $A = (5, 3\pi/4)$, $B = (4, 7\pi/12)$;
b) $A = (3, 5\pi/8)$, $B = (8, 19\pi/24)$, $C = (6, 9\pi/8)$.

442. Vypočítajte obsah:

a) štvoruholníka s vrcholmi $A = (4, 0)$, $B = (3, 3)$, $C = (0, 2)$, $D = (2, -1)$;

b) štvoruholníka s vrcholmi $A = (1, 3)$, $B = (3, 4)$, $C = (4, 5)$, $D = (3, 0)$;

c) päťuholníka s vrcholmi $A = (0, 5)$, $B = (-2, 8)$, $C = (-3, 7)$, $D = (-2, 3)$, $E = (-1, 3)$;

d) päťuholníka s vrcholmi $A = (-1, 1)$, $B = (1, -2)$, $C = (3, -1)$, $D = (4, 1)$, $E = (0, 2)$.

443. Les má tvar štvoruholníka s vrcholmi $A = (0, 200)$, $B = (200, 100)$, $C = (500, 300)$ a $D = (100, 700)$, pričom jednotková úsečka $OJ = 1$ m. Nájdite výmeru lesa.

444. Vypočítajte súradnice ostatných vrcholov rovnobežníka, ak

a) obsah $P = 12$, dva vrcholy sú $A = (2, 5)$, $B = (1, 6)$ a priesečník jeho uhlopriečok leží na osi o_x;

b) obsah $P = 17$, dva vrcholy sú $A = (-2, 4)$, $B = (1, 0)$ a priesečník jeho uhlopriečok leží na osi o_y.

445. Vypočítajte obsah trojuholníka, ktorý má vrcholy:

a) $A = (3, 3, 0)$, $B = (5, 1, -3)$, $C = (7, 3, 6)$;

b) $A = (7, 2, 6)$, $B = (4, 5, 6)$, $C = (3, 1, -4)$.

446. Rozhodnite, či dané tri body ležia na jednej priamke:

a) $A = (3, -1, 3)$, $B = (4, 1, 1)$, $C = (5, 3, -1)$;

b) $A = (4, 1, 1)$, $B = (2, -1, 5)$, $C = (6, 5, -2)$;

c) $A = (2, 3, 1)$, $B = (1, 1, -3)$, $C = (-2, -5, -15)$.

447. Ako musíme voliť čísla a, b, aby body $A = (3, 3, a)$, $B = (1, b, 0)$, $C = (-1, 0, 7)$ neležali na jednej priamke.

448. Nájdite dĺžky výšok trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (2, 1, 2)$, $B = (6, -4, 2)$, $C = (2, 5, -1)$.

449. Vypočítajte objem štvorstena, ktorý má vrcholy $A = (1, 1, 3)$, $B = (4, 7, 6)$, $C = (2, 4, 1)$, $D = (3, 3, 5)$.

450. Štvorsten má vrcholy $A = (3, 4, 0)$, $B = (5, 2, -3)$, $C = (7, 4, 6)$, $D = (-4, -3, 7)$. Vypočítajte dĺžku výšky spustenej z vrchola D.

451. Štvorsten má objem $V = 5$ a tri vrcholy $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (1, 0, 3)$. Nájdite súradnice vrchola D, ak tento leží na osi o_y.

452. Dokážte, že nutnou a postačujúcou podmienkou, aby štyri body $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, $D = (x_4, y_4, z_4)$ ležali v jednej rovine, je

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

453. Ukážte, že body:

a) $A = (3, 2, 2)$, $B = (2, 1, 8)$, $C = (1, 2, 4)$, $D = (4, 1, 6)$;

b) $M = (2, 2, -2)$, $N = (1, 1, 4)$, $P = (0, 2, 0)$, $Q = (3, 1, 2)$

ležia v jednej rovine.

454. Rozhodnite, či ležia v jednej rovine dané štyri body:

a) $M = (3, 1, 6)$, $N = (4, 0, 8)$, $P = (1, 5, 7)$, $Q = (0, 8, 22)$;

b) $E = (2, -4, 5)$, $F = (3, -1, 4)$, $G = (0, -10, 7)$, $H = (0, 1, 6)$.

Ak neležia v jednej rovine, vypočítajte objem štvorstena, ktorého vrcholmi sú dané štyri body.

4,5. Pojem vektora a základné operácie s vektormi

Majme usporiadanú dvojicu bodov (A, B). Bod A nazývame jej *prvým* alebo *počiatočným*, bod B jej *druhým* alebo *koncovým bodom*. Každej usporiadanej dvojici (A, B) priraďujeme orientovanú úsečku $\overrightarrow{AB}$. Nech (A, B), (C, D) sú dve rôzne, usporiadané dvojice. Tieto určujú ten istý vektor $\mathbf{u}$ vtedy a len vtedy, keď sa zhodujú stredy úsečiek AD a CB.

Geometricky to znamená, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ možno posunutím stotožniť. Každá usporiadaná dvojica bodov (A, B), a teda i orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ určuje jeden vektor $\mathbf{u}$ a predstavuje jedno umiestnenie tohto vektora, označujeme to $\mathbf{u} = B - A$.

Ak vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v rovine je $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $D = (d_1, d_2)$ a usporiadané dvojice bodov (A, B) a (C, D) určujú ten istý vektor $\mathbf{u}$, platí

$$b_i - a_i = d_i - c_i, \quad i = 1, 2.$$

Čísla $u_i = b_i - a_i$, $i = 1, 2$, nazývame ***súradnicami vektora u*** a označujeme to $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\} = \{b_1 - a_1, b_2 - a_2\}$.

Ak vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v priestore je $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$ a usporiadané dvojice bodov (A, B) a (C, D) určujú ten istý vektor $\mathbf{u}$, platí

$$b_i - a_i = d_i - c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Čísla $u_i = b_i - a_i$, $i = 1, 2, 3$, nazývame súradnicami vektora $\mathbf{u}$ a označujeme to $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\} = \{b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3\}$.

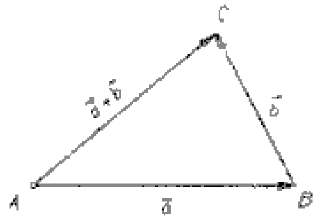
Poznámka. V ďalšom budeme uvažovať iba o vektoroch v priestore a o súradnicovom systéme budeme predpokladať, že je pravouhlý. Príslušné vzťahy pre vektory v rovine dostaneme formálne z ďalej uvedených vzťahov vypustením tretej súradnice bodu alebo vektora.

Vektor, ktorého každá súradnica sa rovná nule, nazývame *nulovým vektorom* a označujeme $\mathbf{o}$. Vektor $\mathbf{o}$ je určený ľubovoľnou usporiadanou dvojicou bodov (A, A), ktorej počiatočný a koncový bod je ten istý.

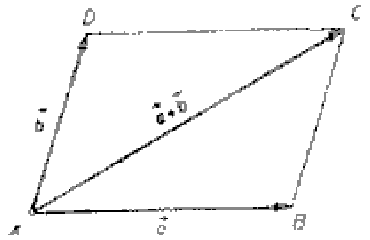
Opačným vektorom k vektoru $\mathbf{u} = B - A$ nazývame vektor $-\mathbf{u} = A - B$, ktorý je určený usporiadanou dvojicou bodov (B, A). Platí $-\mathbf{u} = \{-u_1, -u_2, -u_3\}$.

Operácie s vektormi

Súčtom vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ktoré sú určené usporiadanými dvojicami bodov (A, B), (B, C), nazývame vektor určený dvojicou (A, C) a označujeme ho $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (pozri *obr. 29*). Z definície súčtu vyplýva pravidlo rovnobežníka.



Obr. 29



Obr. 30

Nech A, B, C, D sú vrcholy rovnobežníka. Ak vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú určené dvojicami bodov (A, B) (A, D), $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ je určený dvojicou bodov (A, C) — uhlopriečkou rovnobežníka *(obr. 30)*.

Súčinom reálneho čísla k a vektora $\boldsymbol{a}$ určeného dvojicou (A, B), nazývame vektor $k\boldsymbol{a}$, určený dvojicou bodov (A, C), pričom pre bod C platí:

1. $C = A$, ak $k = 0$, alebo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.
2. Bod C leží na polpriamke AB a $\varrho(A, C) = k\varrho(A, B)$, ak $k > 0$ a $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$.
3. Bod C leží na opačnej polpriamke k polpriamke AB a platí $\varrho(A, C) = -k\varrho(A, B)$, ak $k < 0$ a $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$.

Ak umiestnenie vektora $\boldsymbol{a}$ je dané orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, potom pre stred S úsečky AB platí (pozri *obr. 31*)

$$S = A + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}.$$

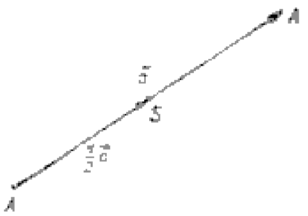
Takto zavedené operácie sú nezávislé od umiestnenia vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Ak $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, potom:
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ vtedy a len vtedy, ak $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3$,
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_1, a_2, a_3\} + \{b_1, b_2, b_3\} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$,
$k\boldsymbol{a} = k\{a_1, a_2, a_3\} = \{ka_1, ka_2, ka_3\}$.

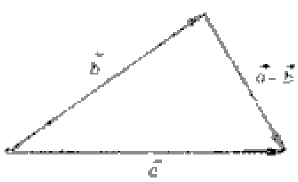
Pre takto zavedené operácie platia nasledujúce zákony:

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ *(zákon komutatívny)*,
2. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ *(zákon asociatívny)*,
3. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$,
4. $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$,
5. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$,
6. $k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\,\boldsymbol{a}$,
7. $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$,
8. $(k + l)\,\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$, kde k, l sú reálne čísla.

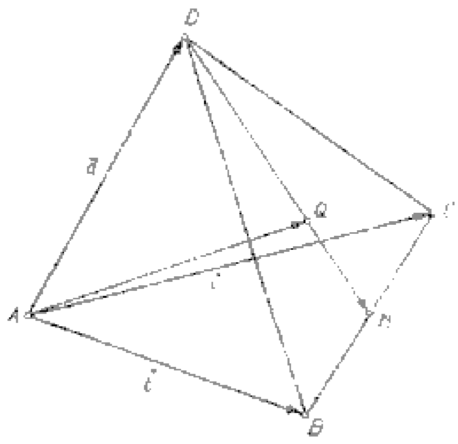
Rozdielom vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ nazývame vektor $\boldsymbol{x}$, pre ktorý platí $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, a označujeme ho $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Ak je $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, potom $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\}$ *(obr. 32)*.



Obr. 31



Obr. 32



Obr. 33

Príklad 1. Vo štvorstene $ABCD$ sú dané hrany, ktoré vychádzajú z vrcholu A : $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AD}$. Vyjadrime pomocou týchto vektorov ostatné hrany štvorstena, ťažnicu $\overrightarrow{DM}$, steny BCD a vektor $\overrightarrow{AQ}$, kde Q je ťažisko steny BCD *(obr. 33)*.

Riešenie. Označme zvyšné hrany štvorstena $\boldsymbol{e} = \overrightarrow{DB}$, $\boldsymbol{f} = \overrightarrow{DC}$, $\boldsymbol{g} = \overrightarrow{CB}$, M stred úsečky BC. Vyjadrime vektory $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ pomocou $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Platí:

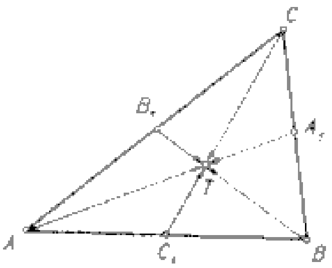
$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}, \qquad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}, \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.$$

Z vlastnosti ťažnice vyplýva

$$\overrightarrow{DM} = \mathbf{f} + \frac{1}{2}\,\mathbf{g} = \mathbf{c} - \mathbf{d} + \frac{1}{2}\,(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{c} - \mathbf{d} + \frac{1}{2}\,\mathbf{b} - \frac{1}{2}\,\mathbf{c} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{d}.$$

Pre vektor $\overrightarrow{AQ}$ platí

$$\overrightarrow{AQ} = \mathbf{d} + \overrightarrow{DQ} = \mathbf{d} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DM} = \mathbf{d} + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} - \mathbf{d}\right) = \mathbf{d} + \frac{\mathbf{b}}{3} + \frac{\mathbf{c}}{3} - \frac{2}{3}\,\mathbf{d} = \frac{1}{3}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}).\text{*)}$$



Obr. 34

Súčet bodu A a vektora $\mathbf{a}$ určeného dvojicou bodov (A, B) je bod B a značíme to $A + \mathbf{a} = B$.

Rozdiel bodu A a vektora $\mathbf{a}$ je bod C, pre ktorý platí $A + (-\mathbf{a}) = C$ a značíme ho $A - \mathbf{a} = C$.

Pre súčet bodov a vektorov platí:

1. $A + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (A + \mathbf{a}) + \mathbf{b}$ *(zákon asociatívny)*,
2. $A + \mathbf{o} = A$,
3. $A + (B - A) = B$,
4. $(A + \mathbf{c}) - B = (A - B) + \mathbf{c}$,
5. $A - (B + \mathbf{c}) = (A - B) - \mathbf{c}$,
6. $A - B = (A - C) + (C - B)$.

Príklad 2. Ak T je ťažisko trojuholníka ABC, dokážme, že platí $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \mathbf{o}$ *(obr. 34)*.

Riešenie. Označme stredy strán trojuholníka A_1, B_1, C_1. Z vlastnosti ťažiska vieme, že

$$\overrightarrow{AT} = T - A = \frac{2}{3}\,(A_1 - A) = \frac{2}{3}\,[(B - A) + (A_1 - B)] = \frac{2}{3}\left[(B - A) + \frac{1}{2}\,(C - B)\right],$$

$$\overrightarrow{BT} = T - B = \frac{2}{3}\,(B_1 - B) = \frac{2}{3}\,[(C - B) + (B_1 - C)] = \frac{2}{3}\left[(C - B) + \frac{1}{2}\,(A - C)\right],$$

$$\overrightarrow{CT} = T - C = \frac{2}{3}\,(C_1 - C) = \frac{2}{3}\,[(A - C) + (C_1 - A)] = \frac{2}{3}\left[(A - C) + \frac{1}{2}\,(B - A)\right].$$

Ďalej máme

$$(T - A) + (T - B) + (T - C) = \frac{2}{3}\left[(B - A) + \frac{1}{2}\,(C - B) + (C - B) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,(A - C) + (A - C) + \frac{1}{2}\,(B - A)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\,(B - A) + \frac{3}{2}\,(C - B) + \frac{3}{2}\,(A - C)\right] =$$

$$= [(C - B) + (B - A)] + (A - C) = (C - A) + (A - C) = \mathbf{o},$$

čo sme mali dokázať.

Absolútnou hodnotou (*modulom* alebo *dĺžkou*) vektora $\mathbf{a}$ určeného dvojicou (A, B) nazývame číslo $\varrho(A, B)$ a označujeme ho $|\mathbf{a}|$. Ak $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, tak $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Vektor, ktorého dĺžka sa rovná 1, nazývame *jednotkovým vektorom*. Ak $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, jednotkový vektor vektora $\mathbf{a}$ je

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a}.$$

Platí $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{a}^0$.

---

*) Kvôli zjednodušeniu používame niekedy namiesto $\frac{l}{k}\,\mathbf{b}$ znak $\frac{l\mathbf{b}}{k}$ alebo $l\mathbf{b}/k$, kde $\mathbf{b}$ je ľubovoľný vektor a l, $k \neq 0$ sú čísla.

Jednotkové vektory určené dvojicami bodov (O, J_1), (O, J_2), (O, J_3), kde J_1, J_2, J_3 sú jednotkové body na osiach pravouhlého súradnicového systému, označujeme $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ a nazývame ***základnými (súradnicovými) vektormi***. Platí:

$$\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\} \qquad \boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\}, \qquad \boldsymbol{k} = \{0, 0, 1\}.$$

Uhlom dvoch vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, ktoré sú nenulové a určené dvojicami (A, B), (A, C) nazývame *dutý uhol* $\sphericalangle BAC$ a označujeme ho $\sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Uhly, ktoré zviera nenulový vektor $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ so základnými vektormi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, nazývame *smerové uhly* vektora $\boldsymbol{a}$ a označujeme $\alpha = \sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}$, $\beta = \sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}$, $\gamma = \sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}$. Pre smerové uhly vektora $\boldsymbol{a}$ platí

1. $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}, \qquad \cos\beta = \dfrac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}, \qquad \cos\gamma = \dfrac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$,
2. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,
3. $\boldsymbol{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Príklad 3. Vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme je daný vektor $\boldsymbol{a} = \{-5, -2, 14\}$. Vypočítajme $|\boldsymbol{a}|$, smerové uhly vektora $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{a}^0$.

Riešenie. Pretože $\boldsymbol{a} = \{-5, -2, 14\} \neq \boldsymbol{o}$, pre $|\boldsymbol{a}|$ a smerové uhly platí

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + 14^2} = 15,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3},$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{-2}{15},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{14}{15}.$$

Odtiaľ je $\alpha \doteq 109°28'16''$, $\beta \doteq 97°39'44''$, $\gamma \doteq 21°03'15''$, $\boldsymbol{a}^0 = \left\{-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{15}, \dfrac{14}{15}\right\}$.

Lineárna závislosť vektorov. Báza. Vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ sú *lineárne závislé*, ak existuje taká nenulová n-tica reálnych čísiel $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, že platí

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}.$$

Vektory sú *lineárne nezávislé*, ak nie sú lineárne závislé.

Ak pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \ldots, \boldsymbol{h} = \{h_1, h_2, h_3\}$, potom vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{h}$ sú lineárne závislé vtedy a len vtedy, ak trojice (a_1, a_2, a_3), $(b_1, b_2, b_3), \ldots, (h_1, h_2, h_3)$ sú lineárne závislé.

Dva nenulové lineárne závislé vektory sú *rovnobežné (kolineárne)*. Tri nenulové, lineárne závislé vektory sú *komplanárne*, t. j. možno ich umiestniť v jednej rovine. Každé tri vektory v rovine a každé štyri vektory v priestore sú lineárne závislé. Dvojicu lineárne nezávislých vektorov v rovine resp. trojicu lineárne nezávislých vektorov v priestore nazývame *bázou*. Každý vektor môžeme jednoznačne rozložiť pomocou vektorov danej bázy, t. j. vyjadriť ako ich lineárnu kombináciu. V priestore platí $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$, kde $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ sú vektory bázy a čísla a_1, a_2, a_3 nazývame *súradnicami vektora* $\boldsymbol{a}$ v danej báze. Ak $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$, potom hovoríme o pravouhlých súradniciach vektora $\boldsymbol{a}$ a píšeme $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Príklad 4. Dokážme, že vektory $\boldsymbol{a} = \{3, 5\}$, $\boldsymbol{b} = \{-1, 3\}$ sú lineárne nezávislé a vyjadrime vektor $\boldsymbol{c} = \{2, 6\}$ ako ich lineárnu kombináciu.

Riešenie. Najskôr dokážeme, že vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sú lineárne nezávislé. Na to stačí dokázať, že dvojice $(3, 5)$ a $(-1, 3)$ nie sú lineárne závislé.

Z podmienky $k(3, 5) + l(-1, 3) = 0$, vyplýva:

$$\left.\begin{aligned} 3k - l &= 0 \\ 5k + 3l &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Systém (1) je lineárny homogénny systém vzhľadom na k a l. Keďže determinant systému (1)

$$D = \begin{vmatrix} 3, & 1 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, \tag{2}$$

má systém (1) iba triviálne riešenie $k = 0$, $l = 0$. To znamená, že vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú lineárne nezávislé.

Vyjadrime $\boldsymbol{c}$ ako lineárnu kombináciu $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, t. j.

$$\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b},$$

kde k_1, k_2 sú čísla. Ak rozpíšeme (2) pomocou súradníc vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ dostaneme

$$\left.\begin{aligned} 3k_1 - k_2 &= 2 \\ 5k_1 + 3k_2 &= 6. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Riešením lineárneho systému rovníc (3) je jediná dvojica (6/7, 4/7). Po dosadení do (2) dostaneme pre $\boldsymbol{c}$ rovnosť

$$\boldsymbol{c} = \frac{6}{7}\boldsymbol{a} + \frac{4}{7}\boldsymbol{b}.$$

Polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_M$ bodu M nazývame vektor $\overrightarrow{OM}$, kde O je pevný bod.

Vlastnosti:

1. $M = O + \boldsymbol{r}_M$,
2. $\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = B - A$.

Ak bod M delí úsečku PQ v pomere λ, pre polohový vektor $\boldsymbol{r}$ bodu M a polohové vektory $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ bodov P, Q platí

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{r}_2}{1 + \lambda}.$$

Ak M je stred úsečky PQ, potom

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2}.$$

445. Dané sú body A, B, C, D a vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Rozhodnite, či výraz:

a) $A + \boldsymbol{a}$;
b) $(C + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$;
c) $A + (B - C)$;
d) $A - (B - C)$;
e) $(A - B) + (C - D)$;
f) $A - (B + \boldsymbol{a})$;
g) $(A + \boldsymbol{a}) - (B + \boldsymbol{b})$;
h) $(A + \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{b}$

je vektor alebo bod.

456. Daný je vektor $\boldsymbol{a} = B - A$, znázornite vektory:

a) $1{,}5\boldsymbol{a}$; b) $-2\boldsymbol{a}$; c) $-0{,}2\boldsymbol{a}$; d) $2\boldsymbol{a}/3$.

457. Zjednodušte výrazy:

a) $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - (2\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b})$;
b) $\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b} - (\alpha + \beta)\boldsymbol{a}$;
c) $\boldsymbol{a}\,\mathrm{tg}\,45° - \boldsymbol{a}\,\mathrm{cotg}\,45°$;
d) $\cos\alpha\cos\beta\,\boldsymbol{a} - \sin\alpha\sin\beta\,\boldsymbol{a}$;
e) $(\alpha - \beta)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\alpha + \beta)(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

458. Riešte rovnice:

a) $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{c}$;
b) $\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$;
c) $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}/2 + 2\boldsymbol{b}/3 + \boldsymbol{x}/4$;
d) $A + \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{b}$;
e) $A + \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{x} = A + 2\boldsymbol{b}$;
f) $A + 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{x} = A + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}/2$;
g) $A + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x} = B$;
h) $A + 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = B - \boldsymbol{b}$;
i) $A + \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{x} = B + \boldsymbol{a}$;
j) $A + 5\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{x}/2 = B + 2\boldsymbol{a}$;
k) $2\boldsymbol{a} + 7\boldsymbol{x} = A + B$,

kde A, B sú body a $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$ sú vektory.

459. Ak $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú nenulové vektory, zostrojte vektor:

a) $3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$; b) $2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$; c) $2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$; d) $-\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$.

460. V rovnobežníku $ABCD$, ktorého stred je M, označme $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$. Vyjadrite pomocou $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ vektory $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ a $\overrightarrow{MD}$.

461. Rovnobežnosten $ABCDEFGH$ je určený vektormi $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = D - A$, $\boldsymbol{c} = E - A$. Zostrojte vektory:

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$;
b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}/2$;
c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$;
d) $-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}/2$;
e) $\boldsymbol{a}/2 + \boldsymbol{b}/2 + \boldsymbol{c}$.

462. Daný je pravidelný päťuholník $ABCDE$ a vektory $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = C - B$, $\boldsymbol{c} = D - C$, $\boldsymbol{d} = E - D$, $\boldsymbol{e} = A - E$. Zostrojte vektory:

a) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d})/2$; b) $\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}/5 + 3\boldsymbol{d}/5 + 2\boldsymbol{e}/5 + \boldsymbol{a}/5$.

463. V rovine je daný šesťuholník $ABCDEF$ a bod G. Nájdite body L, M, N, P, Q, pre ktoré platí: $L = G + \boldsymbol{a}$, $M = G + \boldsymbol{b}$, $N = G + \boldsymbol{c}$, $P = G + \boldsymbol{d}$, $Q = G - \boldsymbol{e}$, kde $\boldsymbol{a} = D - F$, $\boldsymbol{b} = B - A$, $\boldsymbol{c} = E - B$, $\boldsymbol{d} = A - C$, $\boldsymbol{e} = F - D$.

464. Ukážte, že súčet vektorov, ktorých umiestnenie je také, že majú počiatočný bod v strede pravidelného mnohouholníka a koncové body v jeho vrcholoch, sa rovná $\boldsymbol{o}$.

465. Nájdite v n-uholníku taký bod X, aby súčet vektorov $\boldsymbol{a}_i = A_i - X$, kde A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, sú vrcholy n-uholníka, rovnal sa $\boldsymbol{o}$. Riešte pre $n = 3$ a pre $n = 4$, ak štvoruholník je rovnobežník.

466. Dokážte, že ak vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú súhlasne rovnobežné, vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ je súhlasne rovnobežný s každým z obidvoch sčítancov.

467. Daný je rovnostranný trojuholník ABC a vektory $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = C - B$, $\boldsymbol{c} = A - C$. Vyjadrite vektor $\boldsymbol{c}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

468. Vo štvorstene $ABCD$ sú dané vektory $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = C - A$, $\boldsymbol{w} = D - A$. Vyjadrite pomocou vektorov $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vektory $\boldsymbol{a} = M - N$, $\boldsymbol{b} = P - R$, $\boldsymbol{c} = Q - S$, kde N, R, S sú stredy hrán AB, AC, AD a M, P, Q sú stredy zodpovedajúcich protiľahlých strán CD, DB, BC.

469. Daný je vektor: a) $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$; b) $\boldsymbol{r} = \{2, 3, 4\}$. Nájdite jeho dĺžku a smerové kosínusy.

470. Nájdite smerové kosínusy vektora $\boldsymbol{r}_A$, ak

a) $A = (-2, 1, 2)$; b) $A = (2, -3, 3)$.

471. Nájdite smerové kosínusy vektora, ktorý

a) zviera so súradnicovými osami rovnaké uhly;
b) je umiestnený v rovine R_{xy} a s osou x zviera uhol $120°$.

472. Vektor $\boldsymbol{a}$ zviera s osami o_x a o_y uhly 60 a 120°. Aký uhol zviera s osou o_z?

473. Nech vektor $\boldsymbol{a}$ je určený dvojicou bodov (O, P) a vektor $\boldsymbol{b}$ nech je určený dvojicou bodov (A, B), pričom $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 1, 3)$, $B = (3, 2, 5)$ a $|\boldsymbol{a}| = 4$. Nájdite súradnice bodu $P = (x, y, z)$ tak, aby vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ boli rovnobežné.

474. Nájdite súradnice, absolútnu hodnotu, smerové uhly a jednotkové vektory vektorov $\boldsymbol{a} = A - C$, $\boldsymbol{b} = B - C$, kde:

a) $A = (3, 0)$, $B = (-2, 5)$, $C = (6, 1)$;
b) $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -2, -6)$, $C = (-3, 0, 3)$.

475. Daný je bod $A = (2, 3, 1)$ a vektor $\boldsymbol{a} = \{1, -2, 3\}$. Nájdite:

a) bod X, pre ktorý platí $X = A + \boldsymbol{a}$;
b) bod Y, pre ktorý platí $A = Y + \boldsymbol{a}$;
c) smerové kosínusy vektora $\boldsymbol{a}$.

476. Nájdite bod M, pre ktorý je $M = A + \boldsymbol{a}$, kde $A = (2, 2, 2)$ a $|\boldsymbol{a}| = 4$, pričom smerové uhly vektora $\boldsymbol{a}$ sú navzájom rovnaké.

477. Nájdite bod X, pre ktorý platí $X = A + \boldsymbol{a}$, kde $A = (4, 3, -1)$, $|\boldsymbol{a}| = 5$ a smerové uhly vektora $\boldsymbol{a}$ sú:

a) $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$; b) $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/3$; c) $\alpha = 5\pi/6$, $\gamma = \pi/6$.

478. Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = \{2, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{3, 2, 2\}$, $\boldsymbol{c} = \{1, 0, 7\}$, $\boldsymbol{d} = \{3, -1\}$, $\boldsymbol{e} = \{2, 5\}$, $\boldsymbol{f} = \{4, 5, -9\}$. Nájdite vektory:

a) $3\boldsymbol{a} - 7\boldsymbol{d} + 2\boldsymbol{e}$;
b) $2\boldsymbol{b} - 5\boldsymbol{d} - 2\boldsymbol{c}$;
c) $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{f}$;
d) $3(\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{f}/7 + 2(\boldsymbol{c} - 3\boldsymbol{f})$.

479. Dané sú body $A = (3, 7, 2)$, $B = (0, 1, 4)$, $C = (-2, -3, 1)$ a vektory $\boldsymbol{a} = \{1, 2, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{-2, 0, 5\}$. Vypočítajte súradnice vektorov, resp. bodov:

a) $\boldsymbol{a} + (A + \boldsymbol{b})$;
b) $A + 2\boldsymbol{a}$;
c) $(C - A) + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$;
d) $(C + \boldsymbol{b}) - (C + \boldsymbol{a})$;
e) $(A + \boldsymbol{a} - B) - (C + \boldsymbol{b} - A)$.

480. Nájdite koncový bod B umiestnenia vektora $\boldsymbol{a}$, ak:

a) počiatočný bod vektora $\boldsymbol{a}$ je $A = (3, 1, 2)$ a $\boldsymbol{a} = \{2, 0, 5\}$.
b) počiatočný bod je $A = (4, 2, 5)$ a $\boldsymbol{a} = C - B$, kde $C = (6, -4, 3)$;
c) počiatočný bod je $A = (6, 0, 4)$ a $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}/2 = \{1, 2, -4\}$.

481. Nájdite dĺžku vektora $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{a} = \{6, 7, 7\}$, $\boldsymbol{b} = \{4, -4, 5\}$, $\boldsymbol{c} = \{-5, -9, -6\}$.

482. Dané sú tri za sebou idúce vrcholy rovnobežníka $ABCD$, kde $A = (2, -2, 2)$, $B = (4, 2, 0)$, $C = (7, 4, 3)$. Nájdite jeho štvrtý vrchol D.

483. Počiatočným bodom umiestnenia vektora $\boldsymbol{a}$ je $A = (1, 3)$, stredom umiestnenia vektora $\boldsymbol{a}$ je bod $C = (4, 5)$. Nájdite súradnice koncového bodu.

484. Vypočítajte dĺžku vektora $\boldsymbol{a}$, ak viete, že $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$ a vektory $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sú jednotkové a navzájom kolmé.

485. Nájdite veľkosť a smerové kosínusy vektora $\boldsymbol{a}$, ak

a) $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$;
b) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$;
c) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$;
d) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

486. Vyjadrite vektor $\boldsymbol{c}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ak

a) $\boldsymbol{c} = \{10, 3\}$, $\boldsymbol{a} = \{3, -5\}$, $\boldsymbol{b} = \{-4, 7\}$;
b) $\boldsymbol{c} = \{10, -3\}$, $\boldsymbol{a} = \{1, 0\}$, $\boldsymbol{b} = \{0, 1\}$.

487. Vyjadrite vektor $\boldsymbol{d}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$:
a) $\boldsymbol{a} = \{2, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{7, -2\}$, $\boldsymbol{d} = \{3, 4\}$;
b) $\boldsymbol{a} = \{7, 2\}$, $\boldsymbol{b} = \{-1, -2\}$, $\boldsymbol{d} = \{21, 6\}$.

488. Vyjadrite vektor $\boldsymbol{d}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ak
a) $\boldsymbol{a} = \{3, 2, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{7, 5, 0\}$, $\boldsymbol{c} = \{-2, 3, 4\}$, $\boldsymbol{d} = \{12, 4, -3\}$;
b) $\boldsymbol{a} = \{6, 3, 5\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, 2, -7\}$, $\boldsymbol{c} = \{6, 12, 0\}$, $\boldsymbol{d} = \{18, 0, 20\}$;
c) $\boldsymbol{a} = \{1, 5, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{6, -4, -2\}$, $\boldsymbol{c} = \{0, -5, 7\}$, $\boldsymbol{d} = \{-20, 27, -35\}$.

489. Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = \{-3, 5\}$, $\boldsymbol{b} = \{6, 1\}$, $\boldsymbol{c} = \{4, 4\}$. Nájdite také čísla m, n, aby umiestnenie vektorov $m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $n\boldsymbol{c}$ tvorilo trojuholník, pričom počiatok umiestnenia vektora $\boldsymbol{b}$ nech je koncový bod umiestnenia vektora $m\boldsymbol{a}$ a počiatok umiestnenia vektora $n\boldsymbol{c}$ nech je koncový bod umiestnenia vektora $\boldsymbol{b}$.

490. V rovine sú dané body $A = (1, -2)$, $B = (2, 1)$, $C = (3, 2)$, $D = (-2, 3)$. Určete rozklady vektorov $(A - D)$, $(B - D)$, $(C - D)$ a $(A - D) + (B - D) + (C - D)$ v báze $\boldsymbol{a} = (A - B)$, $\boldsymbol{b} = (A - C)$.

491. Dané sú body $A = (5, -10, -1)$, $B = (-4, 2, 5)$, $C = (-7, 8, 5)$, $D = (2, -7, 2)$. Zistite, ktoré z vektorov $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = C - A$, $\boldsymbol{c} = D - B$, $\boldsymbol{d} = C - D$ sú kolineárne a nájdite vyjadrenie jedného vektora ako skalárny násobok druhého, k nemu kolineárneho vektora.

492. Pre aké čísla m, n sú vektory:
a) $\boldsymbol{a} = \{-2, 3, m\}$, $\boldsymbol{b} = \{n, -6, 2\}$; b) $\boldsymbol{a} = \{2/m - 4, n, 5\}$, $\boldsymbol{b} = \{m, 3m - 2n, 2\}$ kolineárne.

493. Vektor $\boldsymbol{a} = B - A$ je rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{m} = N - M$. Nájdite bod N, ak $A = (3, 1, -2)$, $B = (1, 4, 3)$, $M = (2, 1, -3$, ak $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{m})$.

494. Nech $\boldsymbol{a} = \{4, x, 2\}$, $\boldsymbol{b} = \{-2, -2, -1\}$, $\boldsymbol{c} = \{1, 2, 1\}$. Nájdite číslo x tak, aby vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ boli lineárne závislé.

495. Vypočítajte veľkosť a smer vektora sily $\boldsymbol{F}$, ak jeho súradnice v pravouhlom súradnicovom systéme sú $F_x = 10$, $F_y = 5$, $F_z = 10$.

496. V bode $A = (2, 1, -5)$ pôsobí sila $\boldsymbol{F}$, ktorej $|\boldsymbol{F}| = 11$ a zložky $F_x = 7$, $F_y = 6$. Nájdite smer vektora sily a súradnice jeho koncového bodu.

497. V rovine sú dané body $A = (1, -3)$, $B = (1, 5)$, $C = (5, -3)$. V počiatku pôsobia sily dané vektormi $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Zostrojte výslednicu týchto síl a vypočítajte jej veľkosť, ak vektor $\overrightarrow{OJ_1}$ vyjadruje silu veľkosti 1 kp.

498. Vo vrchole kocky pôsobia sily veľkosti 1 kp, 2 kp, 3 kp v smere stenových uhlopriečok idúcich z tohto vrchola. Nájdite výslednicu týchto síl.

4,6. Skalárny a vektorový súčin dvoch vektorov, zmiešaný súčin troch vektorov

Skalárny súčin

Skalárnym súčinom $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ nazývame číslo (skalár), pre ktoré platí:
1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, ak $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú nenulové vektory,
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, ak aspoň jeden vektor $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je nulový vektor $\boldsymbol{o}$.

Vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme pre skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ platí
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Skalárny súčin $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ dvoch vektorov sa rovná nule vtedy a len vtedy, ak platí $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ alebo $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ alebo $\sphericalangle\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \pi/2$.

Vlastnosti skalárneho súčinu:

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,
2. $\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$, kde λ je číslo (skalár),
3. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$,
4. pre jednotkové vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ platí

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \qquad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0.$$

Skalárny súčin $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ nazývame *druhou mocninou* vektora $\boldsymbol{a}$ a označujeme $\boldsymbol{a}^2$. Platí
5. $\boldsymbol{a}^2 \geqq 0$, pričom $\boldsymbol{a}^2 = 0$ vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.
Nech $n = 2, 3, \ldots$, potom

$$\boldsymbol{a}^n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^{n-1}.$$

Pre dĺžku (absolútnu hodnotu) vektora $\boldsymbol{a}$ platí

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}.$$

Pre kosínus uhla nenulových vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ platí

$$\cos \sphericalangle\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}.$$

Ak v danom pravouhlom súradnicovom systéme $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, potom

$$\cos \sphericalangle\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Pre veľkosť priemetu vektora $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ do osi u určenej jednotkovým vektorom $\boldsymbol{u}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ platí

$$(\boldsymbol{a})_u = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}^0$$

alebo

$$(\boldsymbol{a})_u = a_1 \cos\alpha + a_2 \cos\beta + a_3 \cos\gamma.$$

Pre veľkosť priemetu vektora $\boldsymbol{a}$ do osi u platí

6. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_u = (\boldsymbol{a})_u + (\boldsymbol{b})_u$,
7. $\alpha(\boldsymbol{a})_u = (\alpha \boldsymbol{a})_u$, kde α je číslo (skalár).

Príklad 1. Vektor $\boldsymbol{x}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{a} = \{4, 1, -1\}$, $\boldsymbol{b} = \{-2, 6, 7\}$ a smerový uhol β vektora $\boldsymbol{x}$ je tupý. Nájdime vektor $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, ak $|\boldsymbol{x}| = 3$.

Riešenie. Platí:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} &= 0, \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} &= 0, \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{j} &< 0, \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} &= 3^2. \end{aligned}$$

Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 0 \\ x_2 &< 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 9. \end{aligned}$$

Z prvých dvoch rovníc dostaneme

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} 1, & -1 \\ 6, & 7 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1, & 4 \\ 7, & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4, & 1 \\ -2, & 6 \end{vmatrix},$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = 13 : -26 : 26,$$

$$x_1 = k, \qquad x_2 = -2k, \qquad x_3 = 2k,$$

kde k je ľubovoľné číslo.

Z tretej rovnice vyplýva, že $-2k < 0$, teda $k > 0$.
Z poslednej rovnice vyplýva: $k^2 + 4k^2 + 4k^2 = 9$, teda $k_{1,2} = \pm 1$ a riešenie je $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. Hľadaný vektor je $\mathbf{x} = \{1, -2, 2\}$.

499. Pre vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí, že $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 4$ a $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ je $\pi/3$. Nájdite skalárne súčiny:

a) $\mathbf{a} . \mathbf{b}$;
b) $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{a}^2$;
c) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$;
d) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) . (2\mathbf{b} - \mathbf{a})$;
e) $(4\mathbf{a} - 2\mathbf{b})^2$.

500. Vypočítajte $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, ak:

a) $\varphi = 45°$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 7$;
b) $\varphi = 120°$, $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$;
c) $\varphi = 90°$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$,

pričom φ je $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}$.

501. Nájdite skalárne súčiny:

a) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) . (\mathbf{a} - 2\mathbf{c})$;
b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$,

ak $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 6$ a $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} = \pi/2$, $\sphericalangle\, \mathbf{b}, \mathbf{c} = 2\pi/3$, $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} = \pi$.

502. Ak viete, že

a) $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 24$, nájdite $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$;
b) $|\mathbf{a}| = 11$, $|\mathbf{b}| = 23$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 30$, nájdite $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

503. Dané sú vektory:

a) $\mathbf{a} = \{7, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-4, -3\}$;
b) $\mathbf{a} = \{8, -6\}$, $\mathbf{b} = \{-9, -12\}$;
c) $\mathbf{a} = \{3, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{6, 2, 7\}$;
d) $\mathbf{a} = \{6, 0, 3\}$, $\mathbf{b} = \{2, 5, 4\}$.

Vypočítajte $\mathbf{a} . \mathbf{b}$, $\sqrt{\mathbf{a}^2}$, $\sqrt{\mathbf{b}^2}$ cos, $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$, $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$, $\mathbf{a}^2(\mathbf{a} . \mathbf{b}) + (\mathbf{a} . \mathbf{b})\, \mathbf{b}^2$.

504. Vypočítajte, aký uhol zvierajú vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ak vektor $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ je kolmý na vektor $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ a vektor $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ je kolmý na vektor $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

505. Akým podmienkam vyhovujú vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ak:

a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;
c) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
d) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

506. Dokážte, že platí:

a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$;
b) $\mathbf{a}\, |\mathbf{a}|^{2n} = \mathbf{a}^{2n+1}$;
c) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$.

507. Vypočítajte $\mathbf{a} . \mathbf{b} + \mathbf{b} . \mathbf{c} + \mathbf{c} . \mathbf{a}$, ak $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sú jednotkové vektory, pre ktoré platí $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$.

508. Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ zvierajú uhol $\varphi = \pi/3$ a $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$. Nájdite uhol vektorov $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

509. Zistite, pre aké čísla α sú vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ navzájom kolmé, ak

a) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\alpha\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
b) $\mathbf{a} = (\alpha^2 - 4)\, \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + (2\alpha + 20)\, \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\alpha\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

510. Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sú určené dvojicami bodov (O, A), (O, B). Nájdite uhol vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ak

a) $A = (3, 0, 4)$, $B = (2, -2, 1)$;
b) $A = (-2, 1, 2)$, $B = (2, -3, 3)$,

pričom O je počiatok pravouhlého súradnicového systému.

511. Nájdite vnútorné uhly trojuholníkov, ktorých vrcholy sú:

a) $A = (2, -4, 9)$, $B = (-1, -4, 5)$, $C = (6, -4, 6)$;
b) $A = (6, 0, 2)$, $B = (8, -1, 4)$, $C = (4, -4, 6)$;
c) $A = (4, 0, 6)$, $B = (6, -3, 12)$, $C = (10, 2, 3)$.

Zistite, aké sú uvedené trojuholníky.

512. Nájdite uhol medzi dvoma protiľahlými hranami pravidelného štvorstena.

513. Zistite, či štvoruholník s vrcholmi $A = (5, 2, 6)$, $B = (6, 4, 4)$, $C = (4, 3, 2)$, $D = (3, 1, 4)$ je štvorec.

514. Vektor $\boldsymbol{x}$, ktorého absolútna hodnota je $7/2$, je kolmý na vektory $\boldsymbol{a} = \{2, 2, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{-22, -5, 18\}$ a zviera s osou o_y ostrý uhol. Nájdite súradnice vektora $\boldsymbol{x}$.

515. Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = \{2, -1, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, -2, 3\}$, $\boldsymbol{c} = \{3, 2, -4\}$. Nájdite vektor $\boldsymbol{x}$, pre ktorý platí:

a) $\boldsymbol{x} . \boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{x} . \boldsymbol{b} = 0$, $\boldsymbol{x} . \boldsymbol{c} = -10$; b) $\boldsymbol{x} . \boldsymbol{a} = -2$, $\boldsymbol{x} . \boldsymbol{b} = 3$, $\boldsymbol{x} . \boldsymbol{c} = 8$.

516. Vektor $\boldsymbol{a}$, ktorého dĺžka je $|\boldsymbol{a}| = 5$, zviera s osou o_x uhol:

a) $45°$; b) $60°$; c) $120°$.

Nájdite priemet vektora $\boldsymbol{a}$ do osi o_x.

517. Dané sú body $A = (2, -2, 2)$, $B = (5, -4, -4)$, $C = (3, 4, 2)$, $D = (9, 6, 5)$. Nájdite priemet vektora $\overrightarrow{AB}$ do smeru daného vektorom $\overrightarrow{CD}$.

518. Nájdite priemet vektora $\boldsymbol{a} = \{6, 3, 6\}$ do osi určenej vektorom $\boldsymbol{b}$, ak

a) $\boldsymbol{b} = \{-1, 3, 2\}$;
b) smerové uhly vektora $\boldsymbol{b}$ sú $\alpha > 90°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$;
c) smerové uhly vektora $\boldsymbol{b}$ sú $\alpha = \beta = \gamma > 90°$;
d) $\boldsymbol{b} = B - A$, kde $B = (1, 2, 1)$, $A = (-2, -5, 0)$.

519. Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = \{1, -3, 4\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, -1, 4\}$, $\boldsymbol{c} = \{3, 4, 12\}$. Nájdite:

a) priemet vektora $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ do osi určenej vektorom $\boldsymbol{c}$;
b) priemet vektora $\boldsymbol{c}$ do osi určenej vektorom $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$;
c) priemet vektora $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$ do osi určenej vektorom $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$.

520. Pôsobením sily $\boldsymbol{F} = \{-1, 2, 3\}$ sa bod posunul po dráhe danej vektorom $\boldsymbol{s} = \{-3, 2, -1\}$. Vypočítajte prácu sily $\boldsymbol{F}$ a uhol medzi silou $\boldsymbol{F}$ a dráhou $\boldsymbol{s}$, ak $\overrightarrow{OJ_1}$ znázorňuje silu veľkosti 1 kp a dĺžku 1 m.

Vektorový súčin

Vektorovým súčinom $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ nazývame vektor, pre ktorý platí

1. ak $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú kolineárne vektory, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$.
2. ak $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú lineárne nezávislé vektory, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, pričom

a) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,
b) vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,
c) nech vektory $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{b}^0$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ majú umiestnenie $\boldsymbol{a}^0 = A - O$, $\boldsymbol{b}^0 = B - O$, $\boldsymbol{c} = C - O$, potom pohyb bodu A do bodu B po kratšom oblúku $\widehat{AB}$, ($\widehat{AB} < \pi$) jednotkovej kružnice sa javí z bodu C proti smeru pohybu hodinových ručičiek.

Vlastnosti vektorového súčinu:

8. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$.
9. $\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \lambda\boldsymbol{b})$.
10. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$,
11. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} . \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} . \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} . \boldsymbol{c})$.

Každý pravouhlý súradnicový systém, pre ktorý platí $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{k} = \{0, 0, 1\}$, nazývame *pravotočivým*. Pravouhlý súradnicový systém, ktorý nie je pravotočivý, nazývame *ľavotočivým*.

12. V danom pravotočivom pravouhlom súradnicovom systéme pre vektorový súčin vektorov $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ platí

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3, & a_1 \\ b_3, & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} \right\},$$

čo zapisujeme aj takto:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}.$$

13. Ak $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = D - A$, kde A, B, C, D sú vrcholy rovnobežníka, pre obsah P rovnobežníka $ABCD$ platí

$$P = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|.$$

14. Pre jednotkové vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ v pravotočivom súradnicovom systéme platí

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{o},$$
$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Príklad 2. Nájdime obsah rovnobežníka zostrojeného nad vektormi $\boldsymbol{a} = \{2, 3, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{-1, -3, 6\}$.

Riešenie. Pre obsah rovnobežníka platí

$$P = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$$

a z toho

$$P = |(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \times (-\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k})| = |3\boldsymbol{k} - \boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k} + 3\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{i}| = |21\boldsymbol{i} - 13\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}|.$$

Teda

$$P = \sqrt{21^2 + 13^2 + 3^2} = \sqrt{441 + 169 + 9},$$
$$P = \sqrt{619}.$$

Príklad 3. Nájdime objem štvorstena, ktorého vrcholy v pravouhlom pravotočivom súradnicovom systéme sú A, B, C, D.

Riešenie. Položme $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = C - A$, $\boldsymbol{c} = D - A$.
Obsah základne ABC je

$$Z = \frac{1}{2} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|.$$

Výšku h z vrcholu D na základňu vypočítame ako veľkosť priemetu vektora $\boldsymbol{c}$ do jednotkového vektora kolmého na základňu $\boldsymbol{h}^0$, pričom

$$\boldsymbol{h}^0 = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}$$

a

$$h = |\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{h}^0|.$$

Pre objem štvorstena

$$V = \frac{1}{3} Zh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \left| \boldsymbol{c} \cdot \frac{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|} \right| = \frac{1}{6} |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|.$$

521. Vypočítajte $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, ak pre vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ platí
a) $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $\sphericalangle\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \pi/3$;
b) $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 8$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 24$;
c) $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, $\sphericalangle\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \pi/2$.

522. Pre vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ platí $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 3$ a $\sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = 5\pi/6$. Vypočítajte absolútne hodnoty vektorov:

a) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$; b) $(3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b})$; c) $(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})$.

523. Vypočítajte:

a) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, ak $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 5$ a $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$;
b) $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$, ak $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ a $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$;
c) $(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$;
d) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})$.

524. Ak vektor $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, vypočítajte $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.*)

525. Nájdite vektorový súčin $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, ak $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = D - C$, pričom $A = (2, 2, -1)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (-1, 2, 2)$, $D = (2, 1, 3)$.

526. Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Vypočítajte:

a) jednotkový vektor $\boldsymbol{c}$ kolmý na vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;
b) sínus uhla vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

527. Zjednodušte výrazy:

a) $\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \times (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j})$;
b) $(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) \times (\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$;
c) $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})$;
d) $(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \times (3\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}) \times (3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

528. Vypočítajte obsah:

a) trojuholníka ABC, ak $A = (3, 1, 4)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (5, 0, 8)$;
b) rovnobežníka $ABCD$, ak $A = (0, 4, 7)$, $B = (2, 2, 2)$, $D = (6, 1, 5)$.

529. Vektor $\boldsymbol{x}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{a} = \{6, 3, 0\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, 7, 2\}$. Nájdite jeho súradnice, ak

a) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c} = 6$, kde $\boldsymbol{c} = \{4, -4, -2\}$; b) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{j} < 0$, kde $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{189}/2$.

530. Vypočítajte $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, ak

a) $\boldsymbol{a} = \{2, 7, 4\}$, $\boldsymbol{b} = \{3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{c} = \{6, 0, 3\}$;
b) $\boldsymbol{a} = \{2, -1, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{0, 1, 2\}$, $\boldsymbol{c} = \{3, 3, 1\}$.

531. Ukážte, že ak pre vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ platí $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$, potom $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$.

532. Dané sú vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Ukážte, že

a) vektory $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$ sú komplanárne;
b) vektory $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ sú kolineárne, ak $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}$.

533. Dokážte, že pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ platí:

a) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$;
b) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{b}^2$;
c) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{o}$.

534. Vypočítajte $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$, ak
a) $\boldsymbol{a} = \{3, 2, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{5, 0, 4\}$; b) $\boldsymbol{a} = \{-2, -4, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{0, -3, -8\}$.

535. Nájdite moment sily $\boldsymbol{f}$ pôsobiacej v bode P vzhľadom na bod Q, ak

a) $\boldsymbol{f} = \{3, 4, 2\}$, $P = (3, 1, 0)$, $Q = (0, 0, 0)$;

---

*) V ďalšom, ak to nebude inač uvedené, predpokladáme pravotočivý pravouhlý súradnicový systém.

b) $\mathbf{f} = \{-1, 0, 4\}$, $P = (6, 2, 3)$, $Q = (1, 1, 1)$, pričom $\overrightarrow{OJ_1}$ znázorňuje silu veľkosti 1 kp a dĺžku 1 m.

536. Nájdite moment výslednice síl $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, pôsobiacich v bode P vzhľadom na bod Q, jeho absolútnu hodnotu a smerové kosínusy, ak $Q = (0, 1, 3)$, $\mathbf{F}_1 = \{6, 4, 2\}$ $\mathbf{F}_2 = \{5, 10, 11\}$, $\mathbf{F}_3 = \{-4, 0, -8\}$, $P = (6, 5, 1)$, ak $\overrightarrow{OJ_1}$ znázorňuje silu veľkosti 1 kp a dĺžku 1 m.

Zmiešaný súčin

Zmiešaným súčinom troch vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nazývame číslo $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Vlastnosti zmiešaného súčinu:

15. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,
16. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$,
17. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Nech v danom pravotočivom pravouhlom súradnicovom systéme $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$.

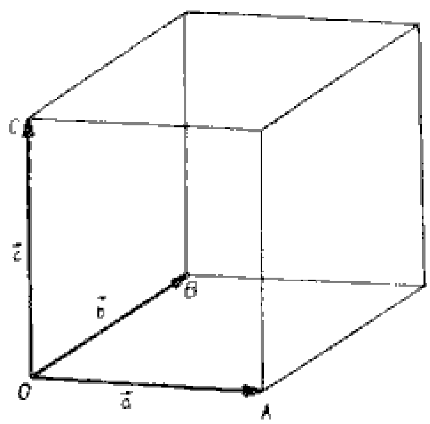
18. Platí

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}.$$

19. Nutná a postačujúca podmienka, aby tri vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ boli komplanárne, je

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ak pre vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ v danom pravouhlom a pravotočivom súradnicovom systéme je $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) > 0$, nazývame trojicu vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *pravotočivou*; ak je $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) < 0$, nazývame trojicu $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *ľavotočivou*.



Obr. 35

Geometrický význam zmiešaného súčinu je ten, že číslo $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ udáva objem rovnobežnostena, ktorého tri hrany sú určené vektormi $\mathbf{a} = A - O$, $\mathbf{b} = B - O$, $\mathbf{c} = C - O$ *(obr. 35)*.

Príklad 4. Ukážme, že platí

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}.$$

Riešenie. Počítajme súčin $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ ako zmiešaný súčin troch vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$. Podľa vlastnosti 17 a 11 dostaneme

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})].$$

Z toho vyplýva

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}.$$

537. Vypočítajte zmiešaný súčin $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, ak:

a) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{c}| = 2$, $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} = \pi/2$, $\sphericalangle\, \mathbf{b}, \mathbf{c} = 5\pi/6$, $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} = \pi/2$;

b) $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 7$, $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} = \pi/2$, $\sphericalangle\, \mathbf{b}, \mathbf{c} = \pi/2$, $\sphericalangle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} = \pi/2$.

538. Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Vypočítajte súčiny $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$.

539. Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = \{3, 7, 2\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, 4, 3\}$, $\boldsymbol{c} = \{-1, -1, -5\}$. Vypočítajte:

a) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, ak daný pravouhlý súradnicový systém je pravotočivý;

b) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$, ak daný pravouhlý súradnicový systém je ľavotočivý.

540. Zistite, či trojice vektorov:

a) $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$;

b) $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}$;

c) $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}$;

d) $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$;

e) $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$;

f) $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i}$,

sú ľavotočivé alebo pravotočivé, ak v pravouhlom pravotočivom súradnicovom systéme $\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{k} = \{0, 0, 1\}$.

541. K trojici vektorov $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ nájdite trojicu vektorov $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, pre ktoré platí

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_k = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \text{*)} \end{cases}$$

ak

a) $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_3 = \{0, 0, 1\}$;

b) $\boldsymbol{a}_1 = \{1, 4, 2\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{5, 1, -2\}$, $\boldsymbol{a}_3 = \{-2, 0, 6\}$.

542. Dokážte, že vektory $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -3\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$ sú komplanárne.

543. Nájdite objem rovnobežnostena určeného trojicou vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ak platí $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, $|\boldsymbol{c}| = 8$ a vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ zvierajú navzájom uhol 60°.

544. Daný je štvorsten $A = (1, -5, 4)$, $B = (0, 3, 1)$, $C = (-2, -4, 3)$, $D = (-4, 4, -2)$. Vypočítajte jeho objem a vzdialenosť vrchola A od steny BCD.

545. Zistite, aké sú podmienky, aby $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ bol nulový vektor.

546. Dokážte, že ak

a) vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú kolmé na vektor $\boldsymbol{c}$, platí $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$;

b) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sú komplanárne.

547. Pre aké vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ platí:

a) $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|$;

b) $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}| = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$;

c) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$.

548. Dané sú vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a čísla λ, μ. Dokážte rovnosti:

a) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$;

b) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$;

c) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot [(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})] = [\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})]^2$;

d) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d})] - \boldsymbol{d}[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})]$;

e) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})]) = \boldsymbol{a}^4 \cdot \boldsymbol{b}$, ak vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú navzájom kolmé.

---

*) Trojicu takýchto vektorov $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ nazývame *reciprokou* k danej trojici.

549. Dané sú vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$. Dokážte, že

a) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 \leqq \boldsymbol{a}^2 . \boldsymbol{b}^2$;

b) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) . [(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})] = 2\boldsymbol{a} . (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$;

c) $\boldsymbol{a} . [\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})] = \boldsymbol{a} . (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$;

d) $[\boldsymbol{a} . (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\,\boldsymbol{d} = [\boldsymbol{d} . (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\,\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{d} . (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]\,\boldsymbol{b} + [\boldsymbol{d} . (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\,\boldsymbol{c}$;

e) $[\boldsymbol{a} . (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2, & \boldsymbol{a} . \boldsymbol{b}, & \boldsymbol{a} . \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} . \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{b}^2, & \boldsymbol{b} . \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} . \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{c} . \boldsymbol{b}, & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}$;

f) $[\boldsymbol{a} . (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})][\boldsymbol{a} . (\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{e})] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} . (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}), & \boldsymbol{a} . (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{e}) \\ \boldsymbol{a} . (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}), & \boldsymbol{a} . (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{e}) \end{vmatrix}$.

4,7. Priamka v rovine

Deliaci pomer

Nech A, B, C sú tri body priamky, pre ktoré platí: $A \neq B$, $B \neq C$. *Deliacim pomerom* bodu C vzhľadom na body A, B nazývame číslo $\lambda(A, B, C)$, pre ktoré platí

$$C - A = \lambda(C - B)^{*)}.$$

Geometrický význam deliaceho pomeru $\lambda(A, B, C)$. Číslo $|\lambda|$ rovná sa podielu dĺžok úsečiek AC a BC. Číslo λ je záporné, ak bod C leží medzi bodmi A, B, a je kladné, ak C leží mimo úsečky AB.

Ak pri zvolenom súradnicovom systéme na priamke je $A = (x_1)$, $B = (x_2)$, $C = (x)$ a $\lambda(A, B, C) = \lambda$, potom platí

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2}, \tag{1}$$

z toho

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}. \tag{2}$$

Ak bod C je stredom úsečky AB, platí $\lambda = -1$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ak pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v rovine je $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x, y)$ a $\lambda(A, B, C) = \lambda$, potom pre súradnice bodu C platí

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \tag{3}$$

Ak bod C je stred úsečky AB, je $\lambda = -1$ a pre jeho súradnice platí

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{4}$$

---

*) Kvôli stručnosti namiesto $\lambda(A, B, C)$ budeme používať len znak λ. Ak pôjde o inú trojicu bodov, uvedieme to osobitne.

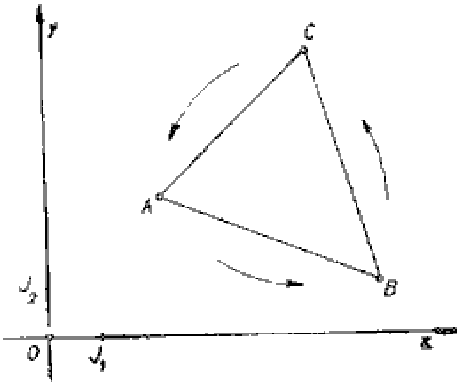
Orientovaný uhol polpriamok

Majme v pravouhlom súradnicovom systéme, ktorý je znázornený na *obr. 36*, daný trojuholník ABC, kde $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$. Trojuholník ABC, pri danom poradí vrcholov je kladne orientovaný, ak determinant

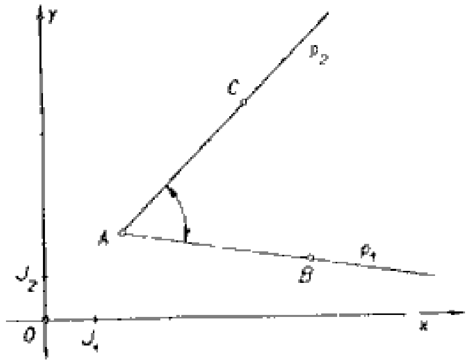
$$D = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

je kladný. Ak D je záporný, hovoríme, že trojuholník ABC je záporne orientovaný.

Poznámka. Niekedy sa kladná orientácia trojuholníka zavádza pomocou obiehania vrcholov v danom poradí proti smeru pohybu hodinových ručičiek a podobne záporná orientácia sa zavádza pomocou obiehania vrcholov v danom poradí v smere pohybu hodinových ručičiek.



Obr. 36



Obr. 37

Uvažujme v pravouhlom súradnicovom systéme polpriamky p_1, p_2, určené bodmi A, B, resp. A, C *(obr. 37)*. *Orientovaným uhlom polpriamok* p_1, p_2 nazývame uhol $\widehat{p_1p_2}$, pre ktorý platí;

$\widehat{p_1p_2}$ sa rovná dutému uhlu $\sphericalangle BAC$, ak trojuholník ABC je kladne orientovaný,

$\widehat{p_1p_2}$ sa rovná vypuklému uhlu $\sphericalangle BAC$, ak trojuholník ABC je záporne orientovaný,

$\widehat{p_1p_2}$ sa rovná nulovému uhlu, ak p_1 splýva s p_2,

$\widehat{p_1p_2}$ sa rovná priamomu uhlu, ak p_2 je opačná polpriamka k p_1.

Vlastnosti orientovaného uhla:

1. $0 \leq \widehat{p_1p_2} < 2\pi$ (5)
2. $\widehat{p_1p_2} = 2\pi - \widehat{p_2p_1}$ pre rôzne polpriamky p_1, p_2 (6)
3. $\widehat{p_1p_2} + \widehat{p_2p_3} + \ldots + \widehat{p_np_1} = 2k\pi$, (7)

kde p_1, p_2, ..., p_n sú polpriamky so spoločným počiatočným bodom a k je nezáporné celé číslo.

Uhlom α priamky p s osou o_x nazývame uhol, pre ktorý platí:

1. ak priamka je rovnobežná s osou o_x, potom $\alpha = 0$,
2. ak priamka pretína os o_x v bode P, potom $\alpha = \widehat{xp}$, kde x je polpriamka v osi o_x, ktorej x-ové súradnice všetkých bodov spĺňajú nerovnosť $x > x_P$ a p je polpriamka v danej priamke, ktorej y-ové súradnice všetkých bodov spĺňajú nerovnosť $y > 0$ (pozri *obr. 38*).

Úsečka a priamka

Parametrické rovnice. Majme v rovine dva rôzne body A, B. Uvažujme o rovnici

$$X = A + t(B - A). \tag{8}$$

Úsečka AB je množina všetkých bodov X, pre ktoré platí rovnica (8), kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$.
Polpriamka AB je množina všetkých bodov X, pre ktoré platí rovnica (8), kde $t \in \langle 0, \infty)$.
Priamka určená bodmi A, B je množina všetkých bodov X, pre ktoré platí rovnica (8), kde $t \in (-\infty, \infty)$.

Majme bod A a nenulový vektor $\boldsymbol{a}$. Rovnica

$$X = A + t\boldsymbol{a}, \tag{9}$$

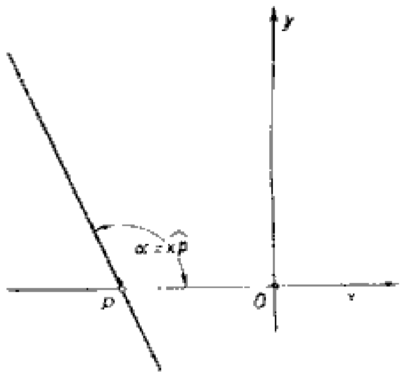
je rovnicou polpriamky pre $t \in \langle 0, \infty)$ a rovnicou priamky pre $t \in (-\infty, \infty)$. Číslo t v rovnici (9) nazývame *parametrom*. Vektor $\boldsymbol{a}$ nazývame *smerovým vektorom* polpriamky, resp. priamky.

Ak pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v rovine*) je $A = (a_1, b_1)$, $B = (a_2, b_2)$, $X = (x, y)$ a vektor $\boldsymbol{a} = \{m, n\}$, potom z rovnice (8), resp. (9) dostaneme

$$x = a_1 + t(a_2 - a_1), \qquad y = b_1 + t(b_2 - b_1), \tag{10}$$

resp.

$$x = a_1 + tm, \qquad y = b_1 + tn. \tag{11}$$



Obr. 38

Ak v rovniciach (10) je $t \in \langle 0, 1 \rangle$, rovnice (10) sú parametrickými rovnicami úsečky AB. Ak v rovniciach (10), resp. (11) je $t \in \langle 0, \infty)$, potom rovnice (10), resp. (11) sú parametrickými rovnicami polpriamky určenej bodmi A, B, resp. bodom A a vektorom $\boldsymbol{a}$. Ak v rovniciach (10), resp. (11) je $t \in (-\infty, \infty)$, potom rovnice (10), resp. (11) sú parametrickými rovnicami priamky určenej bodmi A, B, resp. bodom A a vektorom $\boldsymbol{a}$.

Smernica priamky. Ak vektor priamky je $\boldsymbol{a} = \{m, n\}$, kde $m \neq 0$, *smernicou* priamky nazývame číslo

$$k = \frac{n}{m}. \tag{12}$$

Pre smernicu priamky platí

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

kde α je uhol priamky s osou o_x. Uhol α sa rovná uhlu smerového vektora $\boldsymbol{a} = \{m, n\}$, $n \geq 0$, s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i} = \{1, 0\}$.

Ak priamka je daná dvoma bodmi $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, pričom $x_1 \neq x_2$, potom

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{13}$$

Úseky priamky. Nech priamka pretína os o_x v bode $P = (p, 0)$ a os o_y v bode $Q = (0, q)$. Čísla p a q nazývame *úsekmi*, ktoré vytína priamka na súradnicových osiach o_x, o_y.

Rovnice priamky. Okrem parametrických rovníc priamky poznáme aj iné tvary rovnice priamky:

1. *Všeobecný tvar rovnice priamky.* Každá priamka má rovnicu

$$ax + by + c = 0, \tag{14}$$

kde a, b, c sú reálne čísla a aspoň jedno z čísiel a, b je rôzne od nuly. Naopak, každá rovnica prvého stupňa $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, kde aspoň jedno z čísiel a_1, b_1 je rôzne od nuly, je rovnicou priamky.

Pre smernicu a úseky priamky (14) platí

$$\begin{aligned} k &= -a/b, \text{ ak } b \neq 0, \\ p &= -c/a, \text{ ak } a \neq 0, \\ q &= -c/b, \text{ ak } b \neq 0. \end{aligned} \tag{15}$$

*) V ďalšom budeme vždy uvažovať pravouhlý súradnicový systém v rovine. Pre prípad iného súradnicového systému to výslovne uvedieme.

Pre smerový vektor $\boldsymbol{a}$ priamky (14) platí

$$\boldsymbol{a} = k\{b, -a\},$$

kde k je ľubovoľné reálne číslo rôzne od nuly.

2. *Smernicový tvar* rovnice priamky je

$$y = kx + q, \tag{16}$$

kde k je smernica priamky a q je úsek na osi o_y.

Rovnicu priamky, ktorá je rovnobežná s osou o_y, nemožno napísať v smernicovom tvare.

3. *Úsekový tvar* rovnice priamky je

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \tag{17}$$

kde úseky p a q sú rôzne od nuly.

Rovnicu priamky, ktorá prechádza počiatkom alebo je rovnobežná s niektorou zo súradnicových osí pravouhlého súradnicového systému nemožno vyjadriť v úsekovom tvare.

4. Rovnica priamky danej *bodom* $A = (x_1, y_1)$ a *smernicou* k je

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{18}$$

5. Rovnica priamky danej *dvoma bodmi* $A = (x_1, y_1)$ a $B = (x_2, y_2)$ je

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1) \tag{19}$$

alebo

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

6. *Normálový tvar* rovnice priamky je

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0, \tag{21}$$

kde d je vzdialenosť priamky od počiatku súradnicového systému a $\alpha = \widehat{xn}$, pričom x je kladná časť osi o_x a n kolmica spustená z počiatku na priamku.

Všeobecný tvar rovnice priamky možno previesť na normálový tvar vynásobením číslom

$$\frac{\mu}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

kde $\mu = -1$, ak $c \geqq 0$ a $\mu = 1$, ak $c \leqq 0$.

7. Rovnica priamky *v polárnom súradnicovom systéme* je

$$\varrho \cos(\varphi - \alpha) = d, \tag{22}$$

kde d je vzdialenosť pólu od priamky, $\alpha = \widehat{pk}$, pričom k je kolmica spustená z pólu na priamku a p je polárna os *(obr. 39)*.

Príklad 1. Dokážme, že v trojuholníku s vrcholmi $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ pre ťažisko $T = (x_T, y_T)$ platí

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Riešenie. Ťažnica t_A *(obr. 40)* je určená bodmi A a S, kde pre stred $S = (x_S, y_S)$ úsečky BC platí

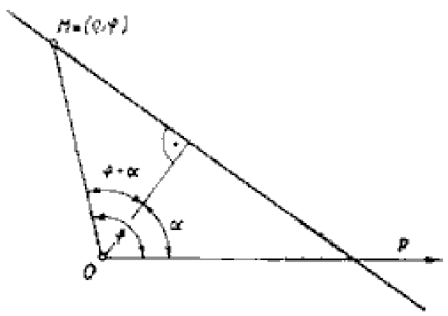
$$x_S = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_S = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Keďže ťažisko T trojuholníka delí každú ťažnicu trojuholníka v pomere 2 : 1, platí

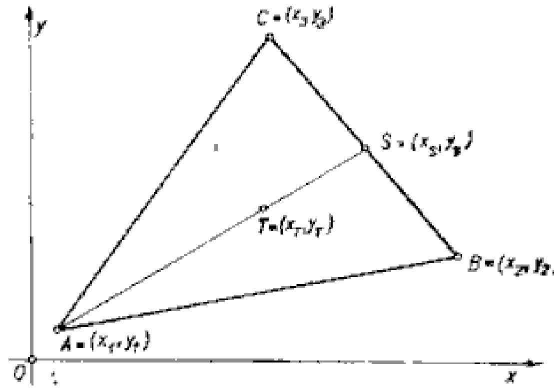
$$T - A = -2(T - S),$$

čiže $\lambda(A, S, T) = -2$. Zo vzťahov (3) pre súradnice ťažiska T dostaneme

$$x_T = \frac{x_1 + 2\,\dfrac{x_2 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y_T = \frac{y_1 + 2\,\dfrac{y_2 + y_3}{2}}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$



Obr. 39



Obr. 40

Príklad 2. Nájdime všeobecnú rovnicu a parametrické rovnice priamky, ktorá prechádza bodmi $A = (-2, 1)$, $B = (3, -4)$.

Riešenie. Podľa (19) rovnica priamky je

$$(3 + 2)(y - 1) = (-4 - 1)(x + 2).$$

Po úprave dostaneme všeobecný tvar rovnice priamky

$$x + y + 1 = 0.$$

Parametrické rovnice tejto priamky podľa (10) sú

$$x = -2 + 5t, \quad y = 1 - 5t,$$

kde t je ľubovoľné reálne číslo.

Príklad 3. Rovnica priamky je $2x - 3y + 6 = 0$. Napíšme ostatné tvary rovnice tejto priamky.

Riešenie. Keďže koeficient pri y je rôzny od nuly, rovnicu priamky môžeme po delení číslom -3 upraviť na smernicový tvar (16)

$$y = \frac{2}{3}x + 2.$$

Smernica priamky je $k = 2/3$ a úsek $q = 2$.

Keďže všetky koeficienty vo všeobecnom tvare rovnice danej priamky sú rôzne od nuly, môžeme danú rovnicu po delení číslom -6 upraviť takto:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1,$$

čo je úsekový tvar rovnice priamky. Úseky na súradnicových osiach sú $p = -3$, $q = 2$.

Normálový tvar rovnice priamky dostaneme tak, že danú rovnicu vynásobíme číslom $\mu/\sqrt{a^2+b^2} = -1/\sqrt{13}$. Normálový tvar rovnice danej priamky je

$$-\frac{2x}{\sqrt{13}} + \frac{3y}{\sqrt{13}} - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0.$$

Z toho vyplýva, že $\cos\alpha = -2/\sqrt{13}$, $\sin\alpha = 3/\sqrt{13}$ a vzdialenosť priamky od počiatku je $6/\sqrt{13}$.

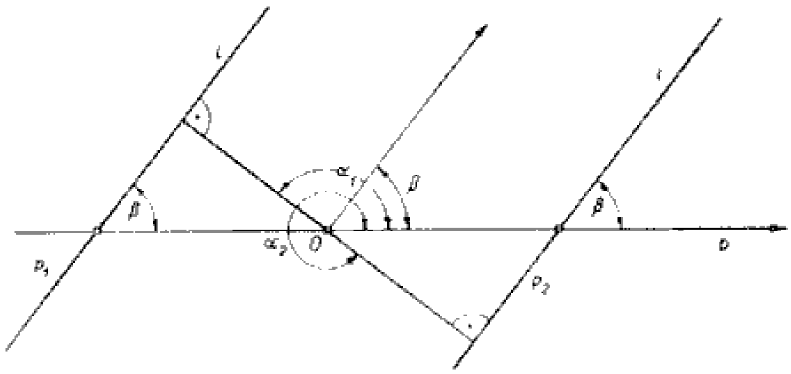
Parametrické rovnice danej priamky dostaneme napr. tak, že zvolíme $x = t$ a zo všeobecného tvaru danej priamky dostaneme $y = 2 + 2t/3$. Parametrické rovnice danej priamky sú

$$x = t, \quad y = 2 + 2t/3, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Príklad 4. Napíšme rovnicu priamky v polárnom súradnicovom systéme, ak
a) priesečník priamky s polárnou osou je $Q = (3, 0)$ a $\alpha = \pi/4$;
b) uhol priamky s polárnou osou je $\beta = \pi/4$ a dĺžka kolmice z počiatku na priamku sa rovná 4;
c) uhol priamky a polárnej osi je $\pi/3$ a priamka prechádza bodom $Q = (5, 0)$.

Riešenie. a) Z rovnice (22) dostaneme $3\cos(-\alpha) = d$. Z toho $d = 3\cos(-\pi/4) = 3\sqrt{2}/2$. Rovnica priamky je $\varrho\cos(\varphi - \pi/4) = 3\sqrt{2}/2$.

b) Podľa (22) $\varrho\cos(\varphi - \alpha) = d$, kde $\alpha = \widehat{pk}$. Pre uhol α platí $\alpha = \beta + \pi/2$ alebo $\alpha = \beta + 3\pi/2$ *(obr. 41)*.*)



Obr. 41

Ako riešenie sme dostali dve priamky dané rovnicami

$$\varrho\cos(\varphi - 7\pi/4) = 4,$$
$$\varrho\cos(\varphi - 3\pi/4) = 4.$$

c) Z rovnice (22) dostaneme $5\cos(-\alpha) = d$. Podobne ako v prípade b) dostaneme $\alpha_1 = 11\pi/6$, $\alpha_2 = 5\pi/6$. Druhé riešenie nevyhovuje, lebo by bolo $d < 0$. Z toho

$$d = 5\cos(-11\pi/6) = 5\cos(\pi/6) = 5\sqrt{3}/2,$$

Rovnica priamky je

$$\varrho\cos(\varphi - 11\pi/6) = 5\sqrt{3}/2.$$

550. Na číselnej osi sú dané body $A = (1)$, $B = (5)$. Nájdite súradnicu bodu P, ktorého deliaci pomer $\lambda(A, B, P)$ je

a) 2; b) -2; c) $1/2$.

551. Nájdite deliaci pomer $\lambda(A, B, C)$, ak body A, B, C sú:
a) $A = (3)$, $B = (7)$, $C = (3)$;
b) $A = (3)$, $B = (6)$, $C = (9)$;
c) $A = (-2)$, $B = (4)$, $C = (1)$;
d) $A = (5)$, $B = (-2)$, $C = (-3)$.

*) Ak l je polpriamka na danej priamke, ktorej body spĺňajú nerovnosť $0 \leqq \varphi < \pi$, potom podľa (7) platí $\widehat{pk} + \widehat{kl} + \widehat{lp} = 2\pi n$, $\alpha + \widehat{kl} + 2\pi - \beta = 2\pi n$, čižo $\alpha = 2\pi(n-2) + \beta + \widehat{lk}$. Keďže $\beta = \pi/4$, pre $\widehat{lk} = \pi/2$ je $\alpha_1 = \beta + \pi/2$ a pre $\widehat{lk} = 3\pi/2$ je $\alpha_2 = \beta + 3\pi/2$, kde v oboch prípadoch je $n = 2$.

552. Nájdite súradnice stredu úsečky AB, ak
a) $A = (4)$, $B = (8)$;
b) $B = (3)$, $A = (-2)$;
c) $A = (-6)$, $B = (-2)$;
d) $A = (2)$, $B = (-5)$.

553. Úsečku AB, kde $A = (-3)$, $B = (21)$, rozdeľte na tri rovnaké časti a nájdite deliace body.

554. Úsečku AB rozdeľujú body $C = (-2)$, $D = (1)$ na tri rovnaké časti. Nájdite body A, B.

555. Nájdite súradnice bodu C, ak $A = (4, 3)$, $B = (-3, 1)$ a pre deliaci pomer $\lambda(A, B, C)$ platí:
a) $\lambda = 3$;
b) $\lambda = -1/4$;
c) $\lambda = -2$;
d) $\lambda = 1/2$.

556. Úsečka AB má stred S. Nájdite jeden z bodov A, B, S ak
a) $A = (3, -6)$, $B = (-1, 2)$;
b) $B = (4, 2)$, $S = (7, -3)$;
c) $S = (1, 4)$, $A = (3, 8)$.

557. Nájdite bod B súmerný k bodu $A = (3, 4)$ podľa bodu $M = (6, 3)$.

558. Nájdite ostatné vrcholy rovnobežníka $ABCD$, ak sú dané:
a) dva susedné vrcholy $A = (3, 4)$, $B = (6, 8)$ a priesečník uhlopriečok $S = (4, -2)$;
b) tri vrcholy $A = (4, 1)$, $B = (6, 3)$, $C = (0, 9)$.

559. Nájdite:
a) súradnice vrcholov trojuholníka, ak stredy jeho strán sú $S_1 = (3, -2)$, $S_2 = (1, 6)$, $S_3 = (-4, 2)$;
b) stredy strán trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (8, 6)$, $B = (7, 0)$, $C = (3, 1)$.

560. Ukážte, že body A, B, C ležia na priamke a nájdite deliace pomery $\lambda(A, B, C)$, $\lambda(B, A, C)$, $\lambda(A, C, B)$, ak
a) $A = (6, -1)$, $B = (2, 3)$, $C = (4, 1)$;
b) $A = (3, 1)$, $B = (7, 5)$, $C = (-1, -3)$;
c) $A = (2, -1)$, $B = (-1, -4)$, $C = (3, 0)$.

561. Úsečku AB delí bod $C = (-2, 2)$ v pomere $3 : 4$ a bod $D = (9, -7)$ v pomere $2 : 3$. Nájdite koncové body úsečky.

562. Úsečka AB má koncové body $A = (9, 0)$, $B = (0, 6)$. Nájdite deliaci pomer bodu, ktorý je pätou kolmice spustenej z počiatku na úsečku AB.

563. Úsečku AB, $A = (3, -1)$, $B = (6, 5)$, rozdeľte na n rovnakých častí a nájdite deliace body, ak $n = 4$, $n = 5$.

564. Nájdite koncové body úsečky, ak
a) body $P = (3, 1)$, $Q = (2, 4)$ ju delia na tri rovnaké časti;
b) úsečka je rozdelená na päť rovnakých častí, prvý deliaci bod je $C = (4, -4)$, posledný deliaci bod je $F = (-1, 5)$.

565. Nájdite bod B úsečky AB, ak $A = (4, 3)$ a priesečníky X, Y priamky určenej bodmi A, B so súradnicovými osami pravouhlého súradnicového systému majú deliace pomery $\lambda(A, B, X) = 8/3$, $\lambda(A, B, Y) = -4$.

566. Priamka je určená bodmi $A = (6, -1)$ a $B = (2, -4)$. Nájdite na priamke taký bod D, pre ktorý $\varrho(D, C) = 5$ a $C = (-2, -7)$.

567. Na priamke určenej bodmi $A = (-2, -5)$ a $B = (8, 3)$ nájdite body C a D, pre ktoré platí $x_C = 13$, $y_D = 1$.

568. Daný je štvoruholník $ABCD$, kde $A = (-1, 9)$, $B = (5, -7)$, $C = (7, -7)$, $D = (7, 5)$. Nájdite priesečník P uhlopriečok štvoruholníka a jeho deliaci pomer $\lambda(B, D, P)$.

569. Nájdite vrchol D lichobežníka $ABCD$, ak

a) vrcholy sú $A = (-1, -2)$, $B = (2, 5)$, $C = (4, 2)$ a základňa AD je päťnásobkom základne BC;

b) vrcholy sú $A = (-2, -3)$, $B = (0, 2)$, $C = (8, 8)$ a základňa AD sa rovná 15.

570. Daný je trojuholník vrcholmi $A = (4, -6)$, $B = (-2, -2)$, $C = (0, 4)$. Nájdite dĺžku jeho ťažníc a súradnice ťažiska.

571. Ťažisko trojuholníka ABC leží na osi o_x, pričom $A = (3, -4)$, $B = (-6, 2)$ a tretí vrchol je na osi o_y. Nájdite vrchol C a ťažisko.

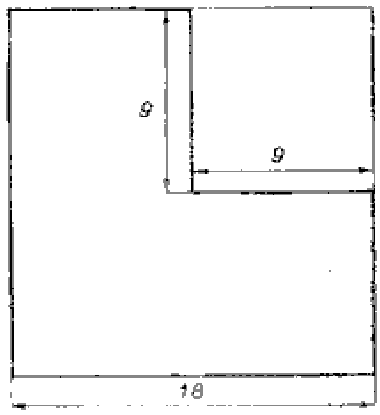
572. Body $A = (3, 4)$, $B = (7, 2)$, $C = (4, 6)$ sú hmotné body, ktorých hmotnosti sú v pomere $3 : 5 : 2$. Nájdite ťažisko tohto systému bodov.

573. Nájdite ťažisko homogénnej tyče zohnutej do tvaru pravého uhla, ak dĺžky zohnutých častí sú 3 a 7.

574. Nájdite ťažisko homogénneho drôtu zohnutého do tvaru trojuholníka, ak

a) strany trojuholníka sú 3, 4, 5;

b) vrcholy trojuholníka sú $A = (5, 1)$, $B = (8, -3)$, $C = (2, 5)$.



Obr. 42

575. Dokážte, že dva trojuholníky, ktorých vrcholy sú stredmi nesusedných strán pravidelného šesťuholníka, majú spoločné ťažisko.

576. Nájdite ťažisko štvoruholníkovej homogénnej dosky, ak jej vrcholy sú v bodoch $A = (5, 3)$, $B = (6, 6)$, $C = (11, 9)$ a $D = (13, 3)$.

577. Z dosky, ktorá má tvar štvorca o strane 18, je vyrezaný štvorec o strane 9 tak, ako ukazuje *obr. 42*. Nájdite ťažisko tohto útvaru.

578. Nájdite analytické vyjadrenie úsečky AB, ak

a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$;

b) $A = (-3, 2)$, $B = (4, 3)$;

c) $A = (-5, -3)$, $B = (-8, 1)$.

579. Zistite, či nasledujúce vzťahy sú analytickým vyjadrením úsečky alebo polpriamky. V prípade, že ide o analytické vyjadrenie úsečky, nájdite jej koncové body.

a) $x = 3 - 2t$,	$y = -7 + 12t$,	$0 \leq t \leq 10$;
b) $x = t$,	$y = 3 + 3t$,	$-1 \leq t$;
c) $x = -3$,	$y = t + 5$,	$t \leq 6$;
d) $x = 2 + 5t$,	$y = -1$,	$4 \leq t \leq -1$;
e) $x = -3 + t$,	$y = 2 - t$,	$t \leq 3$;
f) $x = t^2$,	$y = 6 - 2t^2$,	$-1 \leq t \leq 1$;
g) $x = 2 + \cos t$,	$y = 3 - \cos^2 (t/2)$,	$0 \leq t \leq \pi/2$.

580. Napíšte parametrické vyjadrenie rovníc strán a ťažníc trojuholníka ABC, ak $A = (0, 4)$, $B = (2, 7)$, $C = (5, 1)$.

581. Napíšte parametrické rovnice ramien uhla $\sphericalangle ABC$, ak $A = (3, 1)$, $B = (5, -3)$, $C = (1, 6)$.

582. Dané sú body $A = (4, -3)$, $B = (2, -1)$ a $C = (1, 9)$. Nájdite parametrické rovnice:

a) priamky určenej bodmi B, C;
b) priamky určenej bodom A a vektorom $B - C$;
c) polpriamky určenej bodmi A, C;
d) úsečky AB.

583. Body A, B, C, D ležia na priamke $x + 2y + 3 = 0$. Nájdite súradnice y_A, y_B, y_C, y_D, ak $x_A = 0$, $x_B = 1$, $x_C = -1$, $x_D = 2$.

584. Body A, B, C, D, E, F sú bodmi priamky $2x - 3y - 4 = 0$. Nájdite súradnice x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, ak $y_A = 0$, $y_B = 1$, $y_C = -8/3$, $y_D = -1$, $y_E = 3$, $y_F = -2$.

585. Rozhodnite, ktoré z daných bodov ležia na danej priamke, resp. polpriamke, ak

a) $A = (2, -1)$, $B = (1, 2)$, $C = (5, 4)$, $D = (0, 8)$ a $x = 1 + t$, $y = 2 - 3t$, kde t je ľubovoľné reálne číslo;
b) $A = (-2, 6)$, $B = (1, 2)$, $C = (2, -1)$, $D = (7, 1)$ a $4x + 3y - 10 = 0$;
c) $A = (7, 7)$, $B = (-3, 10)$, $C = (12, 1)$, $D = (7, 4)$ a $x = 2 + 5t$, $y = 7 - 3t$, $t > 0$.

586. Ktorý z vektorov $\boldsymbol{a} = \{-2, 0\}$, $\boldsymbol{b} = \{-4, -4\}$, $\boldsymbol{c} = \{2, -4\}$, $\boldsymbol{d} = \{1, 1\}$ je smerový vektor priamky $x = -2 + t$, $y = -2t$.

587. Napíšte parametrické rovnice a všeobecný tvar rovnice priamky určenej

a) bodom $T = (3, 4)$ a smerovým vektorom $\boldsymbol{a} = \{4, 5\}$;
b) bodom $P = (-1, 2)$ a smerovým vektorom $\boldsymbol{a} = \{3, -2\}$;
c) dvoma bodmi $A = (2, -1)$, $B = (3, -2)$;
d) bodom $P = (2, 2)$ a smernicou priamky $x - y + 2 = 0$;
e) bodom $P = (3, 4)$ a smernicou $k = 3/5$.

588. Nájdite rovnicu priamky, ktorá je určená niektorými z veličín k, α, p, q (k je smernica, α uhol priamky s osou o_x, p, q úseky priamky), ak

a) $\alpha = 30°$, $q = 3$;
b) $\alpha = 45°$, $q = -10$;
c) $\alpha = 135°$, $q = 2$;
d) $k = 2$, $q = -3$;
e) $k = -1/3$, $q = 0$;
f) $k = -3$, $q = 1$;
g) $p = 3$, $q = -4$;
h) $p = -1$, $q = -2$.

589. Napíšte úsekový tvar rovnice priamky a zostrojte ju, ak jej rovnica je:

a) $2x + 5y - 20 = 0$;
b) $3x + 4y + 7 = 0$;
c) $5x - 12y + 2 = 0$;
d) $2x - 3 = 0$;
e) $3x - 2y = 0$.

590. Nájdite priesečníky priamky so súradnicovými osami pravouhlého súradnicového systému, ak rovnice priamky sú:

a) $x = 3 - 2t$, $y = 7 + 3t$;
b) $4x - 7y + 14 = 0$;
c) $x = 3 + 5t$, $y = 2$;
d) $x = -1$, $y = 1 + t$.

Zostrojte tieto priamky.

591. Nájdite smernicu priamky, úseky na súradnicových osiach, ak jej rovnica je:

a) $3x - 4y + 10 = 0$;
b) $x = 3 - t, \quad y = 1 + 2t$;
c) $x - 2 = 0$;
d) $4x + 3y - 1 = 0$;
e) $x = 2t, \quad y = 3t$;
f) $6x - 5y = 0$.

Nájdite aj smernicové a úsekové rovnice týchto priamok (ak je to možné) a zostrojte ich.

592. Nájdite úseky p, q priamky, ktorá prechádza bodom M a zviera s osou o_x uhol α, ak

a) $M = (3, 4), \quad \alpha = 45°$;
b) $M = (-3, -1), \quad \alpha = 135°$;
c) $M = (1, 8), \quad \alpha = 60°$;
d) $M = (-3, 5), \quad \alpha = 30°$.

593. Nájdite smernicu a úseky p, q priamok určených bodmi C, D, ak

a) $C = (3, 4), \quad D = (-1, -3)$;
b) $C = (-3, 1), \quad D = (8, 6)$;
c) $C = (-1, -2), \quad D = (-3, -5)$.

Zostrojte tieto priamky.

594. Nájdite číslo b tak, aby bod $A = (-7, b)$ bol bodom priamky určenej bodmi $B = (2, 3), \quad C = (4, -3)$.

595. Nájdite súradnice bodov, v ktorých pretína súradnicové osi priamka:

a) $7x - 4y - 14 = 0$;
b) určená bodmi $A = (1, 9/2), \quad B = (-4, -3)$.

596. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom:

a) $A = (3, 1)$ a je rovnobežná s o_x;
b) $A = (4, 5)$ a je rovnobežná s o_y;
c) $A = (4, 2)$ a je rovnobežná s priamkou $x - 6y + 3 = 0$;
d) $A = (1, 4)$ a je rovnobežná s priamkou $x = y$.

597. Zistite, pri ktorých hodnotách konštanty k priamka $(k + 2)\,x + (k^2 - 9)\,y + 3k^2 - 8k + 5 = 0$

a) je rovnobežná s osou o_x; b) je rovnobežná s o_y; c) prechádza počiatkom. V každom prípade napíšte rovnicu priamky.

598. Zistite, ktorá z rovníc je normálovou rovnicou priamky, ak

a) $2x/5 - 3y/5 + 1 = 0$;
b) $3x/5 - 4y/5 - 12 = 0$;
c) $5x - 7y + 10 = 0$;
d) $2x - y - 1 = 0$;
e) $5x/13 + 12y/13 + 1 = 0$;
f) $5x/13 - 12y/13 - 10 = 0$;
g) $-y + 6 = 0$;
h) $2x - 7 = 0$.

Ak daná rovnica nie je normálová rovnica priamky, preveďte ju na normálový tvar.

599. Nájdite normálovú rovnicu priamky

a) $3x - 4y - 20 = 0$;
b) $y = 2x + 3$;
c) vytínajúcej na súradnicových osiach úseky $p = 4$, $q = -15/2$;
d) danej bodmi $A = (2, -1), \quad B = (4, 5)$;
e) danej bodom $A = (-2, -1)$ a vektorom $\boldsymbol{a} = \{-2, 1\}$.

600. Napíšte (ak je to možné) ostatné tvary rovnice priamky, ak daná priamka má rovnicu:

a) $2x + 3y - 12 = 0$;
b) $y = 3x - 7$;
c) $x - 2 = 0$;
d) $x/3 + y/4 = 1$;
e) $3x/5 - 4y/5 + 10 = 0$;
f) $x = 3 - 2t, \quad y = 4 + t$.

601. Nájdite vrchol C trojuholníka ABC, ak

a) $A = (5, 0)$, $B = (6, 5)$, obsah trojuholníka $P = 8$ a vrchol C leží na priamke $x = 4 - t$, $y = 4 + 2t$;

b) $A = (3, -2)$, $B = (4, -1)$, obsah trojuholníka $P = 1{,}5$ a vrchol C leží na priamke $3x - y - 6 = 0$.

602. Nájdite rovnice strán rovnobežníka, ak jeho dva susedné vrcholy sú $M = (0, 1)$, $N = (5, 4)$ a priesečník uhlopriečok $S = (6, 2)$.*)

603. Bodom $A = (6, -3)$ prechádza priamka tak, že bod A je stredom úsečky, ktorú vytínajú na priamke súradnicové osi. Nájdite rovnicu priamky.

604. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $M = (4, 3)$ v rovnakých vzdialenostiach od bodov $F = (-6, 1)$, $G = (12, -17)$.

605. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza:

a) bodom $M = (4, 5)$ a vytína na súradnicových osiach rovnaké úseky;

b) bodom $M = (3, 7/2)$ a vytvára spolu so súradnicovými osami trojuholník s obsahom $P = 21$.

606. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = (6, 5)$ a súčet jej úsekov na súradnicových osiach je 22.

607. Nájdite rovnice osí uhla pri vrchole A trojuholníka ABC, ak $A = (3, -1)$, $B = (7, 5)$, $C = (0, 1)$.

608. Z normálového tvaru rovnice priamky $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ odvoďte rovnicu priamky v polárnych súradniciach.

609. Priamka je daná rovnicou

a) $y = 3x + 2$;

b) $2x - 3y - 3 = 0$;

c) $x/4 + \sqrt{15}y/4 - 8 = 0$;

d) $x = 3 + 2t$, $y = -4 + t$.

Napíšte rovnicu priamky v polárnych súradniciach, ak pól polárneho súradnicového systému je totožný s počiatkom pravouhlého súradnicového systému a polárna os je totožná s kladnou časťou osi o_x.

610. Napíšte rovnicu priamky v polárnom súradnicovom systéme, ktorá je určená bodom $A = (\varrho_1, \varphi_1)$ a uhlom α normály a polárnej osi polárneho súradnicového systému.

611. Priamka je určená v polárnom súradnicovom systéme bodom $A = (\varrho_0, \varphi_0)$ a uhlom β, kde uhol β je uhol priamky s polárnou osou. Nájdite rovnicu tej priamky.

612. Napíšte rovnicu priamky, ktorá je v polárnom súradnicovom systéme daná bodmi $A_1 = (\varrho_1, \varphi_1)$, $A_2 = (\varrho_2, \varphi_2)$.

613. Napíšte rovnicu priamky v polárnych súradniciach, ak

a) $\beta = \pi/4$ je uhol priamky s polárnou osou a $p = 4$ je vzdialenosť priamky od pólu;

b) $\alpha = 135°$ je uhol, ktorý zviera normála priamky s polárnou osou a $a = 3$ je vzdialenosť pólu a priesečníka priamky s polárnou osou;

c) je určená bodmi $A = (2, \pi/6)$, $B = (5, \pi/3)$;

d) je určená bodom $A = (4, \pi/6)$ a uhol priamky s polárnou osou je $\gamma = 5\pi/6$.

614. Aký úsek vytína na polárnej osi polárneho súradnicového systému priamka

a) $\varrho \cos (\varphi + \pi/3) = 3$; b) $\varrho \cos (\varphi + 2\pi/3) = -1$; c) $\varrho \cos (\varphi + \pi/6) = 6$.

*) Kvôli stručnosti v ďalšom používame výrazy rovnica strany, ťažnice, výšky atď. a rozumieme tým rovnicu priamky prechádzajúcej uvedenou stranou, ťažnicou, výškou atď.

4,8. Vzájomná poloha bodov a priamok v rovine

Uhol priamok

Majme dve priamky p_1, p_2, ktoré majú smerové vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$. *Uhlom priamok* p_1, p_2 nazývame uhol $\varphi = \sphericalangle\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$.

Poznámka. Ak namiesto smerového vektora $\boldsymbol{a}_1$ uvažujeme k nemu opačný smerový vektor, pre uhol dvoch priamok dostaneme $\varphi' = \sphericalangle\, -\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ a platí

$$\varphi + \varphi' = \pi$$

(pozri *obr. 43*).

Vlastnosti

1. Uhol priamok je nezávislý od ich poradia, t. j.

$$\varphi = \sphericalangle\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 = \sphericalangle\, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 .$$

2. Pre uhol priamok platí $0 \leqq \varphi \leqq \pi$.
3. Pre uhol priamok, ktoré majú smerové vektory $\boldsymbol{a}_1 = \{m_1, n_1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{m_2, n_2\}$, platí

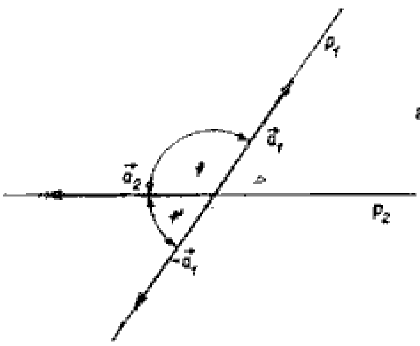
$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\boldsymbol{a}_2|}, \qquad \sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\boldsymbol{a}_2|}, \tag{1}$$

alebo

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{|m_1n_2 - m_2n_1|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}} . \tag{2}$$

4. Ak všeobecné rovnice priamok sú

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$



Obr. 43

tak pre ich uhol φ platí

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{a_1a_2 + b_1b_2}, \text{ ak } a_1a_2 + b_1b_2 \neq 0 \\ &\text{a} \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}, \text{ ak } a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

5. Ak priamky p_1, p_2 majú smernice k_1, k_2, pre ich uhol platí

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}, \text{ pre } k_1k_2 \neq -1 \\ &\text{a} \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}, \text{ pre } k_1k_2 = -1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ak uhol φ priamok sa rovná $\pi/2$, potom priamky sú navzájom kolmé. Ak uhol φ sa rovná nule alebo π, potom priamky sú rovnobežné.

6. *Podmienky kolmosti* dvoch priamok sú

$$\begin{aligned} m_1m_2 + n_1n_2 &= 0 \\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0 \\ k_1k_2 &= -1. \end{aligned} \tag{5}$$

7. *Podmienky rovnobežnosti* dvoch priamok sú

$$\begin{aligned} m_1 : n_1 &= m_2 : n_2 \\ a_1 : b_1 &= a_2 : b_2 \\ k_1 &= k_2, \end{aligned} \tag{6}$$

kde čísla $m_1, n_1, m_2, n_2, a_1, b_1, a_2, b_2, k_1, k_2$ majú význam ako vo vzťahoch (2), (3), (4). Uvedené podmienky rovnobežnosti a kolmosti dvoch priamok sú nutné a postačujúce podmienky.

Priesečník priamok

Priesečník priamok je ich jediný spoločný bod. Ak priamky majú priesečník, nájdeme ho riešením rovníc týchto priamok.

1. Ak rovnice priamok sú

$$x = a_1 + m_1 t, \quad y = b_1 + n_1 t,$$
$$x = a_2 + m_2 s, \quad y = b_2 + n_2 s,$$

parametre t a s priesečníka priamok nájdeme riešením systému

$$\left.\begin{aligned} m_1 t - m_2 s &= a_2 - a_1 \\ n_1 t - n_2 s &= b_2 - b_1 . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Tento systém má jediné riešenie pre t, s, ak determinant systému $-m_1 n_2 + n_1 m_2 \neq 0$, čiže $m_1 : n_1 \neq m_2 : n_2$, t. j. priamky nie sú rovnobežné alebo nesplývajú.

2. Ak rovnice priamok sú

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

súradnice priesečníka priamok nájdeme riešením tohto systému. Systém (8) má jediné riešenie vtedy a len vtedy, ak jeho determinant $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, čiže $a_1 : b_1 \neq a_2 : b_2$, t. j. priamky nie sú rovnobežné alebo nesplývajú.

Vzájomná poloha dvoch priamok

Dve priamky v rovine sú *rôznobežky*, *rovnobežky* alebo *splývajú*. Ak priamky majú rovnice (8), potom

1. sú rôznobežky, ak

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

2. sú rovnobežky, ak

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

a aspoň jeden z determinantov

$$\begin{vmatrix} c_1, & b_1 \\ c_2, & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix}$$

je rôzny od nuly;

3. priamky splývajú, ak všetky uvedené determinanty sa rovnajú nule, t. j. $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$.

Nutná a postačujúca podmienka, aby tri priamky

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

prechádzali jediným bodom, je

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Zväzok priamok

Množinu všetkých priamok, ktoré prechádzajú daným bodom alebo sú navzájom rovnobežné, nazývame zväzkom priamok.

Rovnica zväzku priamok určeného dvoma rôznymi priamkami s rovnicami (8) je

$$\lambda_1(a_1 x + b_1 y + c_1) + \lambda_2(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0,$$

kde λ_1, λ_2 sú ľubovoľné čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly.

Vzdialenosť bodu od priamky

Majme priamku p a ľubovoľný bod B. Uvažujme priamku, ktorá prechádza bodom B a je kolmá na priamku p. Spoločný bod týchto dvoch priamok označme C. *Vzdialenosťou bodu B od priamky p* nazývame vzdialenosť bodov B a C a označujeme ju $\varrho(B, p)$.

Ak rovnica priamky p je $X = A + \boldsymbol{a}t$ a je daný bod B, potom platí

$$\varrho(B, p) = \frac{|(A - B) \cdot \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|}, \tag{9}$$

kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú navzájom kolmé nenulové vektory.

Ak v pravouhlom súradnicovom systéme rovnica priamky p je $ax + by + c = 0$ a bod $B = (x_1, y_1)$, platí

$$\varrho(B, p) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{10}$$

Odchýlka bodu od priamky

Majme priamku p danú rovnicou

$$X = A + \boldsymbol{a}t,$$

resp.

$$X = A + (B - A)\,t,$$

kde A, B sú body priamky p a $\boldsymbol{a} = \{m, n\}$ je smerový vektor priamky. Nech $\boldsymbol{b} = \{-n, m\}$ je nenulový vektor kolmý na $\boldsymbol{a}$, resp. na vektor $B - A$. Množina všetkých bodov X roviny určená nerovnosťou

$$(X - A) \cdot \boldsymbol{b} > 0, \tag{11}$$

resp.

$$(X - A) \cdot \boldsymbol{b} < 0, \tag{12}$$

je jedna z polrovín, na ktoré daná priamka rozdeľuje rovinu.

Ak rovnica priamky p je

$$ax + by + c = 0,$$

z nerovnosti (11), resp. (12), pre polroviny vyplýva

$$ax + by + c > 0, \tag{13}$$

$$ax + by + c < 0. \tag{14}$$

Nech priamka p neprechádza počiatkom pravouhlého súradnicového systému. Polrovinu, ktorá neobsahuje počiatok pravouhlého súradnicového systému, nazývame *kladnou polrovinou*, a tú polrovinu, ktorá obsahuje počiatok, nazývame *zápornou polrovinou*. Ak priamka p prechádza počiatkom súradnicového systému, potom jednu z oboch polrovín volíme za kladnú polrovinu a druhú za zápornú polrovinu.

Odchýlkou bodu M od priamky p nazývame číslo $\delta(M, p)$, pre ktoré platí

$$\delta(M, p) = \begin{cases} \varrho(M, p), & \text{ak } M \text{ leží v kladnej polrovine,} \\ 0, & \text{ak } M \text{ leží na priamke } p, \\ -\varrho(M, p), & \text{ak } M \text{ leží v zápornej polrovine.} \end{cases}$$

Ak rovnica priamky je $X = A + \boldsymbol{a}t$ a vektor kolmice spustenej z počiatku na priamku p je $\boldsymbol{b}$, pre odchýlku bodu M platí

$$\delta(M, p) = \frac{(M - A) \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}. \tag{15}$$

Ak priamka p má rovnicu $ax + by + c = 0$, pre odchýlku bodu $M = (x_1, y_1)$ platí

$$\delta(M, p) = \mu\,\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{16}$$

kde $\mu = -1$, ak $c \geqq 0$ a $\mu = 1$, ak $c \leqq 0$.

Príklad 1. Nájdime uhol priamok, ak ich rovnice sú

$$5x + y - 20 = 0,$$
$$3x - 2y + 7 = 0.$$

Riešenie. Podľa vzťahu (3) pre uhol φ priamok platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{a_1a_2 + b_1b_2} = \frac{|5(-2) - 3 \cdot 1|}{5 \cdot 3 - 1 \cdot 2} = 1.$$

Z toho $\varphi = 45°$. Druhý uhol priamok φ' podľa poznámky na str. 130 je $\varphi' = 135°$.

Príklad 2. Daná je priamka p rovnicou $x - 2y - 1 = 0$. Napíšme rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = (-3, 2)$ a je:

a) rovnobežná s priamkou p;
b) kolmá na priamku p.

Riešenie. a) Priamka p má smernicu $k = 1/2$. Priamka s ňou rovnobežná má podľa (6) smernicu $k_1 = k$. Rovnica priamky prechádzajúcej bodom A a rovnobežnej s priamkou p je

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3),$$

alebo po úprave

$$x - 2y + 7 = 0.$$

b) Priamka kolmá na priamku p má podľa (5) smernicu $k_2 = -1/k = -2$. Rovnica priamky určenej bodom A a kolmej na priamku p je

$$y - 2 = -2(x + 3),$$

alebo po úprave

$$2x + y + 4 = 0.$$

Príklad 3. Nájdime priesečník P priamok p a q, keď p má parametrické rovnice $x = 1 + 2t$, $y = 5 + 6t$ a parametrické rovnice priamky q sú $x = -1 + s$, $y = -4 + s$.

Riešenie. Hodnoty parametrov t a s, pre ktoré dostaneme súradnice priesečníka P, dostaneme riešením rovníc

$$1 + 2t = -1 + s,$$
$$5 + 6t = -4 + s.$$

Ich riešením je $t = -7/4$, $s = -3/2$. Súradnice priesečníka dostaneme, ak dosadíme $t = -7/4$ do rovníc priamky p alebo, ak dosadíme $s = -3/2$ do rovníc priamky q. Po dosadení hodnoty $t = -7/4$ dostaneme

$$x = 1 + 2(-7/4) = -5/2, \qquad y = 5 + 6(-7/4) = -11/2.$$

Priesečník je $P = (-5/2, -11/2)$.

Príklad 4. Strany p, q, r trojuholníka sú dané rovnicami

$$x + 2y - 3 = 0,$$
$$2x + y - 1 = 0,$$
$$3x - y - 9 = 0.$$

Nájdime rovnicu výšky v_p na stranu p.

Riešenie. Priamka, ktorá je určená výškou v_p, prechádza priesečníkom strán q, r, preto patrí do zväzku priamok $2x + y - 1 = 0$ a $3x - y - 9 = 0$, ktorý má rovnicu

$$\lambda_1(2x + y - 1) + \lambda_2(3x - y - 9) = 0.$$

Úpravou dostaneme

$$(2\lambda_1 + 3\lambda_2)\, x + (\lambda_1 - \lambda_2)\, y - \lambda_1 - 9\lambda_2 = 0.$$

Z podmienky kolmosti výšky v_p a priamky p dostaneme podľa (5)

$$1(2\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2(\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

Z toho

$$\lambda_1/\lambda_2 = -1/4.$$

Po dosadení $\lambda_2 = -4\lambda_1$ do rovnice zväzku a vydelení číslom $\lambda_1 \neq 0$ dostaneme

$$1(2x + y - 1) - 4(3x - y - 9) = 0$$

a po úprave

$$2x - y - 7 = 0,$$

čo je rovnica výšky v_b.

Príklad 5. Nájdime rovnicu osi uhla priamok p_1, p_2, ktorých rovnice sú $x + 2y - 10 = 0$, $3x - 6y - 14 = 0$, ak uhol obsahuje bod $A = (2, -4)$.

Riešenie. Vypočítajme odchýlku bodu A od oboch priamok:

$$\delta(A, p_1) = \frac{2 + 2(-4) - 10}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{-16}{\sqrt{5}} < 0,$$

$$\delta(A, p_2) = \frac{3 \cdot 2 - 6(-4) - 14}{\sqrt{9 + 36}} = \frac{16}{3\sqrt{5}} > 0.$$

Ak $M = (x, y)$ je bod hľadanej osi uhla, ktorý obsahuje bod A, platí

$$\delta(M, p_1) = -\delta(M, p_2),$$

keďže odchýlky bodu A od oboch priamok majú rôzne znamienka. Z toho vyplýva

$$\frac{x + 2y - 10}{\sqrt{1 + 4}} = -\left(\frac{3x - 6y - 14}{\sqrt{9 + 36}}\right).$$

Po úprave

$$\frac{x + 2y - 10}{\sqrt{5}} = -\frac{3x - 6y - 14}{3\sqrt{5}},$$

alebo

$$3x - 22 = 0.$$

Príklad 6. Nájdime vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok p_1, p_2 daných rovnicami $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y - 9 = 0$. Rozhodnime, či priamka p_2 a počiatok pravouhlého súradnicového systému ležia v tej istej polrovine vzhľadom na priamku p_1.

Riešenie. Vzdialenosť rovnobežiek nájdeme ako vzdialenosť ľubovoľného bodu druhej rovnobežky od prvej. Bod $P = (0, 3/2)$ je bodom priamky p_2. Pre odchýlku bodu P od p_1 podľa (16) platí

$$\delta(P, p_1) = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3/2 - 6}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{-3\sqrt{13}}{26}.$$

Vzdialenosť rovnobežiek je

$$|\delta(P, p_1)| = \frac{3\sqrt{13}}{26}.$$

Keďže $\delta(P, p_1) < 0$, podľa definície odchýlky je počiatok súradnicového systému a priamka p_2 v tej istej polrovine vzhľadom na priamku p_1.

615. Ktoré z priamok $p_1: 3x/2 - y + 7/2 = 0$, $p_2: 3x - 2y - 9/2 = 0$, $p_3: 3x + 2y - 5/2 = 0$, $p_4: x + 3y/2 - 3 = 0$ sú navzájom rovnobežné a ktoré navzájom kolmé?

616. Nájdite rovnicu priamky, ktorá je určená bodom $M = (4, -7)$ a je rovnobežná s priamkou

a) $4x - 11y + 3 = 0$; d) $2x - 5 = 0$;
b) $x = 3 - 2t$, $y = 7 + 9t$; e) $4y + 5 = 0$;
c) $x/3 + y/4 = 1$; f) $y = -x/7 + 9/7$.

617. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $P = (2, 5)$ a je rovnobežná

a) s vektorom $\boldsymbol{a} = \{4, 3\}$;
b) s priamkou $5x - 8y + 6 = 0$;
c) s vektorom určeným bodmi $A = (3, 1)$, $B = (5, 4)$.

618. Napíšte rovnice priamok, ktoré prechádzajú vrcholmi trojuholníka

a) $A = (2, -2)$, $B = (-4, 5)$, $C = (-6, 0)$;
b) $A = (4, -3)$, $B = (-2, 3)$, $C = (-3, -4)$;
a sú rovnobežné s protiľahlými stranami trojuholníka.

619. Nájdite rovnicu priamky, ktorá je rovnobežná s danými priamkami a ľubovoľný úsek medzi nimi rozdeľuje na polovicu, ak

a) $2x + 5y - 7 = 0$ $4x + 10y + 1 = 0$;
b) $x + 5y - 3 = 0$, $x + 5y + 6 = 0$;
c) $3x + 5y - 10 = 0$, $3x + 5y + 1 = 0$.

620. Napíšte rovnicu kolmice na danú priamku, ak

a) daná priamka je určená bodmi $K = (3, 7)$, $L = (0, 4)$ a kolmica prechádza bodom L;
b) daná priamka prechádza počiatkom a päta kolmice je $M = (4, -2)$.

621. Nájdite rovnice výšok trojuholníka, ak jeho vrcholy sú:

a) $A = (3, 3)$, $B = (5, 5)$, $C = (7, 1)$;
b) $A = (2, 2)$, $B = (0, -1)$, $C = (3, -3)$.

622. Nájdite rovnice priamok prechádzajúcich bodom $A = (4, 3)$, ktoré sú rovnobežné alebo kolmé na priamku:

a) $7x - 11y + 3 = 0$;
b) $x = 3 - 3t$, $y = 2 + 5t$;
c) danú bodom $B = (-2, 1)$ a vektorom $\boldsymbol{a} = \{-3, 2\}$;
d) $y = -x/2 + 2$.

623. Vypočítajte uhol priamok, ak ich rovnice sú:

a) $2x + y = 0$, $y = 3x - 4$;
b) $x + 2y - 7 = 0$, $2x - y + 11 = 0$;
c) $x/a - y/b = 1$, $x/b + y/a = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;
d) $y = 2x - 3$, $y = x/2 + 1$;
e) $x = 3 - 2t$, $y = 7 + 3t$; $x = 8 + t$, $y = 1 + 5t$;
f) $x = 2 - 3t$, $y = 1 + 4t$; $x = 3 - 4t$, $y = 8 - t$.

624. Nájdite vnútorné uhly trojuholníka, ktorého strany ležia na priamkach:

a) $7x - y - 10 = 0$, $4x - 3y - 12 = 0$, $x - 7y + 3 = 0$;
b) $x + 7y + 11 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$, $3x + y - 7 = 0$.

625. Nájdite rovnice strán a uhlopriečok štvorca, ak

a) bod $D = (1, 1)$ je vrcholom štvorca a rovnica jednej uhlopriečky je $7x - y - 31 = 0$;

b) body $B = (1, 4)$ a $D = (8, 3)$ sú jeho protiľahlé vrcholy;
c) bod $S = (3, 2)$ je stredom štvorca a jeho jedna strana leží na priamke $x - 2y + 16 = 0$.

626. Strana a pravouhlého rovnoramenného trojuholníka má rovnicu $2x - 3y + 1 = 0$ a vrchol $A = (5, 0)$. Napíšte rovnice strán b a c.

627. Svetelný lúč prechádza bodom $A = (3, 2)$, odráža sa od priamky $x + y + 1 = 0$ a dopadá do bodu $B = (2, 0)$. Nájdite rovnicu dráhy dopadajúceho a odrazeného svetelného lúča.

628. Svetelný lúč sa šíri po priamke $2x - y + 7 = 0$. Pri dopade na priamku $2x - 3y + 10 = 0$ sa lúč odráža. Nájdite rovnicu priamky odrazeného lúča.

629. Nech $A = (3, 0)$, $B = (5, 8)$ sú vrcholy trojuholníka a $S = (4, 3)$ je priesečník jeho výšok. Nájdite rovnice strán trojuholníka.

630. Zistite, či polpriamka pretína úsečku CD, ak

a) $x = 4 + t, \quad y = 2 - 3t, \quad t < 0, \quad C = (0, 2), \quad D = (4, 6)$;
b) $x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad t > 0, \quad C = (6, 1), \quad D = (-1, 10)$;
c) $x = 2 - t, \quad y = 3 - 2t, \quad t < 0, \quad C = (0, 2), \quad D = (2, 0)$.

Ak sa polpriamka a úsečka CD pretínajú, nájdite ich priesečník.

631. Zistite, či polpriamky

a) $x = 4 - 3t, \quad y = 2 + 5t, \quad t \geq 0$,
b) $x = 1 + 2t, \quad y = 3 + t, \quad t \leq 0$,
c) $x = 3 - 2t, \quad y = 2 + t, \quad t \leq 0$

pretínajú súradnicové osi. Nájdite tieto priesečníky.

632. Zistite, či polpriamka $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $t \geq 0$ pretína priamku $3x - y + 7 = 0$. Nakreslite danú polpriamku a priamku.

633. Nájdite také čísla a, b, aby

a) priamka $ax + by = 0$ pretínala úsečku $x = 3 - 2t$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$;
b) bod $A = (-4, -3)$ bol priesečníkom priamok $x = 3 - at$, $y = 3 + t$; $x = t$, $y = bt$.

634. Zistite, či sa uvedené priamky pretínajú v jednom bode:

a) $3x + y - 7 = 0$, $x + 2y - 9 = 0$, $x - y + 3 = 0$;
b) $x = 2 + t$, $y = 2 - 2t$; $5x - 3y + 7 = 0$; $x = 8 - 7t$, $y = 3 + t$;
c) $6x - y + 10 = 0, \quad x + 3y - 7 = 0, \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - t$.

635. Zistite vzájomnú polohu priamok:

a) $55x - 12y - 24 = 0, \quad 33x + 8y + 92 = 0$;
b) $\sqrt{3}x - y + 4 = 0, \quad 3x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$;
c) $x = 1 - 4t, \quad y = 3 + 2t; \quad x = 5 + 2t, \quad y = 1 - t$;
d) $x = 3 - 7t, \quad y = 1 - 2t; \quad x = 5 - 2t, \quad y = 3 + t$;
e) $x = 3 + 4t, \quad y = -2 + 7t; \quad 7x + 8y - 112 = 0$;
f) $x = 8 + 5t, \quad y = 6 - 10t; \quad y = -2x + 3$.

636. Nájdite súradnice vrcholov trojuholníka, ktorého strany ležia na priamkach:

a) $2x + y - 8 = 0, \quad x + 2y - 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0$;
b) $x - y - 2 = 0, \quad 6x - y - 22 = 0, \quad x = 1 + 2t, \quad y = -6 + 7t$.

637. Nájdite vrcholy trojuholníka, ak

a) stredy strán trojuholníka sú $S_1 = (-1, 0)$, $S_2 = (3, 2)$, $S_3 = (5, -2)$;
b) dva vrcholy trojuholníka sú $A = (-4, 3)$, $B = (4, -1)$ a priesečník výšok trojuholníka je $M = (3, 3)$.

638. Dokážte, že daná dvojica priamok sú rôznobežky a vypočítajte súradnice ich priesečníka, ak

a) $x + 5y - 35 = 0$, $3x + 2y - 27 = 0$;
b) $8x - 33y - 19 = 0$, $12x - 55y - 19 = 0$;
c) $3x + 6 = 0$, $y - 2 = 0$.

639. Zistite, pre aké hodnoty a, b sú priamky p_1, p_2 rovnobežné, rôznobežné, kolmé, splývajú, ak ich rovnice sú:

a) $3x - ay + 4 = 0$, $6x + 5y - b = 0$;
b) $ax + 6y + b = 0$, $2x + ay - 4 = 0$;
c) $x = 3 + at$, $y = b + 3t$; $2x + by - 3 = 0$.

640. Pre ktoré čísla a, b, c sú priamky $ax + 2by + 1 - c = 0$, $(1 - a)x + (1 - 2b)y + c = 0$

a) splývajúce; b) rovnobežné; c) rôznobežné.

641. Nájdite kolmý priemet bodu $A = (3, 5)$ na priamku

a) $4x - 3y + 1 = 0$;
b) danú dvoma bodmi $C = (2, -1)$, $D = (-2, 3)$;
c) $x = -1 + 2t$, $y = -2 + t$.

642. Daná je priamka p a bod P. Nájdite bod Q symetrický k bodu P vzhľadom na priamku p, ak

a) $P = (-3, 6)$ a priamka je daná rovnicami $x = 5t$, $y = 1 - 4t$;
b) $P = (1, -2)$ a priamka je určená bodmi $A = (11, -13)$, $B = (4, -9)$.

643. Nájdite rovnice výšok trojuholníka a ich priesečník, ak

a) vrcholy trojuholníka sú $A = (3, 4)$, $B = (0, 2)$, $C = (4, 5)$;
b) rovnice strán trojuholníka sú $x + 5y - 30 = 0$, $x + 3y - 44 = 0$, $4x - y + 6 = 0$;
c) rovnice strán trojuholníka sú $x = t$, $y = 3 + 2t$; $x = t$, $y = 7/5 - t/5$; $x = t$, $y = 3 + 3t/2$.

644. Nájdite rovnice strán trojuholníka ABC, ak

a) $C = (-5, -5)$, rovnica ťažnice t_a je $x - 3y - 22 = 0$ a výšky v_b je $2x - y + 14 = 0$;
b) $B = (1, -5)$, rovnica výšky v_a je $4x + 3y - 28 = 0$ a osi uhla pri vrchole C je $2x - y + 2 = 0$;
c) $A = (1, -7)$, rovnica ťažnice t_a je $3x - 2y + 12 = 0$ a výšky v_c je $3x + 2y - 12 = 0$.

645. Nájdite rovnice strán trojuholníka ABC, ak

a) $B = (-3, 1)$ a rovnice výšok sú $3x - 5y + 17 = 0$, $8x - 3y + 38 = 0$;
b) $A = (5, -4)$ a rovnice ťažníc sú $2x + y = 0$, $x + 1 = 0$;
c) $C = (8, -5)$ a rovnice výšky a osi uhla pri vrchole B sú $7x + y - 4 = 0$, $x - 7y + 28 = 0$.

646. V trojuholníku ABC, ktorý má priesečník výšok V je daná rovnica strany AB $3x - 5y + 10 = 0$, rovnica výšky v_a $3x - 4y + 2 = 0$, rovnica výšky v_b $2x - 7y - 12 = 0$. Nájdite rovnice strán BC, CA a výšky v_c trojuholníka.

647. Nájdite vrcholy rovnobežníka, ak jeho dve strany sú určené priamkami $x = 2 - 3t$, $y = -2 + 8t$; $x = 2 + t$, $y = -2t$ a uhlopriečka leží na priamke $3x + 2y + 8 = 0$.

648. Rovnobežník $ABCD$ má protiľahlé vrcholy $A = (3, 2)$, $C = (-1, 1)$, stranu AB rovnobežnú s vektorom $\boldsymbol{a} = \{1, 0\}$ a uhlopriečku BD rovnobežnú s vektorom $\boldsymbol{b} = \{3, 2\}$. Nájdite vrcholy B, D rovnobežníka.

649. Nájdite vrcholy a rovnice zvyšných strán obdĺžnika, ak rovnica jednej strany je $2x - 3y + 4 = 0$, rovnica druhej strany je $x = 2t$, $y = 1 - 3t$ a:

a) jeden z vrcholov je $A = (3, -2)$;
b) rovnica jednej uhlopriečky je $x = 1 - t$, $y = 7t$.

650. Nájdite vzdialenosť bodu D od priamky, ak

a) $D = (4, 3)$, $4x - 3y + 8 = 0$;
b) $D = (0, 0)$, $y = 9x/12 + 10/12$;
c) $D = (7, 8)$, $2x - 7 = 0$;
d) $D = (1, 3)$, $x = 3 + 2t$, $y = 4 - t$;
e) $D = (-5, 6)$, $x = 3$, $y = 5 + 2t$;
f) $D = (2, 7)$, $8x/11 - 15y/11 = 1$.

651. Vypočítajte dĺžku výšok trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (6, -2)$, $B = (-4, 2)$, $C = (4, 3)$.

652. Vypočítajte vzdialenosť priamky $x = 2 + 4t$, $y = 4 + 3t$ od priamky, ktorá je rovnobežná s danou priamkou a pretína os o_x v bode $B = (5/2, 0)$.

653. Nájdite vzdialenosť rovnobežiek:

a) $3x - 2y + 20 = 0$; $6x - 4y + 7 = 0$;
b) $x = 3 - 2t$, $y = 1 + t$; $x + 2y - 10 = 0$;
c) $x = 1 - t$, $y = 3 + 2t$; $x = 10 + 2t$, $y = 7 - 4t$;
d) $x = 3 - 4t$, $y = 2 + t$; $x = -4t$, $y = 1 + t$.

654. Nájdite rovnice priamok, ktoré prechádzajú bodom $P = (6, 3)$ a ich vzdialenosť od bodu $Q = (2, 6)$ je:

a) $d = 2$; b) $d = 5$; c) $d = 10$.

655. Napíšte rovnicu priamky, ktorá je určená bodom

a) $A = (3, 12)$ a má od bodu $B = (7, 2)$ vzdialenosť $d = \sqrt{58}$;
b) $C = (-2, 5)$ a je rovnako vzdialená od bodov $A = (3, -7)$, $B = (-4, 1)$.

656. Nájdite rovnicu tej rovnobežky s priamkou $8x + 6y + 11 = 0$, ktorá je na tej istej strane priamky ako počiatok pravouhlého súradnicového systému a od danej priamky má vzdialenosť

a) $d = 4$; b) $d = 10$.

657. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza počiatkom súradnicového systému a ktorej úsek medzi priamkami $2x - y + 3 = 0$, $4x - 2y + 10 = 0$ sa rovná 5.

658. Daná je priamka $2x + 2y - 7 = 0$ a body $K = (4, 3)$, $L = (5, 13)$. Nájdite na danej priamke taký bod M, aby

a) súčet vzdialeností $\varrho(M, K) + \varrho(M, L)$ bol najmenší;
b) rozdiel vzdialeností $\varrho(M, L) - \varrho(M, K)$ bol najväčší.

659. Nájdite bod M, ktorý má od priamok $12x + 5y - 11 = 0$, $3x - 4y + 3 = 0$ vzdialenosti 3 a 1.

660. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $D = (-2, 1)$ a vytvára takú úsečku medzi priamkami p_1, p_2, že

a) bod D je stredom tejto úsečky, pričom rovnice priamok sú $x + 2y + 12 = 0$, $x - y + 1 = 0$;

b) dĺžka tejto úsečky je 5, pričom rovnice priamok sú $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 1 = 0$.

661. Dokážte, že súčet vzdialeností ľubovoľného bodu vnútri rovnostranného trojuholníka od jeho strán je konštantný.

662. Na priamke $7x + y - 39 = 0$ nájdite body A, B tak, aby trojuholník ABC, kde $C = (2, 1)$, bol pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C a jeho obsah sa rovnal 12.

663. Nájdite obsah rovnobežníka, kde bod $A = (6, 1)$ je jeho vrchol, ak

a) rovnobežník je štvorec a rovnica strany je $x + 3y - 11 = 0$;

b) rovnobežník je obdĺžnik a rovnice jeho dvoch strán sú $7x + 4y - 3 = 0$, $4x - 7y + 11 = 0$.

664. Nájdite obsah štvorca, ak rovnice jeho rovnobežných strán sú $3x - 11y + - 5 = 0$, $3x - 11y - 12 = 0$.

665. Napíšte rovnice strán štvorca, ktorý má

a) susedné vrcholy $A = (3, 1)$, $B = (-1, 4)$;

b) vrchol $C = (6, 2)$ a rovnicu strany $4x + 3y - 11 = 0$;

c) rovnice strán $5x - 12y + 10 = 0$, $5x - 12y + 49 = 0$ a bod $M = (1, 3)$ leží na strane štvorca.

666. Nájdite rovnicu množiny všetkých bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od rovnobežiek

a) $2x - 3y + 10 = 0$, $4x - 6y + 5 = 0$;

b) $x = 3 - 2t$, $y = 4 + t$; $x = -3 + 4t$, $y = 5 - 2t$.

667. Napíšte rovnice osí uhlov, ktorých ramená ležia na priamkach:

a) $x - 3y + 3 = 0$, $3x - y + 10 = 0$;

b) $6x - 8y + 11 = 0$, $12x + 5y + 2 = 0$;

c) $x = 3 - 4t$, $y = 10 + 5t$; $4x - 5y + 10 = 0$.

668. Napíšte rovnicu priamky, ktorej vzdialenosť od priamky $x - y + 5 = 0$ je päťnásobkom vzdialenosti od priamky $x - y + 15 = 0$.

669. Rovnica zväzku priamok je

$$\lambda_1(3x - 10y + 12) + \lambda_2(3x - 2y + 6) = 0.$$

Zistite, či priamka p patrí do tohto zväzku, ak jej rovnica je:

a) $3x - 7y + 4 = 0$; c) $3x + 26y + c = 0$, kde c je číslo;

b) $x - 2y + 3 = 0$; d) $6x + by = 0$, kde b je číslo.

670. Zistite, či patria do jedného zväzku priamky, z ktorých každá je daná bodom a smerovým vektorom:

$$A = (-2, 2),\quad \mathbf{a} = \{1, -2\};\quad B = (0, 9),\ \mathbf{b} = \{-3, -5\};$$
$$C = (-27, 0),\quad \mathbf{c} = \{6, 1\}.$$

671. Vo zväzku priamok so stredom $S = (5, 2)$ nájdite priamku ktorá
a) je rovnobežná s priamkou určenou bodmi $A = (-1, 2)$, $B = (2, 2)$;
b) je kolmá na priamku určenú bodmi $A = (0, -4)$, $B = (3, -5)$;
c) prechádza bodom $A = (-3, 1)$;
d) prechádza bodom $B = (3, 4)$.

672. Nájdite tú priamku zo zväzku priamok

$$\lambda_1(x + 2y - 5) + \lambda_2(3x - 2y + 1) = 0,$$

ktorá
a) prechádza bodom $A = (2, -1)$;
b) je rovnobežná s priamkou $y = 1$;
c) je rovnobežná s priamkou $2x + 3y - 5 = 0$.

673. Bez výpočtu priesečníka daných priamok nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkom priamok $4x - y + 1 = 0$, $2x + 3y - 17 = 0$ a
a) má úsek $q = 3$;
b) prechádza ťažiskom trojuholníka ABC, kde $A = (4, 7)$, $B = (8, -5)$, $C = (3, 3)$;
c) prechádza stredom úsečky MN, kde $M = (6, 1)$, $N = (4, -5)$;
d) zviera s priamkou $3x - 2y - 12 = 0$ uhol $45°$.

674. Nájdite priamku, ktorá prechádza priesečníkom priamok $x - 4y + 6 = 0$, $8x - 19y + 4 = 0$ a
a) vytína na súradnicových osiach rovnaké úseky;
b) vytvára spolu so súradnicovými osami trojuholník obsahu $P = 2{,}8$;
c) má od bodu $P = (4, 7)$ vzdialenosť $d = 5$.

675. Bez výpočtu vrcholov trojuholníka ABC a priesečníka výšok nájdite rovnice ostatných strán a výšok trojuholníka, ak
a) rovnice strán trojuholníka sú $4x - y + 10 = 0$, $4x - 5y + 2 = 0$, $2x - y - 12 = 0$;
b) rovnica strany AB je $3x - y + 7 = 0$ a rovnica výšky v_a je $x + y + 3 = 0$ a v_b je $2x - 7y + 13 = 0$.

676. Nájdite priamku zo zväzku priamok $\lambda_1(3x - 4y - 3) + \lambda_2(2x - 3y - 1) = 0$, ktorá prechádza ťažiskom trojuholníka, ktorého vrcholy sú $A = (-2, 1)$, $B = (3, -3)$, $C = (5, -1)$.

677. Označte f_1, f_2, f_3 ľavé časti normálového tvaru rovníc strán trojuholníka. Dokážte, že rovnice osí uhlov trojuholníka možno napísať v tvare $f_1 \pm f_2 = 0$, $f_1 \pm f_3 = 0$, $f_2 \pm f_3 = 0$.

678. Bez výpočtu vrcholov štvoruholníka z rovníc strán $x - 5y + 12 = 0$, $2x - 3y + 10 = 0$, $7x + 2y - 15 = 0$, $7x - 5y - 36 = 0$ určte rovnice uhlopriečok.

679. Dané sú body $A = (4, 1)$, $B = (0, -1)$, $C = (-6, 2)$, $D = (-3, -10)$, $E = (7, -3)$ a priamky $x + 3y - 2 = 0$, $2x + 6y - 5 = 0$. Zistite polohu týchto bodov vzhľadom na každú z oboch priamok, ako aj vzhľadom na obidve priamky.

680. Zistite, či daný štvoruholník $ABCD$ je vypuklý, ak jeho vrcholy sú:
a) $A = (-1, 7)$, $B = (1, -2)$, $C = (9, 1)$, $D = (4, 11)$;
b) $A = (3, 5)$, $B = (5, -4)$, $C = (8, 0)$, $D = (13, -1)$.

681. Strany trojuholníka ležia na priamkach $x + 5y - 82 = 0$, $3x - 2y + 94 = 0$, $7x + y + 140 = 0$. Zistite polohu bodov $A = (-20, 19)$, $B = (-21, 22)$, $C = (-30, 2)$ vzhľadom na trojuholník.

682. Pre aké hodnoty parametra t ležia body priamky $x = 3 + 2t$, $y = 2 - 4t$ mezi priamkami $4x + y - 10 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

683. Zistite, či priamka $2x - 3y + 10 = 0$ pretína úsečku AB, ak

a) $A = (100, 71)$, $B = (98, 68)$; b) $A = (100, 69)$, $B = (101, 70)$.

684. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $D = (5, -2)$ v rovnakej vzdialenosti od bodov $A = (12, -6)$, $B = (10, 2)$.

685. Dokážte, že priamka $3x + 7y - 11 = 0$, ktorá je rovnobežná s priamkami $6x + 14y - 21 = 0$, $3x + 7y - 13 = 0$, leží medzi nimi. Nájdite pomer vzdialeností priamky od oboch rovnobežiek.

686. Zistite, či body $A = (2, 9)$, $B = (20, 9)$ ležia v jednom, vo vedľajších, alebo vo vrcholových uhloch, ktorých ramená sú na priamkach:

a) $3x - 5y - 11 = 0$, $6x - y + 10 = 0$;
b) $13x + 2y - 5 = 0$, $21x - 4y + 84 = 0$;
c) $14x + 3y - 43 = 0$, $3x - 5y + 28 = 0$.

687. Bod $C = (1, 10)$ leží v jednom z uhlov, ktorých ramená sú určené priamkami $3x - 7y + 3 = 0$, $x + 9y - 11 = 0$. Nájdite tento uhol.

688. Nájdite rovnicu osi uhla, ktorého ramená ležia na priamkach p_1, p_2, ak rovnice týchto priamok sú:

a) $x - 8y - 6 = 0$, $7x + 4y - 3 = 0$ a uhol obsahuje počiatok pravouhlého súradnicového systému;
b) $3x - 4y - 11 = 0$, $40x + 9y - 2 = 0$ a vedľajší uhol s hľadaným uhlom obsahuje bod $C = (6, 2)$;
c) $2x + 5y - 10 = 0$, $10x + 4y + 5 = 0$ a uhol je ostrý;
d) $12x - 5y + 12 = 0$, $4x - 3y + 10 = 0$ a uhol je tupý.

689. Nájdite všetky body, pre ktoré platia nerovnosti

a) $x + 2y < 2$; c) $x - y < -1$;
b) $x + 2y > 2$; d) $(x + y - 2)(x - y + 2) > 0$.

Znázornite množiny týchto bodov.

690. Zobrazte množinu všetkých bodov, ktorá je riešením systémov lineárnych nerovností:

a) $x - y \geqq 0$, $x + y \leqq 0$;
b) $x \leqq 3$, $x \geqq -3$, $y \leqq 4$, $y \geqq -4$;
c) $x \leqq 4$, $y \leqq 3$, $3x + 4y \geqq 0$;
d) $3x + 4y \geqq 7$, $-x + y \leqq 3$, $x + y \leqq 4$;
e) $4x + 3y \geqq 7$, $3x + 4y \leqq 7$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.

691. Nájdite a znázornite v rovine množinu všetkých bodov, pre súradnice ktorých platí:

a) $|x| + |y - 2| < 5$; c) $[|x - 1| - (x - 1)][|y - 2| + (y - 2)] < 0$.
b) $|x - 1| - |y - 2| < 5$;

692. Majme nasledujúce množiny:

E — euklidovská rovina,
A — polrovina, ktorá je určená nerovnosťou $-3x + y < 4$,
B — polrovina, ktorá je určená nerovnosťou $-3x + y > 4$,
C — polrovina, ktorá je určená nerovnosťou $-3x + y \leqq 4$,

D — polrovina, ktorá je určená nerovnosťou $-3x + y \geqq 4$,
L — priamka, ktorá má rovnicu $-3x + y = 4$,
P — prázdna množina.

Ukážte, že pre tieto množiny platia vzťahy:

$$\overline{A} = D, \quad \overline{B} = C, \quad \overline{L} = A \cup B, \quad C \cap D = L, \quad A \cap B = P, \quad A \cap C = A,$$
$$B \cap D = B, \quad A \cup D = E, \quad B \cup C = E, \quad A \cup C = C, \quad B \cup D = D,$$
$$A \cup L = C, \quad B \cup L = D,$$

kde $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{L}$ sú doplnky množín A, B, L vzhľadom na E.

693. Nájdite vrcholy mnohouholníka určeného systémom nerovností $2x + y + 9 \geqq 0$, $-x + 3y + 6 \geqq 0$, $x + 2y - 3 \leqq 0$, $x + y \leqq 0$. Znázornite tento mnohouholník.

694. Dokážte, že priamky, ktorých rovnice sú $2x + y + 9 = 0$, $-x + 3y + 6 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, rozdeľujú celú rovinu na sedem častí. Opíšte každú z týchto častí sústavou najviac troch nerovností.

695. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov, ktorých rozdiel štvorcov vzdialeností od bodov $O = (0, 0)$, $B = (1, -3)$ sa rovná 4.

696. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov ktorých súčet vzdialeností od priamok $3x + 4y = 23$, $12x - 5y = 13$ je $s = 5$.

697. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov, ktorých pomer vzdialeností od daných dvoch priamok p_1, p_2 je m/n. Riešte úlohu pre priamky $4x + 3y = 23$, $5x - 12y + 13 = 0$, ak pomer je $2/3$.

698. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov, ktorých podiel vzdialeností od dvoch daných bodov sa rovná 1.

699. Daná je množina všetkých trojuholníkov, ktoré majú spoločnú základňu c a ktorých protiľahlý vrchol C leží na priamke rovnobežnej so základňou. Nájdite analytické vyjadrenie množiny

a) ťažísk týchto trojuholníkov,
b) stredov štvorcov vpísaných do týchto trojuholníkov s jednou stranou v základni trojuholníka.

700. Nájdite množinu všetkých bodov, ktorých súčet vzdialeností od dvoch strán daného trojuholníka sa rovná vzdialenosti od tretej strany a ktoré ležia vnútri tohto trojuholníka.

701. Nájdite množinu bodov v rovine, ktoré tvoria stredy všetkých pravouhlých rovnobežníkov vpísaných do trojuholníka ABC, pričom dva vrcholy vpísaného pravouhlého rovnobežníka ležia na strane AB.

702. Nájdite analytické vyjadrenie ťažísk všetkých trojuholníkov ohraničených priamkami $x = 0$, $y = 0$, $x/k + y/(3 - k) = 1$, $0 < k < 3$.

703. Daná je množina všetkých štvorcov, ktorých dva susedné vrcholy ležia na rovnobežkách p_1, p_2 a strana určená týmito dvoma vrcholmi prechádza daným bodom P. Nájdite množinu všetkých zvyšných vrcholov daných štvorcov.

704. Nájdite množinu všetkých bodov, ktorých súčet vzdialeností od strán rovnostranného trojuholníka je konštantný a rovná sa dĺžke jeho výšky.

4,9. Zobrazenie a transformácia roviny

Zobrazenie f množiny M do množiny N je predpis, podľa ktorého každému prvku x množiny M je priradený jeden prvok y množiny N; označujeme to

$$y = f(x), \quad x \in M.$$

Prvok y nazývame *obrazom prvku* x a prvok x *vzorom prvku* y. Množinu všetkých obrazov prvkov z množiny M nazývame *obrazom množiny* M.

Ak pri zobrazení f každý prvok množiny N je obrazom istého prvku z množiny M, potom zobrazenie f je *zobrazenie množiny M na množinu N*.

Nech f je zobrazenie množiny M do množiny N a nech g je zobrazenie množiny P do množiny Q, pričom $f(M) \subset P$. Potom zobrazenie h, ktoré priraďuje každému $x \in M$ obraz $g(y)$, kde $y = f(x)$, nazývame *zloženým zobrazením* z f a g a označujeme $h(x) = g(f(x))$ pre každé $x \in M$.

Zobrazenie f množiny M do množiny N je *jednojednoznačné (prosté)*, ak každým dvom rôznym prvkom x_1, x_2 z množiny M sú priradené dva rôzne obrazy $f(x_1)$, $f(x_2)$ z množiny N.

Ak f je jednojednoznačné zobrazenie množiny M do množiny N, potom *inverzným zobrazením* f_{-1} k danému zobrazeniu f nazývame zobrazenie, ktoré každému y z N priraďuje prvok $x \in M$, pre ktorý platí $y = f(x)$. Označujeme to

$$x = f_{-1}(y).$$

Pre jednojednoznačné zobrazenie f platí

$$(f_{-1})_{-1} = f.$$

Zobrazenie množiny M do množiny M nazývame *transformáciou*.

Jednojednoznačnú transformáciu nazývame *regulárnou transformáciou* na množine M.

Uvažujme pravouhlý súradnicový systém v rovine a množinu všetkých bodov roviny. *Afinnou transformáciou* roviny nazývame takú transformáciu, pri ktorej každému bodu $M = (x, y)$ roviny je priradený bod $M' = (x', y')$ roviny a platí

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + m, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, m, n sú reálne čísla. Rovnice (1) nazývame *transformačnými rovnicami*.

Vlastnosti afinnej transformácie:

1. Afinná transformácia roviny je regulárna vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

je 2. Ak $h(\boldsymbol{A})$ sa rovná 1, obraz roviny je priamka; ak $h(\boldsymbol{A}) = 0$, obraz roviny je bod.

2. Regulárna afinná transformácia roviny nemení deliaci pomer troch bodov a pomer obsahov. Obrazom roviny je rovina, obrazom priamky je priamka, obrazom úsečky je úsečka.

Ak pre každé dva body A, B roviny platí

$$\varrho(A, B) = \varrho(f(A), f(B)),$$

afinnú transformáciu nazývame *zhodnosťou*.

3. Zhodnosť je regulárna transformácia.
4. Inverzná transformácia zhodnosti je opäť zhodnosť.
5. Pre každú trojicu bodov A, B a C roviny platí

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1,$$

kde $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$, pričom f je zhodnosť. Zhodnosť zachováva uhly priamok.

6. Afinná transformácia f daná transformačnými rovnicami (1) je zhodnosť vtedy a len vtedy, ak platí

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

7. Absolútna hodnota determinantu matice (2) sa rovná 1.

Poznámka. Zhodnosť nazývame aj ortogonálnou transformáciou roviny.

Reálne čísla $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, m, n$ v transformačných rovniciach (1) majú tento geometrický význam:

1. Bod $O' = (m, n)$ je obrazom počiatku súradnicového systému $O = (0, 0)$.
2. Vektor $\mathbf{e}_1' = \{a_{11}, a_{21}\}$ je obrazom jednotkového vektora $\boldsymbol{i} = \{1, 0\}$.
3. Vektor $\mathbf{e}_2' = \{a_{12}, a_{22}\}$ je obrazom jednotkového vektora $\boldsymbol{j} = \{0, 1\}$.

Ak transformácia (1) je zhodnosť, potom platí:

4. Vektory $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ sú jednotkové vektory navzájom kolmé a označujeme ich $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$.
5. Nech α je uhol vektorov $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}'$, t. j. $\alpha = \sphericalangle\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}'$. Ak $|\boldsymbol{A}| = 1$, potom platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{i} \cos\alpha + \boldsymbol{j} \sin\alpha, \\ \boldsymbol{j}' &= -\boldsymbol{i} \sin\alpha + \boldsymbol{j} \cos\alpha. \end{aligned}$$

Ak $|\boldsymbol{A}| = -1$, potom platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{i} \cos\alpha + \boldsymbol{j} \sin\alpha, \\ \boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{i} \sin\alpha - \boldsymbol{j} \cos\alpha. \end{aligned}$$

Transformačné rovnice zhodnosti. Ak $|\boldsymbol{A}| = 1$, potom rovnice zhodnosti sú

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + m, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ak $|\boldsymbol{A}| = -1$, rovnice zhodnosti sú

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + m, \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Posunutie. Pre $\alpha = 0$, dostaneme zhodnosť tvaru

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + m, \\ y' &= y + n \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

a nazývame ju *posunutím* alebo *transláciou*.

Otočenie. Pre $m = n = 0$ a $|\boldsymbol{A}| = 1$ dostaneme zhodnosť tvaru

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

a nazývame ju *otočením súradnicového systému* okolo počiatku o uhol α.

Súmernosť. Pre $m = n = 0$, $|\boldsymbol{A}| = -1$ a pre $\alpha = 0$ dostaneme

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

a túto zhodnosť nazývame *súmernosťou* podľa osi o_x. Pre $\alpha = \pi$ dostaneme súmernosť podľa osi o_y

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= y. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

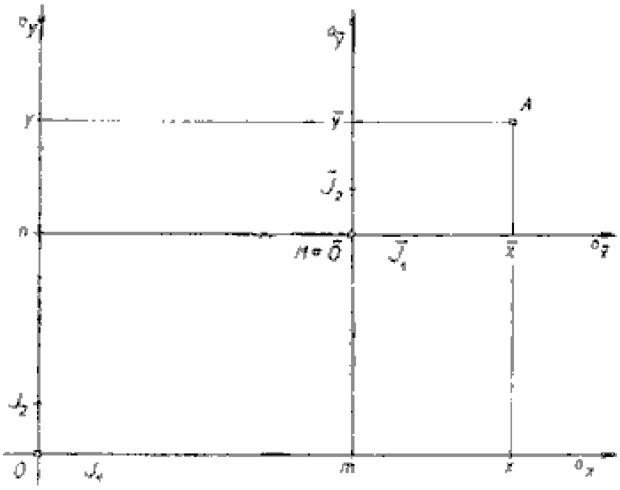
Každú zhodnosť možno zložiť z troch takýchto zhodností, t. j. z posunutia, z otáčania okolo počiatku pravouhlého súradnicového systému o uhol α a zo súmernosti podľa osi o_x alebo osi o_y.

Niekedy sa namiesto jedného pravouhlého súradnicového systému v rovine uvažujú dva pravouhlé súradnicové systémy a určujú súradnice daného bodu A v oboch súradnicových systémoch.

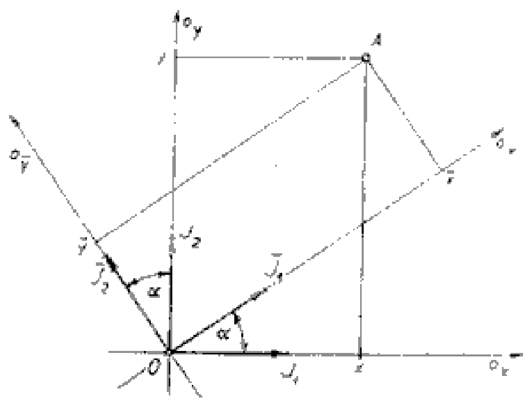
Dôležité sú najmä tieto prípady:

1. Pravouhlé súradnicové systémy majú počiatky $O = (0, 0)$, $\overline{O} = (m, n)$ a ich súradnicové osi sú rovnobežné a rovnako orientované (pozri *obr. 44*), t. j. $\overline{J}_1 - \overline{O} = J_1 - O$, $\overline{J}_2 - \overline{O} = J_2 - O$. O súradnicovom systéme $\overline{O}$, $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$ hovoríme, že vznikol posunutím pôvodného súradnicového systému. Pre súradnice bodu A v oboch súradnicových systémoch platia vzťahy

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= x - m, \\ \overline{y} &= y - n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$



Obr. 44



Obr. 45

2. Pravouhlé súradnicové systémy majú spoločný počiatok a ich osi o_x a $o_{\overline{x}}$ zvierajú uhol α. O súradnicovom systéme O, $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$ hovoríme, že vznikol otočením pôvodného súradnicového systému okolo počiatku O o uhol α.

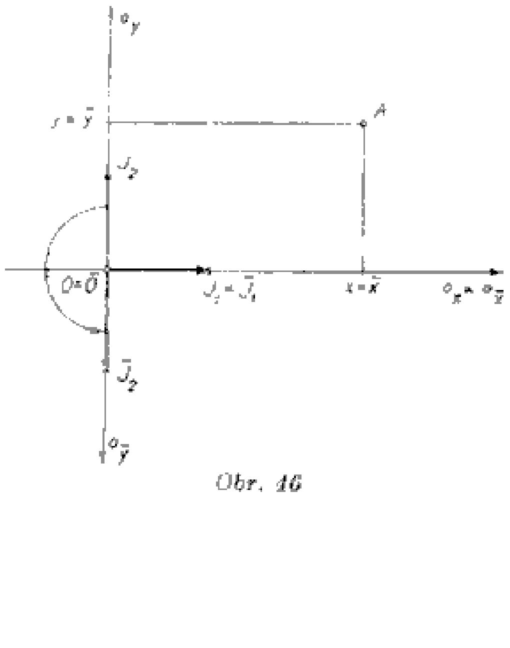
Pre súradnice bodu A v oboch súradnicových systémoch platia vzťahy

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ \overline{y} &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(pozri *obr. 45*).

3. Pravouhlé súradnicové systémy majú spoločný počiatok, os o_x a osi o_y, $o_{\overline{y}}$ sú opačne orientované, t. j. $\sphericalangle J, \overline{J} = \pi$ (*obr. 46*). O súradnicovom systéme $\overline{O}$, $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$ hovoríme, že sme ho dostali zrkadlením podľa osi o_x. Pre súradnice bodu A platia vzťahy

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= x, \\ \overline{y} &= -y. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$



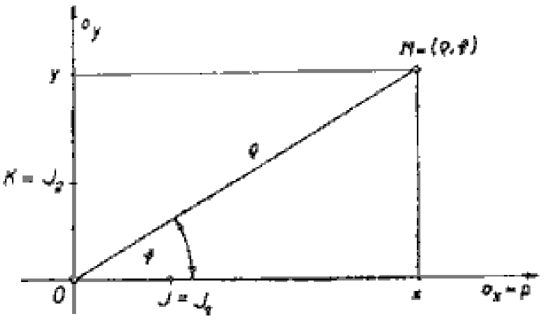
Obr. 46

Transformácia polárnych súradníc do pravouhlých

Transformáciou polárnych súradníc do pravouhlých nazývame zobrazenie množiny všetkých bodov roviny $M = (\varrho, \varphi)$ v danom polárnom súradnicovom systéme do množiny všetkých bodov roviny $M' = (x, y)$ v danom pravouhlom súradnicovom systéme s transformačnými rovnicami

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Geometrický význam. Ak polárny a pravouhlý súradnicový systém má spoločný počiatok a jednotkové body $J_1 = J$, pričom bod $K = J_2$ (pozri *obr. 47*), potom uvedená transformácia udáva pravouhlé súradnice bodu $M = (\varrho, \varphi)$ v takto zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme.



Obr. 47

Inverzná transformácia má rovnice

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}\right\} &\text{ pre } M \neq O, \\ \varphi = 0, \quad &\text{pre} \quad M = O. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

a geometricky udáva polárne súradnice bodu $M = (x, y)$, pričom tak pravouhlý, ako aj polárny súradnicový systém sú zvolené ako v predchádzajúcom prípade.

Príklad 1. Afinná transformácia roviny priraďuje bodom $A = (2, 1)$, $B = (3, 0)$ a $C = (1, 4)$ body $A' = (1, 6)$, $B' = (1, 9)$ a $C' = (3, 1)$. Nájdime obraz bodu $M = (5, 7)$ a taký bod N, pre ktorý platí $N' = N$.

Riešenie. Zo vzťahov (1) dostaneme pre body A', B', C' sústavu rovníc

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2a_{11} + a_{12} + m, \\ 6 &= 2a_{21} + a_{22} + n, \\ 1 &= 3a_{11} \qquad\; + m, \\ 9 &= 3a_{21} \qquad\; + n, \\ 3 &= a_{11} + 4a_{12} + m, \\ 1 &= a_{21} + 4a_{22} + n. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Úpravou tejto sústavy dostávame ekvivalentnú sústavu

$$0 = -a_{11} + a_{12}, \qquad 3 = a_{21} - a_{22},$$
$$2 = -2a_{11} + 4a_{12}, \qquad 8 = 2a_{21} - 4a_{22}.$$

Riešením máme

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = -1.$$

Pre m a n vyplýva $m = -2$, $n = 3$. Transformačné rovnice sú

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + y - 2, \\ y' &= 2x - y + 3. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Pre obraz bodu $M = (5, 7)$ platí

$$x' = 5 + 7 - 2 = 10,$$
$$y' = 10 - 7 + 3 = 6,$$

čiže $M' = (10, 6)$.

Bod N nájdeme dosadením podmienok $x' = x$, $y' = y$ do transformačných rovníc (16):

$$x = x + y - 2,$$
$$y = 2x - y + 3,$$

z toho

$$y = 2 \quad \text{a} \quad x = \frac{1}{2}, \qquad \text{čiže} \qquad N = \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

Príklad 2. Nájdime inverznú transformáciu k otáčaniu okolo počiatku pravouhlého súradnicového systému o uhol α.

Riešenie. Transformačné rovnice otáčania sú

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Keďže determinant tejto sústavy je $|\mathbf{A}| = 1$, na základe Cramerovho pravidla dostaneme

$$x = \begin{vmatrix} x', & -\sin\alpha \\ y', & \cos\alpha \end{vmatrix}, \qquad y = \begin{vmatrix} \cos\alpha, & x' \\ \sin\alpha, & y' \end{vmatrix}$$

a z toho

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \\ y &= -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Transformačné rovnice inverznej transformácie môžeme ešte upraviť

$$x = x'\cos(-\alpha) - y'\sin(-\alpha),$$
$$y = x'\sin(-\alpha) + y'\cos(-\alpha).$$

Teda inverzná transformácia je opäť otočenie okolo počiatku pravouhlého súradnicového systému o uhol $-\alpha$.

Príklad 3. Afinná transformácia je daná rovnicami

$$x' = \frac{3}{5}x + ay - 2,$$

$$y' = -\frac{4}{5}x + by + 3.$$

Pre aké čísla a, b je táto afinná transformácia zhodnosťou? Nájdime obraz bodu $A = (4, 2)$ a priamky $3x - 2y + 6 = 0$ pri tejto zhodnosti. Nájdime priamku, ktorej obraz je $y' = 0$.

Riešenie. Zo vzťahov (3) vyplýva pre čísla a, b:

$$a^2 + b^2 = 1,$$

$$\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b = 0.$$

Riešením tejto sústavy dostaneme $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{3}{5}$ alebo $a = -\frac{4}{5}$, $b = -\frac{3}{5}$. Úhrnom dostaneme dve zhodnosti, prvá je

$$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2,$$

$$y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 3,$$

druhá je

$$x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2,$$

$$y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3.$$

Uvažujme iba prvú zhodnosť. Obrazom bodu $A = (4, 2)$ je bod A', pre ktorého súradnice platí

$$x'_A = \frac{12}{5} + \frac{8}{5} - 2 = 2,$$

$$y'_A = -\frac{16}{5} + \frac{6}{5} + 3 = 1,$$

čiže $A' = (2, 1)$.

Obraz priamky $3x - 2y + 6 = 0$ dostaneme tak, že vyjadríme y z jej rovnice, napríklad $y = 0{,}5(3x + 6)$ a dosadíme do transformačných rovníc prvej zhodnosti. Dostaneme

$$x' = 0{,}6x + 0{,}4(3x + 6) - 2,$$
$$y' = -0{,}8x + 0{,}3(3x + 6) + 3$$

a po úprave

$$x' = 0{,}4 + 1{,}8x,$$
$$y' = 4{,}8 + 0{,}1x,$$

čo sú parametrické rovnice obrazu danej priamky, kde x je parameter. Vylúčením parametra x z týchto rovníc dostaneme všeobecnú rovnicu obrazu danej priamky

$$x' - 18y' + 86 = 0.$$

Rovnicu priamky, ktorá má obraz $y' = 0$, dostaneme dosadením do druhej transformačnej rovnice

$$0 = -0{,}8x + 0{,}6y + 3,$$

čiže

$$4x - 3y - 15 = 0,$$

čo je rovnica hľadanej priamky.

Príklad 4. Nájdime pravouhlé súradnice bodov $A = (2, \pi/3)$, $B = (\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $C = (5, \pi/2)$ daných v polárnom súradnicovom systéme, ak oba súradnicové systémy majú spoločný počiatok, jednotkové body J_1, J a body K, J_2.

Riešenie. Zo vzťahov (13) pre súradnice bodov A, B a C dostaneme

$$x_A = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1, \qquad y_A = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$
$$x_B = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = -1, \qquad y_B = \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = 1,$$
$$x_C = 5\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad y_C = 5\sin\frac{\pi}{2} = 5.$$

V danom pravouhlom súradnicovom systéme je $A = (1, \sqrt{3})$, $B = (-1, 1)$, $C = (0, 5)$.

705. Nájdite obrazy bodov $A = (6, 2)$, $B = (0, -3)$, $C = (-3, 1)$ pri zobrazení f, ak

a) $f(X) - S = S - X$, kde $S = (2, 5)$;

b) $f(X) - S = \frac{1}{3}(X - S)$, kde $S = (5, -1)$;

c) $f(X) - S = \dfrac{X - S}{|X - S|^2}$, kde $S = (5, -1)$.

Čo je vzorom bodov $D' = (4, 1)$ a $E' = (-2, 0)$?

706. Dané sú zobrazenia f, g. Nájdite obraz úsečky AB, kde $A = (4, 5)$, $B = (6, 1)$ pri zobrazení $h(X) = g(f(X))$ a pri zobrazení $h_1(X) = f(g(X))$. Zistite, pre ktoré body X platí $g(f(X)) = f(g(X))$, ak

a) $f(X) - S = S - X$, kde $S = (0, 0)$, $g(Y) = Y + \boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{a} = \{3, 4\}$;
b) $f(X) = S + (S - X)$, kde $S = (0, 1)$, $g(Y) = C$, kde $C = (1, 0)$.

707. Nájdite transformačné rovnice transformácie f, ak pre transformáciu f platí:

a) V rovine je daná priamka n a bod A, ktorý neleží na priamke n. Nech M je množina všetkých bodov roviny, ktoré neležia na rovnobežke s priamkou n idúcou bodom A. Každému bodu B množiny M je priradený jediný bod $f(B)$ na priamke

n, kde $f(B)$ je priesečník priamky určenej bodmi A, B a priamkou n *(centrálne premietanie)*.

b) V rovine M je daná priamka n a vektor $\boldsymbol{a} = A' - A$, pričom bod A leží mimo priamky a bod A' na priamke n. Každému bodu B z M je priradený jediný bod B' na priamke n, pre ktorý platí $B' - B = k\boldsymbol{a}$, kde k je reálne číslo *(šikmé premietanie)*.

c) V rovine M je daný bod A a každému bodu B z M je priradený bod $f(B) = A$.

d) V rovine M je daný bod A a každému bodu roviny B je priradený bod $f(B)$ súmerný k bodu B podľa bodu A *(súmernosť podľa bodu)*.

e) V rovine je daná priamka p a každému bodu B roviny je priradený bod $f(B)$ súmerný k bodu B podľa priamky p *(súmernosť podľa priamky)*.

f) V rovine je daná kružnica so stredom S a s jednotkovým polomerom. Nech M je množina všetkých bodov roviny okrem bodu S. Každému bodu B z M je priradený bod B' roviny, ktorý leží na spojnici bodov B, S, pričom platí $\varrho(B', S) = 1/\varrho(B, S)$ *(kruhová inverzia)*.

g) V rovine je daný bod A a číslo $k \neq 0$. Každému bodu B roviny je priradený bod $f(B)$, pričom platí $f(B) - A = k(B - A)$ *(podobnosť)*.

708. Zistite, ktoré zobrazenia z predchádzajúcej úlohy sú jednojednoznačné. Ktoré z nich sú transformácie a ktoré regulárne transformácie? Pre jednojednoznačné zobrazenia nájdite inverzné zobrazenie.

709. Daná je afinná transformácia

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y + 6, \\ y' &= x + y + 2. \end{aligned}$$

Nájdite a znázornite:

a) obrazy bodov O, $A = (3, 1)$, $B = (4, 2)$;
b) body, ktorých obrazy sú $C' = (4, 3)$, $M' = (0, 0)$;
c) obraz priamky $2x - 3y + 5 = 0$;
d) priamku, ktorá má obraz $x' + y' = 0$;
e) obrazy súradnicových osí;
f) priamky, ktoré majú obrazy $x' = 0$, $y' = 0$.

710. Afinná transformácia zobrazuje body $A = (1, 6)$, $B = (3, 1)$, $C = (1, 9)$ do bodov $A' = (2, 1)$, $B' = (1, 4)$, $C' = (3, 0)$. Nájdite rovnice tejto transformácie. Čo je obrazom počiatku a oboch súradnicových osí pri tejto transformácii?

711. Nájdite afinnú transformáciu roviny a k nej inverznú transformáciu, ak obrazom J_1, J_2 a O daného pravouhlého súradnicového systému sú body $J_1' = (2, 0)$, $J_2' = (0, 8)$, $O' = (-4, 2)$.

712. Afinná transformácia má rovnice

$$\begin{aligned} x' &= -3x + 4y + 6, \\ y' &= 4x + 3y - 12. \end{aligned}$$

Na priamke $2x - 7y - 24 = 0$ nájdite taký bod, aby jeho obraz ležal opäť na tejto priamke.

713. Daná je afinná transformácia

$$\begin{aligned} x' &= x + y - 3, \\ y' &= 2x + y + 2 \end{aligned}$$

a bod $A = (3, 3)$. Nájdite priamku, ktorej obraz opäť prechádza bodom A.

714. Afinná transformácia má rovnice $x' = x + 4y$, $y' = 2x + 3y$. Nájdite vektory, ktoré sú kolineárne so svojimi obrazmi.

715. Daná je afinná transformácia:

a) $x' = 2x + y - 3$, $y' = x - 3y + 5$;
b) $x' = 2y - 3$, $y' = 3x - 3$;
c) $x' = 5x/13 + 12y/13 + 1$, $y' = -12x/13 + 5y/13 - 3$.

Čo je obrazom štvorca $2 \leqq x \leqq 5$, $-3 \leqq y \leqq 0$ a obdĺžnika $1 \leqq x \leqq 6$, $2 \leqq y \leqq 3$?

716. Nájdite obrazy bodov $A = (6, -4)$, $B = (-3, 3)$ pri posunutí pravouhlého súradnicového systému, ak obraz bodu O je:

a) $O' = (3, 2)$;
b) $O' = (-4, 6)$;
c) $O' = (3, -7)$;
d) $O' = (-3, -2)$.

717. Obraz bodu $B = (3, -4)$ je pri posunutí pravouhlého súradnicového systému bod $B' = (-5, 5)$. Nájdite obraz bodu O a vzor bodu $M' = (0, 0)$.

718. V danom pravouhlom súradnicovom systéme má bod A súradnice $A = (3, -2)$. V pravouhlom súradnicovom systéme, ktorý z pôvodného vznikol posunutím, je $A = (-3, 5)$. Nájdite súradnice počiatku nového súradnicového systému vzhľadom na pôvodný súradnicový systém.

719. Napíšte rovnice posunutia, ktoré je určené vektorom $\boldsymbol{a} = X' - X$, ak

a) $\boldsymbol{a} = \{5, 0\}$; b) $\boldsymbol{a} = \{0, -3\}$, c) $\boldsymbol{a} = \{5, -3\}$.

720. Nájdite obrazy vrcholov trojuholníka ABC, $A = (2, 3)$, $B = (4, -1)$, $C = (-1, -2)$, ak posunutie pravouhlého súradnicového systému je určené:

a) bodom $O' = A$;
b) bodom $A' = C$;
c) bodom $C' = (5, 11)$;
d) vektorom $\boldsymbol{a} = B - A$,

kde A', C', O' sú obrazy bodov A, C, O.

721. Zistite, čo je obrazom:

a) priamky $3x - 2y + 10 = 0$;
b) úsečky $x = 3 + 2t$, $y = 1 - t$, $0 \leqq t \leqq 1$;
c) množiny danej rovnicou $x^2 + y^2 = 9$;
d) množiny danej rovnicou $x^2 - y^2 = 9$;
e) obdĺžnika $0 \leqq x \leqq 3$, $2 \leqq y \leqq 4$

pri otočení súradnicového systému okolo počiatku o uhol $\alpha = 2\pi/3$.

722. Napíšte rovnice otočenia pravouhlého súradnicového systému okolo počiatku, ak

a) obraz kladnej časti osi o_x je kladná časť osi o_y;
b) obraz kladnej časti osi o_x je záporná časť osi o_y.

723. Nájdite a znázornite obraz trojuholníka ABC, $A = (2, 7)$, $B = (3, 1)$, $C = (5, 4)$ pri otočení pravouhlého súradnicového systému okolo počiatku o uhol α, ak

a) $\alpha = \pi/4$; b) $\alpha = -\pi/4$; c) $\alpha = \pi$; d) $\alpha = 1$.

724. Nájdite vzory bodov $A' = (3\sqrt{3}, -6)$, $C' = (0, -2\sqrt{3})$ pri otočení pravouhlého súradnicového systému okolo počiatku o uhol $\alpha = \pi/3$.

725. Zistite o aký uhol treba otočiť pravouhlý súradnicový systém okolo počiatku, aby:

a) obraz bodu $A = (3, 1)$ bol $A' = (-3, -1)$;
b) obraz bodu $B = (3\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ bol $B' = (1, 2)$;
c) obraz bodu $B = (2, 5)$ bol súmerný k bodu B podľa osi o_y;

d) obraz osi o_y bol rovnobežný s priamkou $3x - 4y + 10 = 0$;
e) aby platilo $x^2 - y^2 = 2x'y'$.

726. Ukážte, že nasledujúce transformačné rovnice sú rovnice zhodnosti a vyšetrite bližšie túto zhodnosť:
a) $x' = x + 3$, $y' = y - 3$;
b) $x' = x/2 + \sqrt{3}y/2 - 2$, $y' = -\sqrt{3}x/2 + y/2 - 1$;
c) $x' = 3x/5 - 4y/5 + 3$, $y' = -4x/5 - 3y/5 + 6$.

727. Nájdite rovnice zhodnosti a obraz bodu $P = (2, -3)$, ak pre obraz počiatku O' a uhol $\alpha = \sphericalangle\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}'$ platí:
a) $O' = (-3, 3)$, $\alpha = \pi/3$;
b) $O' = (3, -4)$, $\cos\alpha = 12/13$; $\sin\alpha = -5/13$;
c) $O' = (2, 3)$, $\alpha = -\pi/4$.

728. Pre aké čísla a, b je afinná transformácia
$$x' = 2x/3 + 2by + 2,$$
$$y' = 2bx - ay + 1,$$
zhodnosťou?

729. Nájdite rovnice zhodnosti, ak obraz počiatku O je $O' = (1, -2)$ a pre uhol $\alpha = \sphericalangle\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}'$ platí $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$. Nájdite bod N, pre ktorý je $N' = N$.

730. Štvorec má vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$. Nájdite takú zhodnosť, aby obrazom počiatku O bol stred štvorca a platilo $D' = (p, 0)$, kde $p > 0$.

731. Nájdite obraz priamky $2x + y - 7 = 0$ pri zhodnosti určenej obrazom bodu O, $O' = (4, 1)$ a uhlom $\alpha = \sphericalangle\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}'$, pričom $\cos\alpha = -4/5$, $\sin\alpha = 3/5$.

732. Zhodnosť je zložená z posunutia určeného bodom $O' = (-2, 5)$, z otočenia pravouhlého súradnicového systému o uhol $\pi/2$ a zo súmernosti podľa osi o_x. Nájdite obrazy osí kvadrantov.

733. Pomocou vhodnej zhodnosti nájdite rovnice strán rovnostranného trojuholníka, ak rovnica jednej strany tohto trojuholníka je $x + 3y = 0$ a ťažisko $T = (2, 4)$.

734. Pomocou vhodnej zhodnosti nájdite rovnice strán pravidelného n-uholníka, ak jedna strana má rovnicu $ax + by + c = 0$ a stred tohto n-uholníka je $S = (u, v)$.

735. Polárny a pravouhlý súradnicový systém majú spoločný počiatok, jednotkové body J_1 a J a bod $K = J_2$. Nájdite:
a) pravouhlé súradnice bodov daných v polárnom súradnicovom systéme, ak $A = (3, \pi/2)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 1)$, $D = (\pi, 2)$, $E = (2, 3\pi/2)$, $F = (6, 5\pi/6)$;
b) polárne súradnice bodov daných v pravouhlom súradnicovom systéme, ak $A = (0, 4)$, $B = (-2, 0)$, $C = (1, \sqrt{3})$, $D = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $E = (1, \pi)$, $F = (-2, 2\sqrt{3}/3)$, $G = (3, -3\sqrt{3})$.

736. Počiatok polárneho súradnicového systému má pravouhlé súradnice $O_1 = (2, 3)$, bod $J = (3, 3)$ a bod $K = (2, 4)$. Nájdite polárne súradnice bodov $A = (5, 3)$, $B = (2, 2)$, $C = (2, 5)$, $D = (2 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$ a $E = (2, 3 - \sqrt{3})$. Nájdite pravouhlé súradnice bodov $F = (5, \pi/3)$, $G = (2, 3\pi/4)$.

737. Nájdite pravouhlé súradnice bodov $A = (2, \pi/4)$, $B = (1, -\pi/4)$, $C = (5, 3\pi/4)$, $D = (3, -\pi/12)$, ak pravouhlý a polárny súradnicový systém majú spoločný počiatok a jednotkový bod na polárnej osi má pravouhlé súradnice $J = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ a bod $K = (0, 1)$.

4,10. Kružnica

Kružnicou nazývame množinu všetkých bodov X roviny, ktorých vzdialenosť r $(r > 0)$ od bodu S roviny je konštantná. Bod S nazývame stredom kružnice a vzdialenosť $r = \varrho(X, S)$ polomerom kružnice.

Vlastnosti:

1. Ak v pravouhlom súradnicovom systéme kružnica má stred $S = (m, n)$ a polomer kružnice je r *(obr. 48)*, jej rovnica je

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2. \tag{1}$$

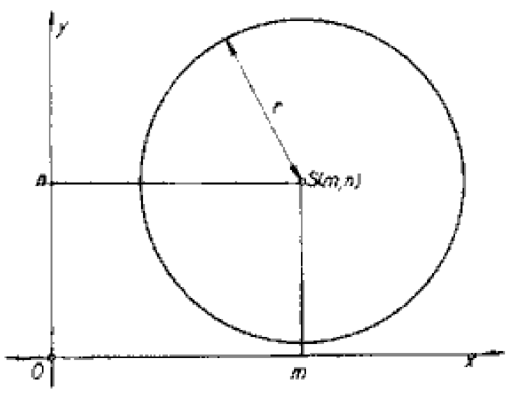
Ak $S = (0, 0)$, rovnica kružnice je

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

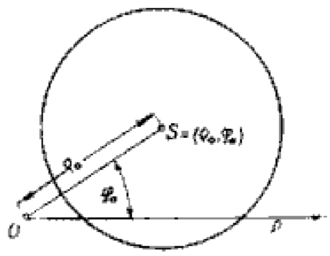
2. *Parametrické rovnice* kružnice (1) sú

$$\left.\begin{aligned} x &= m + r\cos t, \\ y &= n + r\sin t, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kde pre parameter t platí $0 \leq t \leq 2\pi$.



Obr. 48



Obr. 49

3. Ak v polárnom súradnicovom systéme je stred kružnice $S = (\varrho_0, \varphi_0)$ a polomer kružnice je r *(obr. 49)* kružnica má rovnicu

$$\varrho^2 - 2\varrho\varrho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \varrho_0^2 = r^2. \tag{3}$$

4. Bod X roviny nazývame *vnútorným bodom* kružnice (1), ak platí

$$\varrho(X, S) < r,$$

vonkajším bodom, ak platí

$$\varrho(X, S) > r.$$

Príklad 1. Kružnica má stred $S = (2, 0)$ a polomer $r = 3$. Nájdime jej rovnicu:

a) v pravouhlom súradnicovom systéme;
b) v polárnom súradnicovom systéme, ak polárna os je totožná s kladnou časťou osi o_x;
c) v parametrickom tvare.

Riešenie. a) Rovnica kružnice v pravouhlom súradnicovom systéme podľa (1) je

$$(x - 2)^2 + y^2 = 9$$

alebo po úprave

$$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0.$$

b) Rovnica kružnice v polárnom súradnicovom systéme podľa (3) je

$$\varrho^2 - 4\varrho\cos\varphi + 4 = 9,$$

alebo po úprave

$$\varrho^2 - 4\varrho\cos\varphi - 5 = 0.$$

c) Parametrické rovnice kružnice podľa (2) sú

$$x = 2 + 3\cos t, \quad y = 3\sin t,$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Príklad 2. Nájdime stred a polomer kružnice, ktorej rovnica je

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0.$$

Riešenie. Danú rovnicu kružnice upravíme na tvar (1). Máme $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 4$. Úpravou na súčet štvorcov dostaneme $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$. Porovnaním s rovnicou (1) dostaneme, že stred kružnice je $S = (1, -3)$ a polomer $r = 2$.

738. Nájdite rovnicu kružnice, ak

a) $S = (7, -3)$, $r = 6$;
b) $S = (4, -5)$ a kružnica prechádza bodom $A = (6, -1)$;
c) priemer kružnice je určený bodmi $A = (3, 5)$, $B = (-1, -3)$;
d) má stred v bode $A = (5, 4)$ a dotýka sa priamky $5x - 12y - 24 = 0$;
e) prechádza bodmi $B = (6, 1)$, $C = (2, 3)$ a jej stred leží na priamke $3x - y - 11 = 0$;
f) prechádza troma bodmi $A = (3, -2)$, $B = (2, -9)$, $C = (9, -2)$.

739. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá:

a) dotýká sa osi o_y v počiatku pravouhlého súradnicového systému a pretína os o_x v bode $A = (-8, 0)$;
b) dotýká sa osi o_x v počiatku pravouhlého súradnicového systému a pretína os o_y v bode $A = (0, 6)$;
c) dotýká sa obidvoch súradnicových osí a prechádza bodom $M = (2, 4)$;
d) prechádza bodmi $A = (-1, -3)$ a $B = (3, 5)$, ak jej stred leží na osi o_x;
e) prechádza bodmi $A = (2, 5)$, $B = (3, 2)$ a jej stred leží na osi o_y;
f) má stred v bode $A = (5/2, 0)$ a priemer 7.

740. Nájdite rovnicu kružnice opísanej trojuholníku, ktorého vrcholy sú $A = (1, -1)$, $B = (7, 7)$, $C = (11, -1)$.

741. Strany trojuholníka majú rovnice $x + 7y - 56 = 0$, $x - 3y + 14 = 0$, $2x - y + 8 = 0$. Napíšte rovnicu kružnice opísanej trojuholníku.

742. Stred kružnice je v bode $C = (0, 3)$ a kružnica pretína priamku $2x + 3y + 6 = 0$ v bode, ktorého prvá súradnica je -3. Napíšte rovnicu tej kružnice.

743. Kružnica vytína na priamke $x + 2y - 3 = 0$ tetivu dĺžky 8. Nájdite rovnicu kružnice, ak jej stred je $S = (5, 4)$.

744. Napíšte rovnicu kružnice, ktorej priemerom je časť priamky $2x + 5y - 10 = 0$, medzi súradnicovými osami pravouhlého súradnicového systému.

745. Nájdite rovnicu kružnice, ktorá sa dotýka priamky $3x - y + 4 = 0$ v bode $A = (-1, 1)$, a

a) jej polomer $r = 7$; b) priamky $3x - y - 14 = 0$.

746. Napíšte rovnicu kružnice, ktorej stred leží na priamke $x - 3y - 2 = 0$ a ktorá sa dotýka priamky $4x - 3y + 17 = 0$ v bode $A = (-2, 3)$.

747. Nájdite rovnicu kružnice, ktorá sa dotýka rovnobežiek $8x - 15y + 17 = 0$, $8x - 15y + 51 = 0$ a

a) stred kružnice leží na priamke $3x + 2y = 0$;
b) kružnica prechádza bodom $A = (-3/2, 2)$.

748. Nájdite rovnicu kružnice, ktorá sa dotýka priamok $x + 3y - 10 = 0$, $3x - y + 6 = 0$ a

a) dotýká sa jednej z nich v bode $A = (-1, 3)$;
b) jej stred leží na priamke $x + y - 7 = 0$;
c) dotýka sa priamky $3x + y - 2 = 0$;
d) prechádza bodom $B = (6/5, 12/5)$.

749. Nájdite rovnicu kružnice vpísanej do trojuholníka, ktorého strany sú $15x + 8y + 85 = 0$, $12x + 5y - 65 = 0$, $4x - 3y - 25 = 0$.

750. Dané sú rovnice:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 10 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 5x + 4y = 0$;
c) $2x^2 + 2y^2 + 5x - 3y + 2 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 15 = 0$;
e) $x^2 + y^2 + 2x = 0$;
f) $x^2 + y^2 - 4y + 8 = 0$.

Zistite, ktorá z nich je rovnica kružnice a nájdite jej stred a polomer.

751. Aké množiny bodov v rovine majú analytické vyjadrenie:

a) $y = -\sqrt{49 - x^2}$;
b) $x = \sqrt{25 - y^2}$;
c) $x = 2 - \sqrt{16 - y^2}$;
d) $y = 3 + \sqrt{40 - 6x - x^2}$;
e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0, 2x - 3 < 0$;
f) $x^2 + y^2 - 2x = 0,\ x + y \geqq 0$;
g) $x^2 + y^2 - 4y \leqq 0$;
h) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 \geqq 0$.

752. Vyšetrite polohu bodov $A = (-3, 0)$, $B = (0, 5)$, $C = (4, 2)$, $D = (2, 7)$, $E = (-4, 6)$, $F = (3, -1)$, $G = (-2, 3)$ vzhľadom na kružnicu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

753. Nájdite rovnicu priamky určenej stredmi kružníc:

a) $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 36$, $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$;
b) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 3 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$.

754. Nájdite rovnicu priemeru kružnice $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$, ak priemer

a) je kolmý na priamku $3x - 4y + 11 = 0$;
b) prechádza stredom tetivy, ktorá má rovnicu $x - 2y - 4 = 0$.

755. Nájdite najmenšiu vzdialenosť bodu N od kružnice, ak

a) $N = (8, 5)$ a rovnica kružnice je $x^2 + y^2 = 16$;
b) $N = (3, 3)$ a rovnica kružnice je $x^2 + y^2 + 6x + 12y - 4 = 0$.

756. Nájdite priesečníky kružníc:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 17 = 0$, $x^2 + y^2 = 41$;
b) $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 - 18x + 56 = 0$.

757. Nájdite rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodom $A = (-3, 2)$ a priesečníkmi kružníc $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 70 = 0$.

758. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkmi kružníc $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$.

759. Nájdite vzdialenosť stredov kružníc od priamky, ktorá prechádza ich priesečníkmi, ak rovnice kružníc sú

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0, \quad x^2 + y^2 - 6x - 12y - 35 = 0.$$

760. Nájdite dĺžku spoločnej tetivy kružníc $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 42 = 0$, $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 2 = 0$.

761. Nakreslite kružnice a napíšte ich rovnice v pravouhlom súradnicovom systéme:

a) $x = 3\cos t$, $y = 2 + 3\sin t$; b) $x = -2 + \cos t$, $y = 1 + \sin t$.

762. Z polárneho tvaru rovnice kružnice nájdite polomer r a polárne súradnice stredu kružnice, ak

a) $\varrho = 6\cos\varphi$; c) $\varrho = 4\cos(\pi/4 - \varphi)$;
b) $\varrho = 3\sin\varphi$; d) $\varrho = 8\sin(\varphi - \pi/3)$.

763. Napíšte rovnicu kružnice v polárnych súradniciach, ktorá prechádza pólom a jej stred je bod:

a) $S = (2, 0)$; b) $S = (3, \pi)$; c) $S = (4, \pi/2)$.

764. Napíšte rovnicu kružnice v pravouhlom súradnicovom systéme, ak

a) $\varrho = 6\cos\varphi$; b) $\varrho = \cos\varphi - \sin\varphi$.

765. Napíšte v polárnych súradniciach rovnice kružníc:

a) $x^2 + y^2 - x = 0$; c) $x^2 + y^2 - x - y = 0$.
b) $x^2 + y^2 - 4y = 0$;

766. Dané sú body $A = (5, 3)$, $B = (13, 3)$. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov, z ktorých úsečku AB vidieť pod pravým uhlom.

767. Nájdite rovnicu množiny všetkých bodov, ktorých vzdialenosť od bodu $D = (6, 2)$ je dvakrát taká veľká ako od bodu $A = (1, 1)$.

768. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov v rovine, pre ktoré súčet štvorcov vzdialeností od bodov $A = (-6, 0)$, $B = (0, 2)$ a $C = (2, 0)$ sa rovná 40.

769. Dokážte, že množina všetkých bodov, ktorých vzdialenosť od dvoch daných bodov má konštantný pomer rôzny od 1, je kružnica.

770. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov, ktoré majú od daných n bodov stály súčet štvorcov vzdialeností.

771. Napíšte analytické vyjadrenie všetkých stredov tetív kružnice, ktoré prechádzajú vnútorným bodom M kružnice, ak rovnica kružnice je $x^2 + y^2 = 36$ a bod $M = (3, 0)$.

772. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov, z ktorých vidieť dve dané kružnice pod rovnakým uhlom. Riešte túto úlohu aj v prípade, že rovnice kružníc sú

$$x^2 + y^2 = 36, \quad (x - 12)^2 + y^2 = 9.$$

773. Nájdite množinu priesečníkov výšok všetkých trojuholníkov, ktoré majú spoločnú základňu c a rovnaký protiľahlý uhol φ.

774. Nájdite množinu všetkých bodov, ktorých štvorec vzdialenosti od základne daného rovnoramenného trojuholníka sa rovná súčinu vzdialeností od jeho ramien.

775. Daná je kružnica a dva body A, B mimo kružnice. Nájdite množinu ťažísk všetkých trojuholníkov A, B, X, ak bod X sa pohybuje po kružnici.

776. Nájdite množinu všetkých stredov jednej strany trojuholníka, ak druhá strana je pevná a tretia strana, stálej dĺžky, otáča sa okolo krajného bodu druhej strany.

777. Daný je trojuholník ABC. Nájdite množinu všetkých bodov, z ktorých spustené kolmice na strany trojuholníka majú päty na priamke.

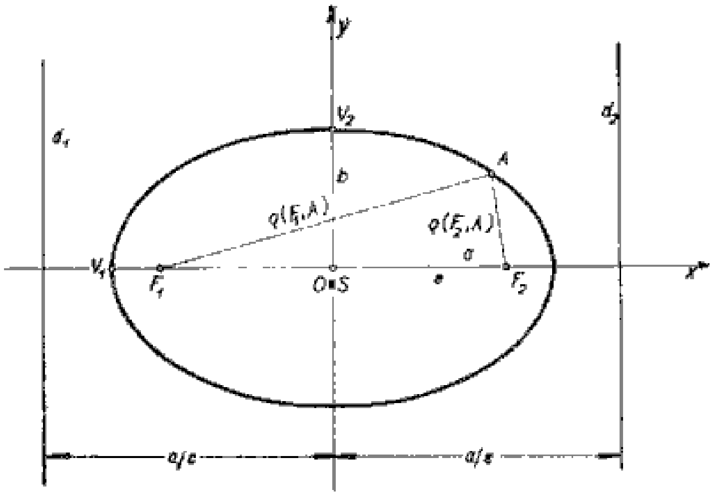
4,11. Elipsa

Nech F_1 a F_2 sú dva rôzne body v rovine, pričom $\varrho(F_1, F_2) = 2e$ a nech je dané číslo $a > e$. *Elipsa* je množina všetkých bodov X v rovine, ktoré majú od bodov F_1, F_2 stály súčet vzdialeností rovný $2a$:

$$\varrho(F_1, X) + \varrho(F_2, X) = 2a. \tag{1}$$

Body F_1, F_2 nazývame *ohniskami* elipsy a číslo e *ohniskovou vzdialenosťou (lineárnou excentricitou)*. Elipsa má dve *osi súmernosti*, *hlavnú os*, ktorá je určená ohniskami F_1, F_2 a vedľajšiu os, ktorá je osou súmernosti F_1, F_2. Priesečník osí elipsy S je *stred* elipsy. Priesečníky elipsy s jej osami nazývame *vrcholmi elipsy*. Ak V_1 je vrchol elipsy na hlavnej osi elipsy, potom číslo $a = \varrho(S, V_1)$ nazývame *dĺžkou hlavnej polosi*; ak V_2 je vrchol na vedľajšej osi, číslo $b = \varrho(S, V_2)$ nazývame *dĺžkou vedľajšej polosi*. Číslo

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \tag{2}$$



Obr. 50

nazývame *výstrednosťou (numerickou excentricitou)* elipsy.

Priamky d_1, d_2 rovnobežné s vedľajšou osou elipsy, ktoré majú od vedľajšej osi elipsy vzdialenosť a/ε, nazývame *direkčnými* (určujúcimi) priamkami elipsy *(obr. 50)*.

Vlastnosti:

1. $a > b, \quad a^2 = e^2 + b^2;$ (3)
2. $\varepsilon < 1.$ (4)
3. Pre každý bod X elipsy platí

$$\frac{\varrho(F, X)}{\varrho(X, d)} = \varepsilon, \tag{5}$$

kde F, d ležia v jednej polrovine vzhľadom na vedľajšiu os elipsy.

4. Ak v pravouhlom súradnicovom systéme je stred elipsy $S = (0, 0)$ a hlavná os elipsy leží v osi o_x, rovnica elipsy je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Ak hlavná os elipsy leží v osi o_y a jej stred je $S = (0, 0)$, rovnica elipsy je

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{7}$$

Rovnice (6), (7) nazývame *osovými rovnicami elipsy*.

5. Rovnica elipsy, ktorá má stred $S = (m, n)$ a hlavnú os rovnobežnú s osou o_x, je

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Rovnica elipsy, ktorá má stred $S = (m, n)$ a hlavnú os rovnobežnú s osou o_y, je

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1. \tag{9}$$

6. Parametrické rovnice elipsy danej rovnicou (8) sú

$$\begin{aligned} x &= m + a\cos t, \\ y &= n + b\sin t, \end{aligned} \tag{10}$$

kde pre parameter t platí $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Ak v polárnom súradnicovom systéme je $F_1 = (0, 0)$, $F_2 = (2e, 0)$, polárna rovnica elipsy je

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{11}$$

kde ε je excentricita a p parameter elipsy, pričom platí

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{12}$$

Geometrický význam parametra p. Číslo p je prvá polárna súradnica bodu M elipsy, ktorý má druhú polárnu súradnicu $\varphi = \pi/2$ (pozri *obr. 51*).

8. Ak elipsa je daná rovnicou (6), potom rovnice direkčných priamok sú

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \qquad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{13}$$

9. Ak elipsa je daná rovnicou (6), pre každý bod elipsy $A = (x, y)$ platí

$$\varrho(F_1, A) = a + \varepsilon x, \qquad \varrho(F_2, A) = a - \varepsilon x. \tag{14}$$

10. Majme elipsu a ľubovoľný bod roviny $M = (x, y)$. Bod M je vnútorným bodom elipsy, ak platí

$$\varrho(F_1, M) + \varrho(F_2, M) < 2a. \tag{15}$$

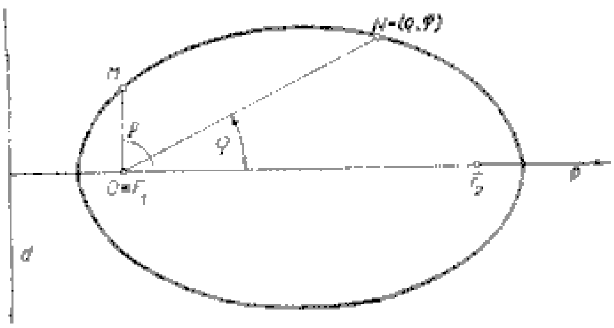
Bod M je vonkajším bodom elipsy, ak platí

$$\varrho(F_1, M) + \varrho(F_2, M) > 2a. \tag{16}$$

Ak elipsa je daná rovnicou (6), potom podmienky (15) a (16) majú tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \tag{17}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1. \tag{18}$$



Obr. 51

Príklad 4. Napíšme osovú rovnicu elipsy, ak vzdialenosť direkčných priamok je 13 a dĺžka vedľajšej polosi je 3.

Riešenie. Zo vzťahov (13) vyplýva, že $2a/\varepsilon = 13$ a podľa (2) je $a^2/e = 13/2$. Z (3) dostaneme

$$\frac{(e^2 + b^2)}{e} = \frac{13}{2}$$

a po úprave $2e^2 - 13e + 18 = 0$. Riešením poslednej rovnice dostaneme

$$e_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{4}.$$

Pre ohniskové vzdialenosti dostaneme dve riešenia $e_1 = 2$, $e_2 = 9/2$. Podľa (3) dostaneme aj pre dĺžku hlavnej polosi dve riešenia

$$a_1^2 = 4 + 9 = 13,$$
$$a_2^2 = 81/4 + 9 = 117/4.$$

Rovnice oboch elíps podľa (6) sú

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{117/4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

alebo

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1, \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{117/4} = 1.$$

Príklad 2. Ukážme, že rovnica

$$16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$$

je rovnicou elipsy. Nájdime jej stred, ohniská, dĺžku oboch polosí, vrcholy, výstrednosť, rovnice direkčných priamok a parametrické rovnice tejto elipsy.

Riešenie. Danú rovnicu upravíme na tvar (8). Máme

$$16x^2 + 32x + 25y^2 - 100y = 284,$$

alebo

$$16(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 - 4y + 4) = 284 + 16 \cdot 1 + 25 \cdot 4,$$
$$16(x + 1)^2 + 25(y - 2)^2 = 400,$$

z toho

$$\frac{(x + 1)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1,$$

čo je rovnica tvaru (8). Porovnaním s rovnicou (8) máme

$$m = -1, \qquad n = 2, \qquad a^2 = 25, \qquad b^2 = 16,$$

odkiaľ $a = 5$, $b = 4$.

Podľa (3) dostaneme $25 = e^2 + 16$, z toho je $e = 3$. Stred elipsy je $S = (-1, 2)$, ohniská sú $F_1 = (2, 2)$, $F_2 = (-4, 2)$, vrcholy elipsy sú $V_1 = (4, 2)$, $V_2 = (-1, 6)$, $V_3 = (-6, 2)$, $V_4 = (-1, -2)$.

Pre výstrednosť podľa (2) platí $\varepsilon = 3/5$. Rovnice direkčných priamok sú

$$x + 1 = \frac{5}{3/5}, \qquad x + 1 = -\frac{5}{3/5},$$

alebo

$$x = \frac{22}{3}, \qquad x = -\frac{28}{3}.$$

Parametrické rovnice elipsy podľa (10) sú

$$x = -1 + 5 \cos t,$$
$$y = 2 + 4 \sin t, \qquad 0 \leqq t \leqq 2\pi.$$

Príklad 3. Elipsa má v polárnom súradnicovom systéme ohniská $F_1 = (0, 0)$, $F_2 = (2e, 0)$. Excentricita elipsy $\varepsilon = 2/5$, vzdialenosť bodu M elipsy od direkčnej priamky d_1 je 20 a od direkčnej priamky d_2 je 30. Nájdime vzdialenosť bodu M od oboch ohnísk a napíšme polárnu rovnicu tejto elipsy.

Riešenie. Podľa vzťahu (5) platí

$$\frac{\varrho(M, F_1)}{\varrho(M, d_1)} = \varepsilon,$$

kde $F_1 = (0, 0)$ a d_1 je direkčná priamka elipsy, ktorá leží na tej istej strane vedľajšej osi elipsy ako ohnisko F_1. Z toho vyplýva

$$\frac{\varrho(M, F_1)}{20} = \frac{2}{5},$$

$$\varrho(M, F_1) = 8.$$

Podobne je

$$\frac{\varrho(M, F_2)}{\varrho(M, d_2)} = \varepsilon$$

a z toho

$$\frac{\varrho(M, F_2)}{30} = \frac{2}{5} \qquad \text{alebo} \qquad \varrho(M, F_2) = 12.$$

Z definície elipsy vyplýva $2a = \varrho(M, F_1) + \varrho(M, F_2) = 8 + 12$. Z toho $a = 10$. Podľa vzťahov (2) a (3) je

$$e = a\varepsilon = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4,$$

$$b^2 = a^2 - e^2 = 100 - 16 = 84.$$

Podľa vzťahu (12) dostaneme

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{84}{10} = 8{,}4.$$

Polárna rovnica elipsy je

$$\varrho = \frac{8{,}4}{1 - 0{,}4 \cos \varphi}.$$

778. Nájdite rovnicu elipsy, ktorá má ohniská $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$, ak
a) dĺžky jej polosí sú 7, 4;
b) dĺžka vedľajšej polosi je 11 a vzdialenosť ohnísk je 16;
c) vzdialenosť ohnísk $\varrho(F_1, F_2) = 32$ a excentricita $\varepsilon = 8/17$;
d) dĺžka vedľajšej polosi je 6 a excentricita $\varepsilon = 4/5$;
e) vzdialenosť ohnísk $\varrho(F_1, F_2) = 10$ a vzdialenosť direkčných priamok je 338/5;
f) vzdialenosť vrcholov na vedľajšej osi je 8 a vzdialenosť direkčných priamok je 20;
g) výstrednosť $\varepsilon = 3/4$ a vzdialenosť direkčných priamok je 24.

779. Nájdite rovnicu elipsy, ktorá má ohniská $F_1 = (0, -e)$, $F_2 = (0, e)$, ak
a) dĺžky jej polosí sú 16, 9;
b) vzdialenosť vrcholov na hlavnej osi je 50 a vzdialenosť ohnísk $\varrho(F_1, F_2) = 14$;
c) vzdialenosť ohnísk je 48 a výstrednosť $\varepsilon = 12/37$;
d) dĺžka vedľajšej polosi je 15 a výstrednosť $\varepsilon = 12/13$;
e) vzdialenosť ohnísk je 80 a vzdialenosť direkčných priamok je 84,05;
f) vzdialenosť direkčných priamok je 38 a $\varepsilon = 12/19$.

780. Nájdite rovnicu elipsy, ak
a) jej ohniská sú $F_1 = (-3, 5)$, $F_2 = (5, 5)$ a excentricita $\varepsilon = 4/5$;
b) vrcholy na vedľajšej osi sú $V_3 = (6, 2)$, $V_4 = (6, -8)$ a excentricita $\varepsilon = 12/13$;

c) jej ohniská sú $F_1 = (-3, 2)$, $F_2 = (1, 2)$ a direkčná priamka má rovnicu $x = -3{,}5$;
d) vrcholy na hlavnej osi sú $V_1 = (-2, 1)$, $V_3 = (6, 1)$ a rovnica direkčnej priamky je $x = 10$;
e) jej ohniská sú $F_1 = (-2, 3)$, $F_2 = (4, 3)$ a vrchol na vedľajšej osi $V_2 = (1, 7)$.

781. Nájdite rovnicu elipsy, ak
a) vrchol na hlavnej osi je $V_1 = (5, 6)$ a ohniská sú $F_1 = (5, 4)$, $F_2 = (5, -6)$;
b) vrcholy na vedľajšej osi sú $V_2 = (-7, 3)$, $V_4 = (9, 3)$ a excentricita $\varepsilon = 3/5$;
c) ohniská sú $F_1 = (5, -2)$, $F_2 = (5, 4)$ a direkčná priamka má rovnicu $y = 28/3$;
d) výstrednosť $\varepsilon = 3/4$, stred $S = (4, 2)$ a direkčná priamka má rovnicu $y = 22/3$;
e) vrcholy na vedľajšej osi sú $V_2 = (3, 7)$, $V_4 = (-5, 7)$ a ohnisko je $F_1 = (-1, 4)$.

782. Nájdite rovnicu elipsy, ktorá má ohniská $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$, alebo $F_1' = (0, -e)$, $F_2' = (0, e)$, ak je daný:
a) bod elipsy $M = (-2, \sqrt{20})$, a $e = 3\sqrt{3}$;
b) bod elipsy $M = (10, 4\sqrt{5})$, a $\varrho(M, F_2) = 21$;
c) bod elipsy $M = (9; 9{,}6)$ a vzdialenosť direkčných priamok je 50;
d) bod elipsy $M = (4, 1)$ a $\varepsilon = 1/4$;
e) bod elipsy $A = (-2, 1)$ a $B = (1, 5/2)$.

783. Nájdite rovnicu elipsy, ktorá má osi rovnobežné so súradnicovými osami a dotýka sa oboch súradnicových osí, ak
a) jej stred $S = (6, -4)$;
b) osi o_x sa dotýka v bode $A = (-4, 0)$ a osi o_y sa dotýka v bode $B = (0, 5)$.

784. Nájdite dĺžku polosí, ohniská, výstrednosť a rovnice direkčných priamok elipsy, danej rovnicou:
a) $x^2 + 4y^2 = 4$;
b) $x^2/25 + y^2/9 = 1$;
c) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$;
d) $2x^2 + 9y^2 = 1$;
e) $64x^2 + 25y^2 = 400$.

785. Zistite, či rovnica
a) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 444 = 0$;
b) $9x^2 + 4y^2 + 40y - 36x + 152 = 0$;
c) $x^2 + 16y^2 - 16x - 32y + 64 = 0$;
d) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 23 = 0$,

je rovnicou elipsy. Ak ide o elipsu, nájdite jej stred, ohniská, excentricitu, vrcholy, direkčné priamky a parametrické rovnice.

786. Parametrické rovnice elipsy sú:
a) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a > 0$, $b > 0$;
b) $x = 2 + 3\cos t$, $y = 5 + 4\sin t$.

Nájdite jej rovnice v pravouhlých súradniciach.

787. Nájdite polárne rovnice elipsy z úlohy **784**, ak v polárnom súradnicovom systéme
a) ohniská elipsy sú $F_1 = (0, 0)$, $F_2 = (2e, 0)$;

b) ohniská elipsy sú $F_1 = (0, 0)$, $F_2 = (2e, \pi)$.

788. Polárna rovnica kužeľosečky je $\varrho(5 - 3\cos\varphi) = 16$. Nájdite jej rovnicu v pravouhlom súradnicovom systéme, keď osi pravouhlého súradnicového systému ležia v osiach symetrie kužeľosečky.

789. Vypočítajte dĺžky polosí a vzdialenosť medzi ohniskami elipsy $\varrho = \dfrac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}$.

790. Nájdite polárnu rovnicu elipsy, ktorá má ohniská $F_1 = (0, 0)$, $F_2 = (2e, 0)$, ak
a) vzdialenosti bodu M elipsy od oboch direkčných priamok sú 15 a 45 a výstrednosť $\varepsilon = 3/4$;
b) vzdialenosť bodu M elipsy od direkčnej priamky d_1 je 25, $\varrho(M, F_2) = 15$ a výstrednosť $\varepsilon = 1/2$.

791. Nájdite výstrednosť ε elipsy, ak
a) uhol $\sphericalangle V_2F_2V_4 = \pi/6$;
b) uhol $\sphericalangle F_1V_2F_2 = \pi/2$;
c) uhol $\sphericalangle V_1V_2V_3 = 2\pi/3$;
d) uhol $\sphericalangle V_2V_3V_4 = \pi/3$;
e) vzdialenosť ohnísk je päťkrát menšia ako vzdialenosť direkčných priamok;
f) vzdialenosť direkčných priamok elipsy je trikrát väčšia ako vzdialenosť medzi ohniskami elipsy;
g) vedľajšiu os elipsy vidieť z ohnísk pod pravým uhlom.

792. Zem sa pohybuje okolo Slnka po elipse. V jednom jej ohnisku je Slnko. Najmenšia vzdialenosť Zeme od Slnka má sa k najväčšej vzdialenosti ako 29 : 30. Nájdite jej excentricitu ε.

793. Na elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ nájdite všetky body, ktoré majú
a) x-ové súradnice -4;
b) y-ové súradnice 3.

794. Nájdite obsah štvoruholníka, ktorého vrcholy sú ohniská a vrcholy vedľajšej osi elipsy, ak elipsa má rovnicu
a) $16x^2 + y^2 = 16$;
b) $9x^2 + 25y^2 = 1$;
c) $x^2 + 5y^2 = 15$;
d) $5x^2 + 9y^2 - 30x - 18y + 9 = 0$;
e) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

795. Na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ nájdite bod, ktorého vzdialenosť od jedného ohniska je 4krát väčšia ako vzdialenosť od druhého ohniska.

796. Nájdite bod M elipsy $x^2/121 + y^2/49 = 1$, pre ktorý platí:
a) $\varrho(M, F_1) = 10$; b) $\varrho(M, F_2) = 4$.

797. Nájdite vzdialenosť bodu $A = (2, -3\sqrt{21}/5)$ od ohnísk elipsy $9x^2 + 25y^2 = 225$.

798. Rovnica elipsy je $16x^2 + 25y^2 = 400$. Nájdite rovnice priamok, ktoré prechádzajú bodom elipsy $M = (-2, 4; 4)$ a jej ohniskami.

799. Nájdite rovnice priamok, ktoré prechádzajú stredom kružnice $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 25 = 0$ a ohniskami elipsy $5x^2 + 9y^2 = 45$.

800. Dané sú body $A = (1, -3)$, $B = (1, 4)$, $C = (-3, -5)$. Zistite ich polohu vzhľadom na elipsu $25x^2 + 9y^2 = 450$.

801. Rovnica elipsy je $3x^2 + 11y^2 = 41$. Zistite, ktoré z bodov $A = (6, 3)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 3)$, $D = (3, -2)$, $E = (-2, 4)$, $F = (0, 5/2)$ ležia vnútri elipsy, resp. vonku z elipsy.

802. Nájdite a znázornite množinu bodov, ktorá má analytické vyjadrenie:

a) $y = -\frac{2}{7}\sqrt{9 - x^2}$;

b) $y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}, \ x > 0$;

c) $x = -\frac{1}{8}\sqrt{16 - y^2}$;

d) $x = \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}, \ y < 0$;

e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqq 36$;

f) $\varrho = \frac{25}{5 - 2\cos\varphi}, \ 0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$;

g) $\varrho = \frac{3}{4 + 2\cos\varphi}, \quad \pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

803. Daná je kružnica $x^2 + y^2 = 4a^2$. Napíšte analytické vyjadrenie množiny všetkých stredov y-ových súradníc bodov kružnice.

804. Bod M sa pohybuje po elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Nájdite analytické vyjadrenie ťažísk všetkých trojuholníkov A_1MA_2, ak body A_1 a A_2 ležia na jednej z osí elipsy.

805. Nájdite analytické vyjadrenie stredov všetkých tetív elipsy $x^2 + 4y^2 = 25$, ktoré prechádzajú bodom $A = (-3, 2)$. Znázornite.

806. Napíšte analytické vyjadrenie množiny stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú kružníc $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

807. Nájdite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú danej kružnice a prechádzajú bodom A, ktorý leží vo vnútri tejto kružnice.

808. Dve sústredné kružnice so stredom $S = (0, 0)$ majú polomery a a b $(a \neq b)$. Každá polpriamka s počiatkom v bode S pretína vonkajšiu kružnicu v bode A, vnútornú v bode B. V bode B zostrojme rovnobežku s osou o_x, v bode A rovnobežku s o_y a zostrojme ich priesečník P. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých priesečníkov P.

809. Ľubovoľný bod M elipsy spojme s ohniskami F_1, F_2. Nájdite analytické vyjadrenie množiny stredov všetkých kružníc vpísaných do trojuholníkov F_1F_2M.

810. Nájdite rovnicu dráhy bodu M, ktorý sa pohybuje tak, že jeho vzdialenosť od priamky $x = 9$ je vždy 3-krát väčšia ako od bodu $A = (1, 0)$.

811. Po kružnici s polomerom r sa znútra kotúľa kružnica s polomerom $r/2$. Akú dráhu opisuje stred polomeru tejto kružnice?

812. Úsečka dĺžky $a + b$ sa pohybuje koncovými bodmi po súradnicových osiach pravouhlého súradnicového systému. Nájdite dráhu bodu M, ktorý delí úsečku v pomere $a : b$ (elipsograf Leonarda da Vinciho).

4,12. Hyperbola

Nech F_1, F_2 sú dva rôzne body roviny, pričom $\varrho(F_1, F_2) = 2e$ a a je kladné číslo, $a < e$. *Hyperbolou* nazývame množinu všetkých bodov X v rovine, pre ktoré absolútna hodnota rozdielu vzdialenosti bodov F_1 a X a vzdialenosti bodov F_2 a X sa rovná $2a$, t. j. platí

$$|\varrho(F_1, X) - \varrho(F_2, X)| = 2a, \tag{1}$$

(pozri *obr. 52*).

Body F_1, F_2 nazývame *ohniskami* hyperboly a číslo e *ohniskovou vzdialenosťou (lineárnou excentricitou)*.

Hyperbola má dve osi súmernosti: *hlavnú* alebo *reálnu os*, prechádzajúcu ohniskami F_1, F_2, a *vedľajšiu* alebo *imaginárnu os*, ktorá je osou symetrie bodov F_1, F_2. Priečník S hlavnej a vedľajšej osi nazývame *stredom* hyperboly. Priečníky V_1, V_2 hlavnej osi s hyperbolou nazývame *vrcholmi* hyperboly. S vedľajšou osou hyperbola nemá nijaký spoločný bod.

Číslo $a = \varrho(S, V_1) = \varrho(S, V_2)$ nazývame *dĺžkou hlavnej polosi*. Číslo

$$b = \sqrt{e^2 - a^2}, \tag{2}$$

nazývame *dĺžkou vedľajšej polosi*, kde pre ohniskovú vzdialenosť e platí

$$e = \varrho(S, F_1).$$

Číslo

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \tag{3}$$

nazývame *numerickou excentricitou (číselnou výstrednosťou)* hyproboly.

Priamky d_1, d_2 rovnobežné s vedľajšou osou hyperboly, ktoré majú od nej vzdialenosť a/ε nazývame *direkčnými (určujúcimi) priamkami* hyperboly. Priamky, ktoré prechádzajú uhlopriečkami obdĺžnika so stranami $2a$, $2b$, pričom stredy dvoch protiľahlých strán tohto obdĺžnika sú vrcholy hyperboly, nazývame *asymptotami* hyperboly.

Vlastnosti:

1. $\varepsilon > 1$. (4)

2. Pre každý bod X hyperboly platí

$$\frac{\varrho(F_1, X)}{\varrho(X, d_1)} = \frac{\varrho(F_2, X)}{\varrho(X, d_2)} = \varepsilon, \tag{5}$$

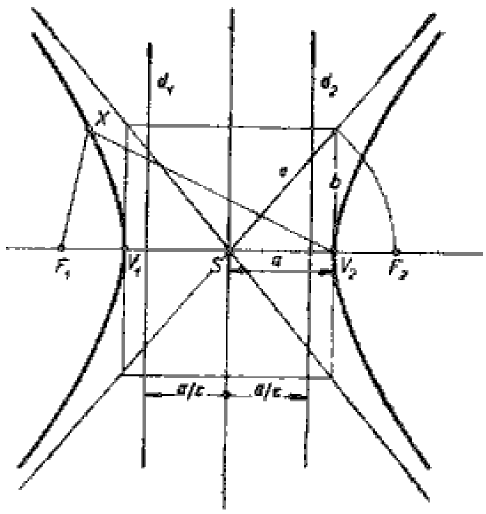
kde F_1, d_1 ležia v jednej polrovine a F_2, d_2 v druhej polrovine vzhľadom na vedľajšiu os hyperboly.

3. Ak v pravouhlom súradnicovom systéme je $S = (0, 0)$ a reálna os hyperboly leží v osi o_x, rovnica hyperboly je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6a}$$

Ak reálna os hyperboly leží v osi o_y a jej stred je $S = (0, 0)$, rovnica hyperboly je

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{6b}$$



Obr. 52

Rovnice (6a), (6b) nazývame *osovými rovnicami* hyperboly.

4. Rovnica hyperboly, ktorej stred je $S = (m, n)$ a reálna os je rovnobežná s osou o_x je

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1. \tag{7a}$$

Rovnice hyperboly, ktorej stred je $S = (m, n)$ a reálna os je rovnobežná s osou o_y je

$$-\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1. \tag{7b}$$

5. *Parametrické rovnice* hyperboly danej rovnicou (7a) sú

$$\left.\begin{aligned} x &= m + \frac{a}{\cos t}, \\ y &= n + b \operatorname{tg} t, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

kde pre parameter t platí

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

6. Ak v polárnom súradnicovom systéme je ohnisko $F_1 = (2e, \pi)$ a $F_2 = (0, 0)$, rovnica vetvy hyperboly bližšej k F_1 je

$$\varrho = \frac{p}{-1 - \varepsilon \cos \varphi} \tag{9a}$$

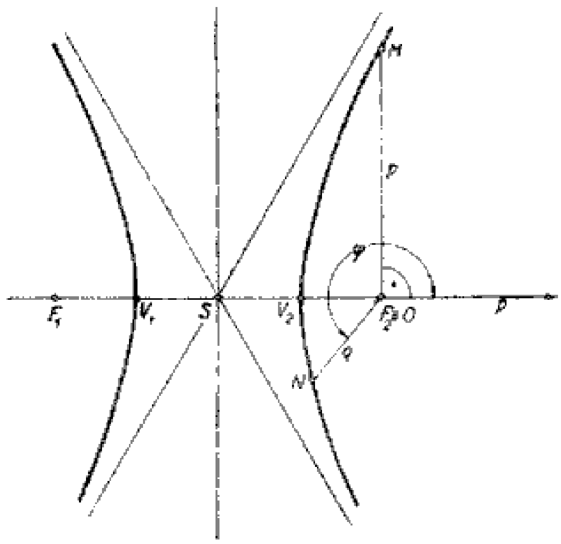
a rovnica vetvy hyperboly bližšej ku F_2 je

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \tag{9b}$$

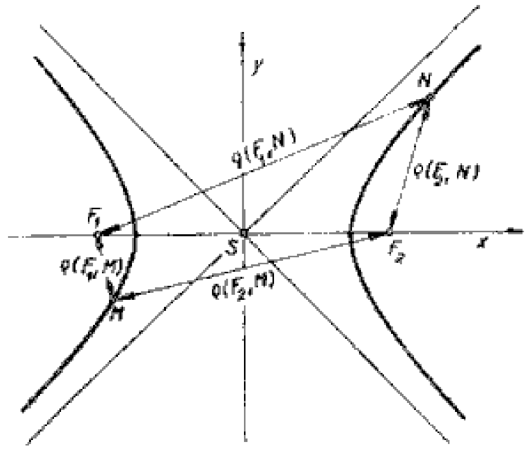
kde ε je excentricita hyperboly a p je parameter hyperboly, pričom platí

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{10}$$

Geometrický význam parametra p. Číslo p je polárny sprievodič bodu M hyperboly (9b), ktorého amplitúda $\varphi = \pi/2$ (pozri *obr. 53*).



Obr. 53



Obr. 54

7. Rovnice direkčných priamok hyperboly (6a) sú

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \qquad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{11}$$

8. Rovnice asymptot hyperboly (6a) sú

$$y = \frac{b}{a} x, \qquad y = -\frac{b}{a} x. \tag{12}$$

9. Nech $M = (x, y)$, kde $x \leqq -a$ je bod hyperboly (6a), potom platí *(obr. 54)*

$$\varrho(F_1, M) = -a - \varepsilon x, \quad \varrho(F_2, M) = a - \varepsilon x. \tag{13a}$$

Ak $N = (x, y)$, kde $x \geqq a$ je bod hyperboly (6a), tak platí:

$$\varrho(F_1, N) = a + \varepsilon x, \quad \varrho(F_2, N) = -a + \varepsilon x. \tag{13b}$$

10. Hyperboly dané rovnicami

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$

sa nazývajú *združené hyperboly.*

11. Bod $M = (x, y)$ nazývame *vnútorným bodom* hyperboly, ak platí

$$|\,\varrho(F_1, M) - \varrho(F_2, M)\,| > 2a, \tag{14a}$$

a nazývame *vonkajším bodom* hyperboly, ak platí

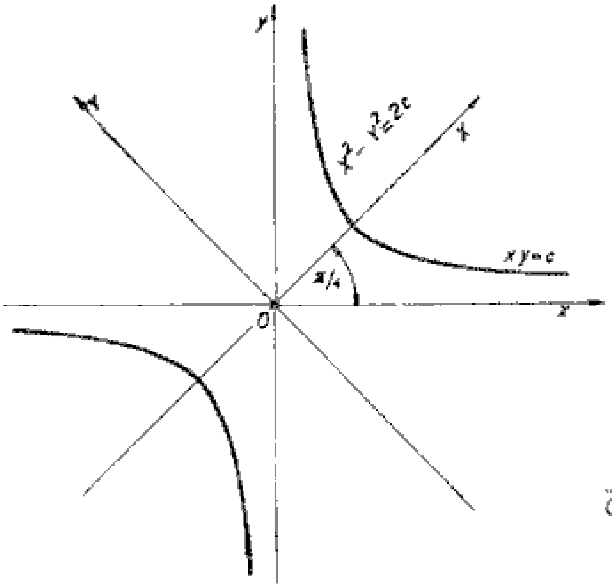
$$|\,\varrho(F_1, M) - \varrho(F_2, M)\,| < 2a. \tag{14b}$$

Ak je hyperbola daná rovnicou (6a), pre každý vnútorný bod hyperboly $M = (x, y)$ platí

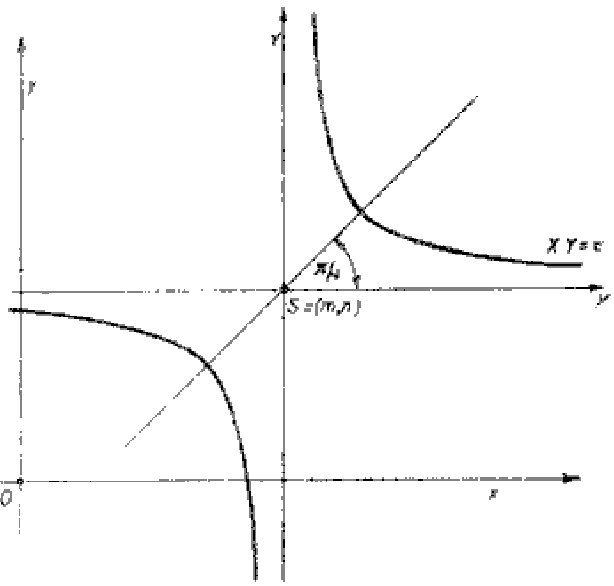
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \tag{15a}$$

a pre každý vonkajší bod hyperboly $M = (x, y)$ platí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1. \tag{15b}$$



Obr. 55



Obr. 56

12. Hyperbola, pre ktorú je $a = b$, nazýva sa *rovnoosová.*

13. Rovnica $xy = c$, $(c \neq 0)$ určuje v pravouhlom súradnicovom systéme rovnoosovú hyperbolu so stredom v počiatku súradnicového systému s polosami $a = b = \sqrt{2}\,|c|$. Rovnica tejto hyperboly má pri otočení súradnicového systému okolo počiatku o uhol $\alpha = \pi/4$, tvar $X^2 - Y^2 = 2c$ (pozri *obr. 55*).

14. Rovnica $(x - m)(y - n) = c$, $c \neq 0$ je rovnica hyperboly, ktorá po posunutí súradnicového systému do bodu $S = (m, n)$ má rovnicu $XY = c$ (pozri *obr. 56*).

Príklad 1. Napíšme osovú rovnicu hyperboly, pre ktorú vzdialenosť vrcholov je 8 a vzdialenosť ohnísk je 10.

Riešenie. Vzdialenosť vrcholov je $2a = 8$, z toho $a = 4$. Vzdialenosť ohnísk $2e = 10$, z toho $e = 5$. Pre dĺžku vedľajšej polosi platí

$$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Ak reálna os hyperboly je v osi o_x, podľa (6a) osová rovnica hyperboly je

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ak reálna os hyperboly leží v osi o_y, osová rovnica hyperboly podľa (6b) je

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Príklad 2. Hyperbola má rovnicu $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$. Nájdite jej stred, dĺžky polosí a napíšte rovnice jej asymptot.

Riešenie. Upravíme danú rovnicu na tvar (7a). Máme

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) = 31 + 9 - 4,$$
$$9(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 36.$$

Z toho dostaneme

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Porovnaním s rovnicou (7a) dostaneme, že stred hyperboly je $S = (1, -1)$, dĺžka reálnej polosi $a = 2$, dĺžka imaginárnej polosi $b = 3$. Rovnice asymptot sú

$$y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1), \qquad y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

alebo

$$3x - 2y - 5 = 0, \qquad 3x + 2y + 1 = 0.$$

Príklad 3. Zistíme, ktorá množina bodov v rovine má v polárnom súradnicovom systéme rovnicu

$$4\varrho - 5\varrho \cos \varphi - 9 = 0.$$

Riešenie. Danú rovnicu upravíme na tvar

$$\varrho = \frac{\dfrac{9}{4}}{1 - \dfrac{5}{4}\cos \varphi}.$$

Porovnaním s rovnicou (9b) dostaneme $p = 9/4$, $\varepsilon = 5/4$ a rovnica určuje jednu vetvu hyperboly. Polosi tejto hyperboly nájdeme podľa (10), (3) a (2) riešením systému

$$\frac{b^2}{a} = \frac{9}{4},$$

$$\frac{e}{a} = \frac{5}{4},$$

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Keďže $b^2 = 9a/4$ a $e = 5a/4$, pre dĺžku polosi a dostaneme rovnicu

$$\frac{25a^2}{16} = a^2 + \frac{9a}{4},$$

čiže

$$a^2 - 4a = 0.$$

Jej riešením dostaneme $a_1 = 0$, $a_2 = 4$. Keďže hľadáme iba kladné riešenia daného systému, $a = 4$, $b = 3$, $e = 5$. Osová rovnica tejto hyperboly je

$$\frac{(x^2 + 5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Hľadaná množina bodov je jednou vetvou tejto hyperboly, a tou, ktorá je bližšie k ohnisku $F = (0, 0)$ v uvažovanom pravouhlom súradnicovom systéme.

813. Na hyperbole $9x^2 - 36y^2 = 324$ nájdite body, ktorých jedna súradnica je:
a) $x_A = 6$;
b) $x_B = -6$;
c) $y_C = 3/2$;
d) $y_D = -3/2$.

814. Napíšte osovú rovnicu hyperboly, ak
a) $a = 5$, $b = 3$;
b) $e = 5$, $a = 4$;
c) $e = 10$, $\varepsilon = 5/3$;
d) $a = 2\sqrt{5}$, $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$;
e) $b = \sqrt{2/3}$, $\varepsilon = \sqrt{11/3}$.

815. Hyperbola má ohniská $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$. Nájdite jej rovnicu, ak
a) $\varrho(F_1, F_2) = 30$ a rovnice asymptot sú $4x - 3y = 0$, $4x + 3y = 0$;
b) $\varrho(F_1, F_2) = 34$ a vzdialenosť direkčných priamok je $7 + 9/17$;
c) $\varepsilon = 5/3$ a vzdialenosť direkčných priamok je 18;
d) vzdialenosť direkčných priamok je $52 + 16/17$ a rovnice asymptot sú $8x - 15y = 0$, $8x + 15y = 0$;
e) rovnice asymptot sú $x + 2y = 0$, $x - 2y = 0$ a rovnice direkčných priamok sú $x - 4/\sqrt{5} = 0$, $x + 4/\sqrt{5} = 0$;
f) $\varrho(F_1, V) = 9$, $\varrho(F_2, V) = 1$.

816. Hyperbola má ohniská $F_1 = (0, -e)$, $F_2 = (0, e)$. Nájdite jej rovnicu, ak
a) $e = 9$, $a = 6$;
b) $\varrho(F_1, F_2) = 26$, $\varepsilon = 13/5$;
c) $\varrho(V_1, V_2) = 15$ a rovnice asymptot sú $3x + 4y = 0$, $3x - 4y = 0$;
d) $\varepsilon = 13/12$ a vzdialenosť direkčných priamok je $36 + 12/13$;
e) rovnice direkčných priamok sú $5y - 16 = 0$, $5y + 16 = 0$ a $\varrho(F_1, F_2) = 10$;
f) $\varepsilon = 41/40$ a vzdialenosť direkčných priamok je 32/41.

817. Nájdite rovnicu hyperboly, ak
a) $\varrho(V_1, V_2) = 6$ a jej ohniská sú $F_1 = (-3, 3)$, $F_2 = (7, 3)$;
b) jej ohniská sú $F_1 = (-7, 3)$, $F_2 = (9, 3)$ a uhol asymptot je $\pi/2$;
c) jej ohniská sú $F_1 = (-2, 5)$, $F_2 = (4, 5)$ a rovnica asymptoty je $2x - 3y + 13 = 0$;
d) jej vrcholy sú $V_1 = (-3, 10)$, $V_2 = (15, 10)$ a jedno ohnisko je $F = (-7, 10)$;
e) jej vrcholy sú $V_1 = (-2, 1)$, $V_2 = (8, 1)$ a rovnica direkčnej priamky je $x - 5 = 0$;
f) rovnice asymptot sú $3x - y + 10 = 0$, $3x + y = -8$ a rovnica direkčnej priamky je $x = 0$.

818. Napíšte parametrické rovnice hyperbol z predchádzajúcej úlohy.

819. Nájdite rovnicu hyperboly, ak
a) vrcholy sú $V_1 = (1, -3)$, $V_2 = (1, 5)$ a ohnisko je $F = (1, -4)$;
b) rovnice direkčných priamok sú $y - 8 = 0$, $7y - 6 = 0$, $\varepsilon = 7/5$ a stred hyperboly leží na priamke $x - 3 = 0$;
c) uhol asymptot je $\alpha = 2 \operatorname{arctg} (4/3)$ a ohniská sú $F_1 = (4, 6)$, $F_2 = (4, -4)$;
d) asymptota má rovnicu $2x - y - 5/2 = 0$ a vrcholy sú $V_1 = (4, 0)$, $V_2 = (4, 5)$;
e) ohniská sú $F_1 = (-1, -6)$, $F_2 = (-1, 2)$ a rovnica direkčnej priamky je $y = 0$.

820. Nájdite ohniská, excentricitu, rovnice asymptot a direkčných priamok hyperboly, ak jej rovnica je:

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

b) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

c) $8x^2 - 3y^2 = 2$;

d) $-x^2 + 16y^2 = 64$;

e) $y = \frac{2x - 9}{x - 4}$

821. Nájdite rovnice a excentricity združených hyperbol k hyperbolám z predchádzajúcej úlohy.

822. Nájdite vrcholy, ohniská, excentricitu, rovnice direkčných priamok a rovnice asymptot hyperboly, ak jej rovnica je:

a) $9x^2 - 4y^2 = 121$;

b) $-49x^2 + 16y^2 = -25$;

c) $2x^2 - 3y^2 = 24$;

d) $0{,}16x^2 - 0{,}81y^2 = 1$;

e) $25x^2 - 144y^2 = 3600$;

f) $x^2 - y^2 = 1$;

g) $-x^2 + y^2 = 25$.

823. Nájdite stred, vrcholy, ohniská, excentricitu, rovnice osí, rovnice direkčných priamok a rovnice asymptot hyperboly, ak jej rovnica je:

a) $x^2 - 9y^2 + 4x - 5 = 0$;

b) $25x^2 - 16y^2 - 150x + 224y = 959$;

c) $144x^2 - 25y^2 - 288x - 50y - 3481 = 0$;

d) $9x^2 - 25y^2 - 50y - 250 = 0$;

e) $x^2 - y^2 - 16x + 14y + 51 = 0$;

f) $64x^2 - 225y^2 - 384x - 450y + 14\,751 = 0$;

g) $xy = 9$.

824. Nájdite obsah trojuholníka určeného asymptotami hyperboly $9x^2 - 16y^2 - 54x + 32y - 79 = 0$ a priamkou $9x + 4y - 79 = 0$.

825. Hyperbola má ohniská $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (0, e)$ a prechádza bodmi $A = (11, 6)$, $B = (-7, 2)$. Nájdite dĺžky jej polosí.

826. Daná je rovnica hyperboly a vzdialenosť bodu M hyperboly od jej ohniska. Nájdite bod M, ak

a) $\varrho(M, F) = 19$ a rovnica hyperboly je $64x^2 - 225y^2 = 14\,400$;

b) $\varrho(M, F) = 9$ a rovnica hyperboly je $64x^2 - 36y^2 = 2304$.

827. Dané sú ohniská hyperboly F_1, F_2 a bod hyperboly A. Nájdite jej rovnicu, ak

a) $F_1 = (-\sqrt{11/12}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{11/12}, 0)$, $A = (-1/4, 0)$;

b) $F_1 = (0, -2)$, $F_2 = (0, 2)$, $A = (\sqrt{21}/2, 3)$;

c) $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$, $A = (4, \sqrt{15})$;

d) $F_1 = (-2, -2)$, $F_2 = (4, 4)$, $A = (6; 1{,}9)$.

828. Nájdite rovnicu hyperboly, ktorá prechádza bodom M, ak

a) jej vrcholy sú $V_1 = (0, 2)$, $V_2 = (8, 2)$ a $M = (-1, 5)$;

b) rovnice jej asymptot sú $2x - 3y - 5 = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$, a $M = (5{,}5; -2)$;

c) jej stred je $S = (0, 0)$ a rovnice direkčných priamok sú $5x - 16 = 0$, $5x + 16 = 0$ a bod $M = (8, -3\sqrt{3})$;

d) jej stred je $S = (0, 0)$, reálna os hyperboly je v osi o_x a dva body hyperboly sú $M_1 = (8\sqrt{5}, -12)$, $M_2 = (16, -6\sqrt{3})$.

829. Nájdite vzdialenosť bodu M hyperboly od jej direkčnej priamky, ak $\varepsilon = 2{,}5$ a $\varrho(M, F) = 12$, kde F je ohnisko ležiace bližšie k direkčnej priamke.

830. Nájdite vzdialenosť bodu M hyperboly od direkčnej priamky, ak ohniská hyperboly sú $F_1 = (-10, 3)$, $F_2 = (14, 3)$ a ak $\varepsilon = 2$ a $x_M = 15$.

831. Hyperbola má $\varepsilon = 5/3$ a direkčné priamky dané rovnicami $x = 18/5$, $x = -18/5$. Nájdite na tejto hyperbole také body $M_1 = (x_1, y_1)$, $M = (x_2, y_2)$, aby ich súčin vzdialeností od ohniska $F = (e, 0)$, $e > 0$ sa rovnal 36 a rozdiel $x_1 - x_2 = 3$.

832. Nájdite vzdialenosť bodu M hyperboly od jej ohnísk a rovnice priamok určených bodom M a ohniskami, ak $x_M = 6$, $y_M > 0$ a rovnica hyperboly je $9x^2 - 16y^2 - 18x + 24y - 144 = 0$.

833. Nájdite vzdialenosť ohniska hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ od jej asymptoty.

834. Dokážte, že súčin vzdialeností ľubovoľného bodu hyperboly od jej asymptot je konštantný.

835. Excentricita hyperboly je 2. Nájdite uhol medzi asymptotami.

836. Direkčné priamky hyperboly delia vzdialenosť medzi ohniskami na tri rovnaké časti. Nájdite jej excentricitu.

837. Nájdite excentricitu hyperboly, ak

a) hyperbola je rovnoosová;
b) uhol asymptot je $2\pi/3$;
c) úsek, ktorý vytínajú asymptoty na direkčnej priamke, vidieť z priľahlého ohniska pod uhlom $\pi/2$;
d) direkčná priamka je osou úsečky F_1S, kde F_1 je ohnisko a S stred hyperboly.

838. Napíšte rovnice združených hyperbol, ak vzdialenosť direkčných priamok prvej hyperboly je 4,2 a vzdialenosť direkčných priamok druhej hyperboly je 8,6.

839. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorá má ohnisko vo vrcholoch elipsy $x^2/289 + y^2/225 = 1$ a direkčné priamky hyperboly prechádzajú ohniskami tejto elipsy.

840. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorá má ohniská v ohniskách elipsy $x^2/49 + y^2/24 = 1$ a $\varepsilon = 5/4$.

841. Elipsa má rovnicu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Nájdite rovnicu konfokálnej rovnoosovej hyperboly.

842. Rovnoosová hyperbola má rovnicu $x^2 - y^2 = 12{,}5$. Nájdite hyperbolu konfokálnu s danou hyperbolou, ktorá prechádza bodom $A = (8, 3\sqrt{3})$.

843. Nájdite rovnicu hyperboly $x^2 - y^2 = a^2$ pri otočení pravouhlého súradnicového systému okolo počiatku o uhol $\pi/4$.

844. Ukážte, že direkčné priamky vytínajú na asymptotách hyperboly úsečky, ktorých dĺžka sa rovná dĺžke reálnej polosi (dĺžka úsečiek sa počíta od stredu hyperboly).

845. Nájdite rovnicu hyperboly vylúčením parametra t, ak hyperbola je daná parametricky:

a) $x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$, $y = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$, kde $a > 0$, $b > 0$ a t je ľubovoľné reálné číslo rôzne od nuly;

b) $x = \dfrac{t-1}{t+1}$, $y = \dfrac{2t}{t+2}$, kde $t \neq -1$, $t \neq -2$.

846. Nájdite množiny bodov v rovine, ktoré majú analytické vyjadrenie:

a) $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 9}$;

b) $x = \frac{8}{5}\sqrt{y^2 + 16}$;

c) $y = 11 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + 4x - 12}$;

d) $x = 5 - 3\sqrt{y^2 - 6y + 13}$;

e) $x = 3 - 2 \operatorname{tg} t$,
$y = 1 + 3/\cos t$, kde $\pi \leqq t < 3\pi/2$;

f) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 \geqq 0$,
$3x + 10 = 0$;

g) $16x^2 - 9y^2 \leqq 144$,
$4x - 3y \geqq 0$,
$4x + 3y \leqq 0$;

h) $\varrho(3 - 4\cos\varphi) = 5$,
kde ϱ, φ sú polárne súradnice.

847. Nájdite polárne rovnice hyperboly, ktorá má ohniská $F_1 = (0, 0)$ a $F_2 = (2e, \pi)$, ak

a) vzdialenosti bodu M hyperboly od ohnísk sú $\varrho(M, F_1) = 16$, $\varrho(M, F_2) = 4$ a $\varepsilon = 2$;

b) vzdialenosti bodu M hyperboly od direkčných priamok sú $\varrho(M, d_1) = 4$, $\varrho(M, d_2) = 6$ a $\varepsilon = 3$;

c) vzdialenosť bodu M hyperboly od ohniska F_1 je 12 a od direkčnej priamky d_2 je 6, pričom $\varepsilon = 5/3$.

848. Nájdite rovnicu množiny všetkých bodov, ktorých vzdialenosť od bodu $A = (-6, 0)$ je dvakrát väčšia ako od priamky $x + 1 = 0$.

849. Nájdite rovnicu množiny stredov všetkých tetív hyperboly $x^2 - y^2 = 5$, ktoré prechádzajú bodom $M = (5, 0)$.

850. Základňa trojuholníka ABC je úsečka AB, $A = (-5, 0)$, $B = (5, 0)$. Uhol $\sphericalangle ABC$ je dvakrát väčší ako uhol $\sphericalangle BAC$. Nájdite rovnicu množiny vrcholov C všetkých trojuholníkov.

851. Rovnoosové hyperboly prechádzajú bodom $P = (0, 1)$ a dotýkajú sa osi o_x v bode $Q = (1, 0)$. Nájdite rovnicu množiny stredov všetkých týchto rovnoosých hyperbol.

852. Bod M sa pohybuje po hyperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Napíšte rovnicu množiny ťažísk všetkých trojuholníkov ABM, kde A, B sú vrcholy hyperboly.

853. Z prvého ohniska F_2 hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ sú zostrojené polohové vektory všetkých bodov hyperboly. Nájdite množinu stredov všetkých týchto vektorov.

854. Nájdite množinu ťažísk všetkých trojuholníkov, ktoré majú spoločnú základňu a majú:

a) stály súčet dĺžok zvyšných strán;

b) stály rozdiel dĺžok zvyšných strán.

855. Nájdite rovnicu množiny stredov všetkých kružníc, ktoré vytínajú na súradnicových osiach pravouhlého súradnicového systému úsečky dĺžky $2a$, $2b$.

856. Dané sú dve kružnice, pričom jedna z nich leží mimo druhej kružnice. Nájdite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú oboch daných kružníc.

857. Nájdite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú danej kružnice a prechádzajú bodom A, ktorý je mimo danej kružnice.

858. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov so spoločnou základňou c, ak súčin tangensov uhlov k tejto strane priľahlých sa rovná danému číslu $k (k \neq 0)$.

859. Nájdite množinu druhých ohnísk všetkých a) elíps; b) hyperbol, ktoré majú jedno ohnisko dané a prechádzajú danými bodmi A, B.

Nájdite množinu stredov všetkých elíps z prípadu a).

4.13. Parabola

Nech F je bod roviny a d priamka roviny, ktorá neprechádza bodom F.

Množina všetkých bodov X roviny, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodu F a priamky d, t. j. pre ktoré platí

$$\varrho(X, F) = \varrho(X, d), \tag{1}$$

nazýva sa *parabolou.*

Bod F je *ohnisko* paraboly, priamka d sa nazýva *direkčnou priamkou* paraboly. Vzdialenosť ohniska F od direkčnej priamky sa nazýva *parametrom* p paraboly a je

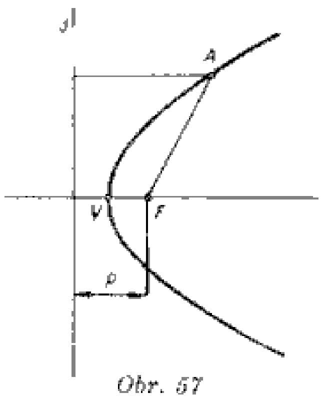
$$p = \varrho(F, d). \tag{2}$$

Parabola má jedinú *os súmernosti,* ktorá prechádza jej ohniskom a je kolmá na direkčnú priamku. Priesečník paraboly s jej osou sa nazýva *vrchol* V paraboly *(obr. 57).*

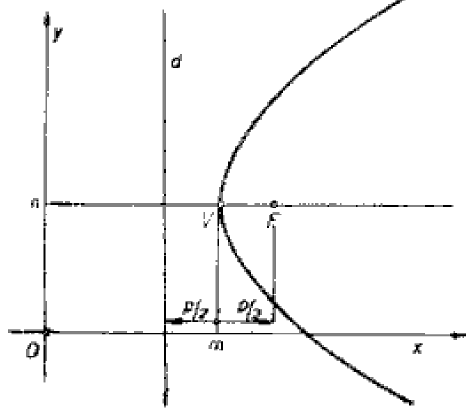
Vlastnosti:

1. Pre každý bod X paraboly platí

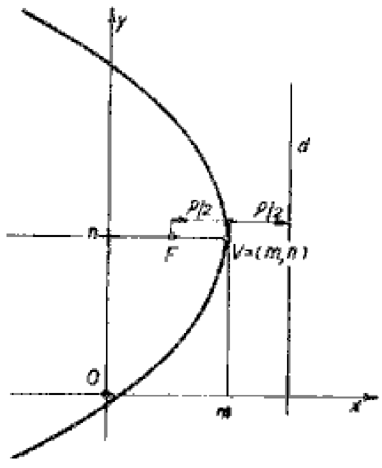
$$\frac{\varrho(X, F)}{\varrho(X, d)} = 1.$$



Obr. 57



Obr. 58



Obr. 59

2. Ak v pravouhlom súradnicovom systéme má parabola vrchol $V = (m, n)$ a ohnisko $F = (m + p/2, n)$ (pozri *obr. 58*), jej rovnica je

$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \tag{3}$$

a rovnica direkčnej priamky tejto paraboly je

$$x = m - \frac{p}{2}. \tag{4}$$

Ak $V = (0, 0)$ a $F = (p/2, 0)$, rovnica paraboly má tvar

$$y^2 = 2px \tag{5}$$

a nazýva sa *vrcholová rovnica* paraboly. Rovnica jej direkčnej priamky je

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{6}$$

3. Ak v pravouhlom súradnicovom systéme má parabola vrchol $V = (m, n)$ a ohnisko $F = (m - p/2, n)$ (pozri *obr. 59*), jej rovnica je

$$(y - n)^2 = -2p(x - m) \tag{7}$$

a rovnica jej direkčnej priamky je

$$x = m + \frac{p}{2}. \tag{8}$$

Ak $V = (0, 0)$ a ohnisko $F = (-p/2, 0)$, rovnica paraboly je

$$y^2 = -2px \tag{9}$$

a rovnica direkčnej priamky tejto paraboly je

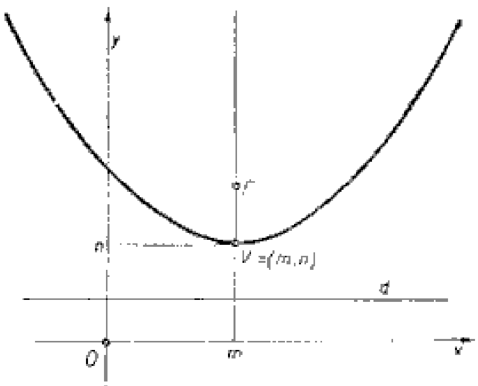
$$x = \frac{p}{2}. \tag{10}$$

4. Ak v pravouhlom súradnicovom systéme má parabola vrchol $V = (m, n)$ a ohnisko $F = (m, n + p/2)$ (pozri *obr. 60*), jej rovnica je

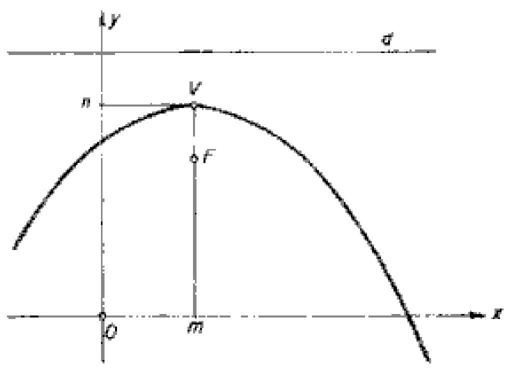
$$(x - m)^2 = 2p(y - n) \tag{11}$$

a rovnica jej direkčnej priamky je

$$y = n - \frac{p}{2} \tag{12}$$



Obr. 60



Obr. 61

Ak $V = (0, 0)$ a $F = (0, p/2)$, rovnica paraboly je

$$x^2 = 2py \tag{13}$$

a rovnica jej direkčnej priamky je

$$y = -\frac{p}{2}. \tag{14}$$

5. Ak v pravouhlom súradnicovom systéme má parabola vrchol $V = (m, n)$ a ohnisko $F = (m, n - p/2)$ (pozri *obr. 61*), jej rovnica je

$$(x - m)^2 = -2p(y - n) \tag{15}$$

a rovnica jej direkčnej priamky je

$$y = n + \frac{p}{2}. \tag{16}$$

Ak $V = (0, 0)$ a $F = (0, -p/2)$, rovnica paraboly je

$$x^2 = -2py \tag{17}$$

a rovnica jej direkčnej priamky je

$$y = \frac{p}{2}. \tag{18}$$

6. Ak parabola je daná rovnicou (5), pre každý bod $A = (x, y)$ paraboly platí

$$\varrho(F, A) = \frac{p}{2} + x. \tag{19}$$

7. *Parametrické rovnice* paraboly, ktorá je daná rovnicou (5) sú

$$x = \frac{1}{2p} t^2, \quad y = t, \tag{20}$$

kde t je ľubovoľné reálne číslo.

8. Ak v polárnom súradnicovom systéme má parabola ohnisko $F = (0, 0)$ a vrchol $V = (p/2, \pi)$ (pozri *obr. 62*), jej rovnica je

$$\varrho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}. \tag{21}$$

9. Bod $M = (x, y)$ nazývame *vnútorným bodom* paraboly, ak platí

$$\varrho(M, F) < \varrho(M, d) \tag{22}$$

a *vonkajším bodom* paraboly, ak platí

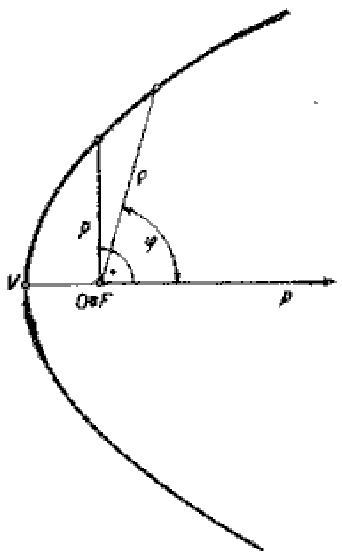
$$\varrho(M, F) > \varrho(M, d). \tag{23}$$

Ak parabola má rovnicu (5), potom podmienka (22) má tvar

$$y^2 < 2px$$

a podmienka (23) má tvar

$$y^2 > 2px.$$



Obr. 62

Príklad 1. Parabola má rovnicu $y^2 = 8x$. Nájdime ohnisko, rovnicu direkčnej priamky a parameter paraboly. Nájdime na parabole body, ktoré majú rovnaké súradnice, a nájdime vzdialenosť týchto bodov od jej ohniska.

Riešenie. Porovnaním danej rovnice paraboly s rovnicou (5) dostaneme

$$2p = 8,$$

z toho

$$p = 4.$$

Ohnisko paraboly je $F = (2, 0)$ a rovnica jej direkčnej priamky podľa (6) je

$$x = -2.$$

Body paraboly, ktoré majú rovnaké súradnice, určíme z podmienky

$$x^2 = 8x.$$

Z toho

$$x_1 = 0 \quad \text{a} \quad x_2 = 8.$$

Hľadané body sú $A = (0, 0)$ a $B = (8, 8)$. Pre vzdialenosti týchto bodov od ohniska podľa (19)

$$\varrho(F, A) = 2, \qquad \varrho(F, B) = 10.$$

Príklad 2. Ukážme, že rovnica

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a > 0,$$

je v pravouhlom súradnicovom systéme rovnicou paraboly, ktorej os je rovnobežná s osou o_y. Nájdime jej parameter, vrchol a ohnisko.

Riešenie. Upravme danú rovnicu takto:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c,$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Posledná rovnica má tvar rovnice (11). Daná rovnica je rovnicou paraboly, ktorej os je rovnobežná s osou o_y. Z porovnania koeficientov tejto rovnice s rovnicou (11) vyplýva, že parameter paraboly $p = 1/2a$, vrchol paraboly je $V = (-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$ a ohnisko paraboly je $F = (-b/2a, (4ac - b^2 + 1)/4a)$.

Príklad 3. Napíšme rovnicu množiny všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodu $A = (-3, 0)$ a priamky $x + 6 = 0$. Nájdime priesečníky tejto množiny so súradnicovými osami.

Riešenie. Nech $M = (x, y)$ je ľubovoľný bod tejto množiny. Potom platí

$$\varrho(A, M) = \sqrt{(x + 3)^2 + y^2},$$
$$\varrho(M, p) = |x + 6|,$$

kde p značí danú priamku. Z podmienky úlohy vyplýva

$$\varrho(A, M) = \varrho(M, p),$$
$$\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = |x + 6|.$$

Po úprave dostaneme

$$(x + 6)^2 = (x + 3)^2 + y^2.$$

Z toho

$$y^2 = 6x + 27,$$

čo je rovnica paraboly.

Poslednú rovnicu upravme na tvar

$$(y - 0)^2 = 6\left(x + \frac{9}{2}\right).$$

Porovnaním s rovnicou (3) dostávame vrchol paraboly $V = (-9/2, 0)$ a os paraboly je $y = 0$.

Pre priesečník $Q = (0, q)$ paraboly s osou o_y platí

$$q^2 = 6 \cdot 0 + 27.$$

Z toho

$$q_1 = 3\sqrt{3} \quad \text{a} \quad q_2 = -3\sqrt{3}.$$

Hľadané priesečníky sú $Q_1 = (0, 3\sqrt{3})$ a $Q_2 = (0, -3\sqrt{3})$.

Podobne pre priesečník $R = (r, 0)$ paraboly s osou o_x platí

$$0 = 6r + 27.$$

Z toho

$$r = -\frac{9}{2}.$$

Hľadaný priesečník je $R = (-9/2, 0)$.

Príklad 4. Dokážme, že

$$\varrho = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}$$

je rovnicou paraboly v polárnom súradnicovom systéme. Nájdime vrcholovú rovnicu tejto paraboly.

Riešenie. Aby sme ukázali, že daná rovnica je rovnicou paraboly, upravíme ju na tvar

$$\varrho = \frac{1}{3(1 - \cos\varphi)},$$

čiže

$$\varrho = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \cos\varphi}.$$

Porovnaním s rovnicou (21) vidíme, že daná rovnica je rovnicou paraboly, ktorá ma parameter $p = 1/3$, vrchol $V = (1/6, \pi)$ a ohnisko $F = (0, 0)$.

Zvoľme pravouhlý súradnicový systém tak, aby jeho počiatok bol vo vrchole paraboly a ohnisko ležalo na kladnej časti osi o_x. Pre ohnisko a vrchol paraboly dostaneme $F = (1/6, 0)$, $V = (0, 0)$ a vrcholová rovnica paraboly je

$$y^2 = \frac{2}{3}x.$$

860. Vrchol paraboly je v počiatku pravouhlého súradnicového systému. Nájdite ohnisko, parameter a rovnicu tejto paraboly, ak

a) $\varrho(V, F) = 3$ a os paraboly je v osi o_x;
b) $\varrho(V, F) = 4$ a os paraboly je v osi o_y.

861. Nájdite rovnicu paraboly, ktorá má vrchol v počiatku súradnicového systému a ohnisko je:

a) $F = (6, 0)$; c) $F = (-1/3, 0)$;
b) $F = (0, 1/4)$; d) $F = (0, -0{,}08)$.

862. Napíšte rovnicu paraboly, ktorá má vrchol v počiatku, prechádza

a) bodom $A = (3, 9)$ a je symetrická podľa osi o_x;
b) bodom $B = (16, 4)$ a je symetrická podľa osi o_y;
c) bodom $C = (-2, -4)$ a je symetrická podľa osi o_x;
d) bodom $D = (-3, -5)$ a je symetrická podľa osi o_y.

863. Nájdite rovnicu paraboly, ktorá má vrchol v počiatku súradnicového systému a prechádza bodmi:

a) $A = (8, 3)$, $B = (8, -3)$; c) $A = (4, 1)$, $B = (-4, 1)$;
b) $A = (-5, 2)$, $B = (-5, -2)$; d) $A = (2, -3)$, $B = (-2, -3)$.

864. Nájdite ohnisko parameter a rovnicu direkčnej priamky paraboly, ak jej rovnica je

a) $y^2 = 8x$; b) $x^2 = 3y$; c) $y^2 = -x/4$; d) $x^2 = -0{,}02y$.

865. Napíšte rovnicu paraboly, ktorej os je rovnobežná s osou o_x, ak

a) vrchol je v bode $V = (8, 5)$ a parameter $p = 4$;
b) vrchol je v bode $V = (-1, -1)$ a parabola prechádza bodom $A = (3, 2)$.

866. Napíšte rovnicu paraboly, ktorej os je rovnobežná s osou o_y, ak

a) vrchol $V = (-3, -4)$ a parameter $p = 2$;
b) vrchol $V = (-3, 2)$ a parabola prechádza bodom $A = (2, 3)$.

867. Nájdite rovnicu paraboly, ak pre jej ohnisko F, vrchol V a direkčnú priamku platí

a) $F = (3, 8)$, $x - 11 = 0$; d) $V = (5, 4)$, $x + y + 2 = 0$;
b) $F = (5, 1)$, $y + 4 = 0$; e) $F = (6, 2)$, $V = (4, 8)$.
c) $F = (3, -2)$, $x + 2y - 1 = 0$;

868. Nájdite vrchol, ohnisko, parameter, rovnicu osi a direkčnej priamky paraboly:

a) $x^2 - 6x + 6y + 21 = 0$; d) $3y^2 - 2x + 12y + 10 = 0$;
b) $x^2 + 8x - 10y - 64 = 0$; e) $3y^2 + x - 12y + 14 = 0$.
c) $y = x^2/4 - x + 10$;

869. Napíšte osovú rovnicu paraboly, ktorá je symetrická podľa osi o_x, jej vrchol je $V = (-10, 0)$ a ktorá vytína na osi o_y úsečku dĺžky 18.

870. Mostový oblúk má tvar oblúka paraboly. Vypočítajte parameter a napíšte rovnicu tejto paraboly, ak dĺžka mostového poľa je 20 m a výška oblúka je 4 m.

871. Zrkadlo automobilového reflektora má v reze tvar paraboly. Priemer zrkadla je 24 cm a hĺbka 12 cm. Zistite polohu ohniska a napíšte vrcholovú rovnicu rezu reflektora.

872. Futbalista kopol loptu, ktorá sa pohybovala po parabolickej dráhe. Nájdite parameter tejto paraboly, ak lopta dopadla na ihrisko vo vzdialenosti 32 m od počiatočnej polohy a najväčšia výška, ktorú lopta dosiahla, bola 20 m.

873. Vypočítajte vzdialenosť bodu M paraboly od jej ohniska, ak jej rovnica je $y^2 = 24x$ a pre bod M platí:

a) $x_M = 6$; b) $y_M = 6$.

874. Na parabole nájdite taký bod A, pre ktorý platí:

a) $\varrho(A, F) = 4$ a rovnica paraboly je $y^2 = 8x$;

b) $\varrho(A, F) = 17$ a rovnica paraboly je $x^2 = -18y$;

c) $\varrho(A, d) = 16$ a rovnica paraboly je $y^2 = -6x$,

kde F je ohnisko a d direkčná priamka paraboly.

875. Nájdite množinu všetkých bodov roviny, pre ktoré platí:

a) $y = 4\sqrt{x}$;
b) $x = -5\sqrt{-3y}$;
c) $x = 2\sqrt{3y}$;
d) $|y| = 6\sqrt{-x}$;
e) $x = -3 + 2\sqrt{y-6}$;
f) $y = 4 - 2\sqrt{1-x}$;
g) $y = -1 + 3\sqrt{15 - 8x}$.

876. Vypočítajte priesečníky paraboly $y^2 = 16x$

a) s kružnicou $x^2 + y^2 = 225$;
b) s elipsou $x^2/32 + y^2/128 = 1$;
c) s hyperbolou $x^2/500 - y^2/1600 = 1$;
d) s parabolou $x = 3y^2 - 8y - 124$.

877. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkmi paraboly $y^2 = 18x$ a kružnice $x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0$. Nakreslite parabolu kružnicu a priamku.

878. Napíšte rovnicu paraboly v pravouhlom súradnicovom systéme, ak jej parametrické rovnice sú:

a) $x = t,\ y = t^2 - 4$; b) $x = 2t,\ y = \sqrt{6t}$; c) $x = t + 2,\ y = t^2 - 1$.

879. Napíšte rovnicu paraboly a) $y^2 = 12x$; b) $x^2 = 20y$ v polárnom súradnicovom systéme, ak počiatok polárneho súradnicového systému zvolíme v ohnisku paraboly a polárna os je polpriamka FV. Riešte túto úlohu aj pre prípad, že polárna os je opačná polpriamka k polpriamke FV.

880. Napíšte polárnu rovnicu paraboly $x^2 = 16y$, ak počiatok polárneho súradnicového systému zvolíme vo vrchole paraboly a polárna os je polpriamka VF, kde V je vrchol a F ohnisko paraboly.

881. Na parabole $\varrho = p/(1 + \cos\varphi)$ nájdite bod M, ktorý má:

a) $\varrho_M = p$; b) $\varrho_M = 2p/3$; c) najmenšie ϱ_M.

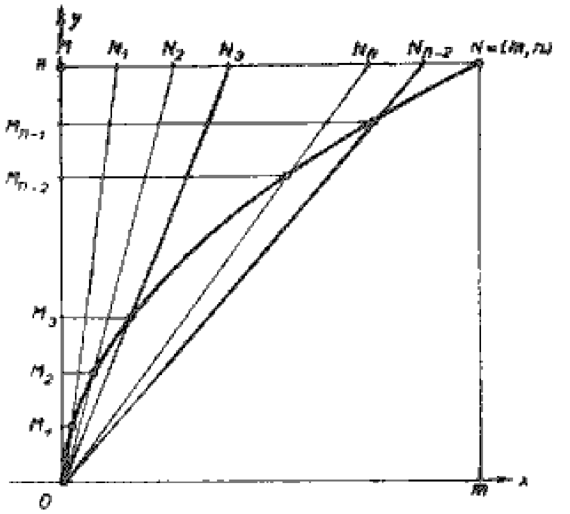
882. Dané sú body $M = (0, m)$, $N = (m, m)$. Úsečky OM, MN sú rozdelené na n rovnakých častí bodmi $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ a $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ (pozri *obr. 63*). Bod P_k je priesečník polpriamky ON_k s rovnobežkou s osou o_x bodom M_k, $k = 1, 2, \ldots n-1$. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov M_k.

883. Napíšte analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov, ktorých vzdialenosť od priamky $x = -3$ a od bodu $A = (1, 0)$ je rovnaká.

884. Napíšte analytické vyjadrenie stredov všetkých tetív paraboly $y^2 = 2px$, ktoré majú jeden koncový bod v počiatku súradnicového systému.

885. Napíšte analytické vyjadrenie množiny stredov všetkých úsečiek, ktoré majú jeden koncový bod v ohnisku paraboly $x^2 = 2py$ a druhý na parabole.

886. Nájdite množinu všetkých bodov, pre ktoré súčet alebo rozdiel vzdialeností od bodu A a danej priamky je konštantný a rovná sa c.



Obr. 63

887. Nájdite analytické vyjadrenie stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú:
a) kružnice $x^2 + y^2 = 4$ a osi o_x;
b) kružnice $x^2 + y^2 = 1$ a osi o_y.

888. Nájdite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú:
a) danej polkružnice a jej priemeru;
b) danej kružnice a jej dotyčnice.

889. Nájdite množinu koncových bodov priemerov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky p a prechádzajú daným bodom A, ak jeden koncový bod priemeru je A.

890. Dokážte, že ak dve paraboly majú osi navzájom kolmé a pretínajú sa v štyroch bodoch, potom tieto ležia na kružnici.

4,14. Priamka a kužeľosečka

Kružnica, elipsa, hyperbola a parabola sú kužeľosečky. *Priesečníkom* priamky a kužeľosečky nazývame ich spoločný bod. Nájdeme ho riešením sústavy rovníc priamky a kužeľosečky. Môžu nastať tieto prípady:

1. Sústava nemá reálne riešenie, vtedy priamka kužeľosečku *nepretína*.
2. Sústava má jediné riešenie — priamka sa kužeľosečky *dotýka*.
3. Sústava má dve rôzne riešenia, t. j. priamka *pretína* kužeľosečku v dvoch rôznych bodoch.

Úsečku, ktorej koncové body ležia na kužeľosečke, nazývame *tetivou*. Stredy rovnobežných tetív ležia na priamke, ktorú nazývame *priemerom* kužeľosečky. Tento priemer kužeľosečky nazývame združeným k daným tetivám. Priemer kužeľosečky kolmý na združené tetivy, ktoré ho určujú, nazývame *hlavným priemerom* kužeľosečky.

Nech p_1, p_2 sú dva rôzne priemery kužeľosečky. Ak každý z nich delí tetivy rovnobežné s druhým priemerom na polovicu, potom ich nazývame *združenými priemermi*.

Majme na priamke body M, N, P, Q. Hovoríme, že body P, Q sú *harmonicky združené* vzhľadom na body M, N, ak platí

$$\lambda(M, N, P) = -\lambda(M, N, Q)$$

a označujeme to $(M, N, P, Q) = -1$.

Uvažujme všetky priamky roviny, ktoré prechádzajú bodom P a pretínajú kužeľosečku v dvoch bodoch M, N. Všetky body Q ležiace na týchto priamkach, pre ktoré platí $(M, N, P, Q) = -1$, ležia na priamke, ktorú nazývame *polárou* bodu P vzhľadom na uvažovanú kužeľosečku. Bod P nazývame *pólom*, body P, Q *polárne združenými* vzhľadom na kužeľosečku. Ak bod P je bodom kužeľosečky, je sám so sebou združený. *Dotyčnicou* kužeľosečky v bode P nazývame jej poláru v tomto bode. *Normálou* kužeľosečky v bode P nazývame kolmicu na jej dotyčnicu v tomto bode.

Ak bod P je *vonkajším bodom* kužeľosečky, dotyčnice z bodu P ku kužeľosečke prechádzajú priesečníkmi poláry bodu P s kužeľosečkou.

Vlastnosti:

1. Rovnica priemeru elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ združeného k tetivám so smernicou k je

$$y = -\frac{b^2}{a^2k}x. \tag{1}$$

2. Rovnica priemeru hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ združeného k tetivám so smernicou k je

$$y = \frac{b^2}{a^2k}x. \tag{2}$$

3. Rovnica priemeru paraboly $y^2 = 2px$ združeného k tetivám so smernicou k je

$$y = \frac{p}{k}. \tag{3}$$

4. Ak k, k' sú smernice združených priemerov elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, resp. hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, pre elipsu platí

$$k \cdot k' = -\frac{b^2}{a^2}, \tag{4}$$

resp. pre hyperbolu

$$k \cdot k' = \frac{b^2}{a^2}. \tag{5}$$

5. Rovnica poláry bodu $P = (x_1, y_1)$ vzhľadom na:

a) kružnicu $(x^2 - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ je

$$(x_1 - m)(x - m) + (y_1 - n)(y - n) = r^2, \tag{6}$$

b) elipsu $(x - m)^2/a^2 + (y - n)^2/b^2 = 1$ je

$$\frac{(x_1 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_1 - n)(y - n)}{b^2} = 1, \tag{7}$$

c) hyperbolu $(x - m)^2/a^2 - (y - n)^2/b^2 = 1$ je

$$\frac{(x_1 - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(y_1 - n)(y - n)}{b^2} = 1, \tag{8}$$

d) parabolu $y^2 = 2px$ je

$$y_1y = p(x + x_1), \tag{9}$$

e) parabolu $x^2 = 2py$ je

$$x_1x = p(y + y_1). \tag{10}$$

6. Dotyčnica kužeľosečky je zvláštnym prípadom poláry, ktorá má pól P na kužeľosečke. Preto rovnice (6), (7), (8), (9), 10 sú rovnicami dotyčníc príslušných kužeľosečiek v dotykovom bode $P = (x_1, y_1)$.

Príklad 1. Nájdime rovnice dotyčníc k elipse $3x^2 + 8y^2 = 45$, ktorých vzdialenosť od stredu elipsy je 3.

Riešenie. Rovnica elipsy má osový tvar

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{45/8} = 1.$$

Podľa (7) rovnica dotyčnice v dotykovom bode $P = (x_1, y_1)$ je

$$\frac{x_1x}{15} + \frac{y_1y}{45/8} = 1$$

alebo po úprave

$$3x_1x + 8y_1y - 45 = 0. \tag{11}$$

Priamka (11) má mať od stredu $O = (0, 0)$ vzdialenosť $r = 3$. Musí teda platiť

$$\left|\frac{3x_1 \cdot 0 + 8y_1 \cdot 0 - 45}{\sqrt{9x_1^2 + 64y_1^2}}\right| = 3$$

alebo po úprave

$$9x_1^2 + 64y_1^2 - 225 = 0. \tag{12}$$

Keďže bod $P = (x_1, y_1)$ leží na elipse, platí

$$3x_1^2 + 8y_1^2 - 45 = 0. \tag{13}$$

Riešením rovníc (12) a (13) dostaneme $x_1 = 3$ alebo $x_1 = -3$, $y_1 = 3/2$ alebo $y_1 = -3/2$. Dosadením týchto hodnôt do (11) dostaneme rovnice hľadaných štyroch dotyčníc

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 15 &= 0, \\ 3x - 4y - 15 &= 0, \\ -3x + 4y - 15 &= 0, \\ -3x - 4y - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Príklad 2. Parabola má rovnicu $y^2 = 4x$. Nájdime rovnicu priamky q, na ktorej leží tetiva so stredom v bode $S = (2, 1)$. Nájdime rovnicu priemeru združeného k tetivám rovnobežným s priamkou q.

Riešenie. Rovnica priemeru združeného k tetivám rovnobežným s priamkou q je podľa (3)

$$y = \frac{p}{k}. \tag{14}$$

Keďže priemer prechádza bodom $S = (2, 1)$ a $p = 2$, platí $1 = 2/k$, z toho $k = 2$. Rovnica priamky q teda je

$$y - 1 = 2(x - 2),$$

po úprave

$$y = 2x - 3.$$

Dosadením $p = 2$, $k = 2$ do rovnice (14) dostaneme rovnicu združeného priemeru $y = 1$.

Príklad 3. Nájdime rovnice dotyčníc ku hyperbole $(x - 1)^2 - (y + 1)^2 = 16$ z bodu $A = (2, 6)$.

Riešenie. Aby sme našli dotykové body dotyčníc, nájdeme najprv poláru bodu A vzhľadom na hyperbolu. Podľa (8) rovnica poláry je

$$(2 - 1)(x - 1) - (6 + 1)(y + 1) = 16,$$

čiže

$$x - 7y - 24 = 0.$$

Dotykové body T_1 a T_2 sú priesečníkmi poláry a danej hyperboly. Nájdeme ich riešením sústavy

$$(x - 1)^2 - (y + 1)^2 = 16,$$
$$x - 7y - 24 = 0.$$

Pre dotykové body takto dostaneme

$$T_1 = \left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right), \qquad T_2 = (-4, -4).$$

Hľadané dotyčnice sú určené bodmi A, T_1, resp. A, T_2. Ich rovnice sú

$$y + \frac{8}{3} = -\frac{13}{5}\left(x - \frac{16}{3}\right), \qquad y + 4 = \frac{5}{3}(x + 4)$$

alebo po úprave

$$13x + 5y - 56 = 0 \quad \text{a} \quad 5x - 3y + 8 = 0.$$

Príklad 4. Nájdime spoločné dotyčnice ku kružniciam $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ a $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

Riešenie. Rovnice kružníc upravíme na tvar

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1,$$
$$(x - 2)^2 + y^2 = 1.$$

Priamka p je spoločnou dotyčnicou obidvoch kružníc práve vtedy, keď je dotyčnicou prvej kružnice a od stredu $S = (2, 0)$ druhej kružnice má vzdialenosť $r = 1$.

1. Každá dotyčnica ku prvej kružnici má rovnicu

$$x_1x + (y_1 - 2)(y - 2) - 1 = 0, \tag{15}$$

kde $P = (x_1, y_1)$ je dotykovým bodom prvej kružnice, pre ktorý platí

$$x_1^2 + (y_1 - 2)^2 = 1. \tag{16}$$

2. Pre vzdialenosť bodu $S = (2, 0)$ od dotyčnice (15) platí

$$\frac{|2x_1 + (y_1 - 2)(-2) - 1|}{\sqrt{x_1^2 + (y_1 - 2)^2}} = 1. \tag{17}$$

Keďže v (17) menovateľ sa rovná 1, dostaneme

$$|2x_1 - 2y_1 + 3| = 1. \tag{18}$$

Možné sú dva prípady: a) ak $2x_1 - 2y_1 + 3 > 0$, potom z (18) máme $2x_1 - 2y_1 + 3 = 1$, z toho $y_1 = x_1 + 1$. Dosadením $y_1 = x_1 + 1$ do (16) po úprave dostaneme

$$x_1^2 - x_1 = 0.$$

Z toho vyplýva $x_1 = 0$ alebo $x_1 = 1$. Teda je $y_1 = 1$ alebo $y_1 = 2$.

b) ak $2x_1 - 2y_1 + 3 < 0$, potom z (18) máme $2x_1 - 2y_1 + 4 = 0$, z toho $y_1 = -x_1 + 2$. Dosadením do (16) po úprave dostaneme

$$2x_1^2 = 1.$$

Z toho vyplýva $x_1 = 1/\sqrt{2}$ alebo $x_1 = -1/\sqrt{2}$. Teda $y_1 = 2 + 1/\sqrt{2}$ alebo $y_1 = 2 - 1/\sqrt{2}$. Dosadením vypočítaných hodnôt x_1, y_1 do (15) dostaneme hľadané rovnice dotyčníc.

Existujú štyri spoločné dotyčnice k daným kružniciam, a to:
v dotykovom bode $(0, 1)$ dotyčnica $y = 1$,
v dotykovom bode $(1, 2)$ dotyčnica $x = 1$,
v dotykovom bode $(1/\sqrt{2}, 2 + 1/\sqrt{2})$ dotyčnica $x + y = 2 + \sqrt{2}$,
v dotykovom bode $(-1/\sqrt{2}, 2 - 1/\sqrt{2})$ dotyčnica $x + y = 2 - \sqrt{2}$.

891. Zistite vzájomnú polohu priamky a kružnice, ak ich rovnice sú:
a) $y = 2x - 6$, $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 1 = 0$;
b) $y = -x + 8$, $x^2 + y^2 + 18x + 14y + 114 = 0$;
c) $y = 3x/4 - 3/2$, $x^2 + y^2 - 6x - 14y + 33 = 0$.

892. Aké musí byť q v rovnici priamky $y = x + q$, aby priamka kružnicu $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 53 = 0$
a) nepretínala; b) pretínala; c) dotýkala sa jej.

893. Nájdite vzdialenosť bodov, v ktorých priamka $x - y - 4 = 0$ pretína kružnicu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

894. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza počiatkom pravouhlého súradnicového systému a bodmi, ktoré sú spoločné priamke $x + y + 2 = 0$ a kružnici $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Nakreslite obrázok.

895. Dokážte, že bod $A = (3, 0)$ leží vnútri kružnice $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$. Nájdite rovnicu tetivy, ktorej stredom je bod A.

896. Napíšte rovnicu dotyčnice ku kružnici:
a) $x^2 + y^2 = 25$ v bode $A = (3, 4)$;
b) $x^2 + y^2 = 13$ v bode, ktorého x-ová súradnica rovná sa 2 a y-ová súradnica je kladná;
c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ v bode $A = (-1, 2)$.

897. V polárnych súradniciach napíšte rovnicu dotyčnice ku kružnici $\varrho = a$ v bode $A = (a, \varphi_0)$.

898. Nájdite rovnice dotyčníc ku kružnici $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 5 = 0$ rovnobežných s priamkou $2x + y - 16 = 0$.

899. Nájdite rovnice dotyčníc ku kružnici $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ kolmých na priamku $x - 2y + 12 = 0$.

900. Na kružnici $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 51 = 0$ nájdite bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky $9x - 2y - 72 = 0$.

901. Napíšte rovnicu normály ku kružnici:
a) $x^2 + y^2 = 9$ v bode $A = (1, 2\sqrt{2})$;
b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ v bode $A = (2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})$.

902. Nájdite rovnicu dotyčnice ku kružnici $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 28 = 0$, ktorá s priamkou $5x - y + 3 = 0$ zviera uhol $\pi/4$.

903. Nájdite uhol priamky $3x - y - 4 = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$.*)

904. Aká je podmienka, aby priamka $y = kx + q$ bola dotyčnicou ku kružnici $x^2 + y^2 = R^2$?

905. Nájdite uhol kružníc $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 15 = 0$.

*) Uhlom, pod ktorým sa dve krivky pretínajú, rozumieme uhol ich dotyčníc v ich priesečníku.

906. Dokážte, že pre ľubovoľné nenulové čísla m a n sa kružnice $x^2 + y^2 - mx = 0$ a $x^2 + y^2 - ny = 0$ pretínajú pod pravým uhlom.

907. Z bodu A sú zostrojené dotyčnice ku kružnici. Nájdite rovnice týchto dotyčníc, ak

a) $A = (-5, 5)$, $x^2 + y^2 = 1$;
b) $A = (-3/7, 4/7)$, $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$.

908. Napíšte rovnice dotyčníc z počiatku ku kružnici prechádzajúcej bodmi $A = (0, -3)$, $B = (-1, 0)$, $C = (-2, 1)$.

909. Napíšte rovnicu poláry bodu A vzhľadom na danú kružnicu, ak

a) $A = (5, 7)$, $x^2 + y^2 = 9$;
b) $A = (4, 0)$, $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$.

910. Z bodu $A = (2, -1)$ sú zostrojené dotyčnice ku kružnici $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$. Nájdite uhol týchto dotyčníc.

911. Z bodu $A = (6, -1)$ sú zostrojené dotyčnice ku kružnici $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 24 = 0$. Vypočítajte dĺžku úsečky medzi dotykovými bodmi.

912. Vypočítajte dĺžku dotyčnice z bodu $A = (5, -9)$ ku kružnici $x^2 + y^2 - 7x + 11y + 37 = 0$.

913. Z bodu $B = (6, -10)$ sú zostrojené dotyčnice ku kružnici $x^2 + y^2 - 10x + 24y + 165 = 0$. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza ich bodmi dotyku. Vypočítajte vzdialenosť bodu B od tejto priamky a vzdialenosť tejto priamky od stredu danej kružnice.

914. Dokážte, že polára bodu A vzhľadom na kružnicu je kolmá na priamku prechádzajúcu bodom A a stredom kružnice.

915. Zistite vzájomnú polohu priamky a elipsy, ak ich rovnice sú:

a) $3x^2 + 5y^2 = 120$, $3x - 4y - 3 = 0$;
b) $25x^2 + 3y^2 = 300$, $5x + y - 20 = 0$;
c) $3x^2 + 2y^2 = 84$, $x + 2y - 15 = 0$.

916. Pre aké q priamka $y = x + q$ pretína, dotýka sa, leží mimo elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$?

917. Nájdite priesečník elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ s priamkou $x = t$, $y = 1 - t$.

918. Vypočítajte obsah pravouhlého rovnobežníka vpísaného do elipsy $9x^2 + 64y^2 = 576$, ak jedna jeho uhlopriečka je tetivou elipsy ležiacou na priamke $x - 2y = 0$.

919. Elipsa má rovnicu $9x^2 + 4y^2 = 36$. Nájdite rovnicu priamky, na ktorej leží tetiva so stredom v bode $S = (1, -2)$.

920. Nájdite dĺžku priemerov elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ určených uhlopriečkami obdĺžnika elipse opísaného so stranami $2a$, $2b$ rovnobežnými s osami elipsy.

921. Nájdite rovnicu priemeru elipsy $25x^2 + 49y^2 = 1225$, ktorý prechádza stredom jej tetivy na priamke $10x - 7y + 11 = 0$.

922. Nájdite rovnice združených priemerov elipsy, ak rovnica elipsy je:

a) $9x^2 + 16y^2 = 144$ a jeden z priemerov zviera s osou o_x uhol $45°$;
b) $4x^2 + 9y^2 = 180$ a jeden z priemerov je rovnobežný s priamkou $2x - y - 3 = 0$.

923. Elipsa má rovnicu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Nájdite združené priemery, ktorých dĺžky sú rovnaké.

924. Nájdite rovnice dotyčníc k elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ z bodu $A = (2, 5)$.

925. Na elipse $8x^2 + 25y^2 = 1800$ nájdite bod M taký, aby vzdialenosť $\varrho(M, p)$, kde p je priamka $x + 5y - 71 = 0$, bola najmenšia.

926. Vypočítajte dĺžku tetivy elipsy $x^2 + 2y^2 = 18$, ktorá leží v osi prvého a tretieho kvadrantu.

927. Nájdite rovnice dotyčníc k elipse, kolmých na danú priamku, ak rovnica elipsy a priamky je:

a) $x^2 + 2y^2 = 18$, $x - 2y + 4 = 0$;

b) $5x^2 + 16y^2 = 720$, $2x = y - 3$.

928. Nájdite poláru bodu $P = (2, 4)$ vzhľadom na elipsu $x^2/9 + y^2/4 = 1$.

929. Daná je elipsa $x^2/16 + y^2/12 = 1$ a priamka $3x + 10y = 24$, ktorá je polárou bodu P vzhľadom na elipsu. Nájdite súradnice bodu P.

930. Nájdite rovnicu elipsy, ktorej osi ležia v súradnicových osiach, ak elipsa prechádza bodom $A = (2, 2)$ a dotýka sa priamky $x + y - 5 = 0$.

931. Nájdite rovnicu elipsy, ktorá sa dotýka priamok $x + y - 5 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$ a ktorej osi ležia v súradnicových osiach.

932. Pod akým uhlom vidíme elipsu $x^2/6 + y^2/3 = 1$ z bodu $A = (4, -1)$?

933. Nájdite rovnice dotyčníc k elipse $x^2 + 2y^2 = 17$, ktorých vzdialenosť od jej stredu sa rovná 3,4.

934. Dokážte, že normála elipsy v bode A je osou uhla vektorov $\overrightarrow{F_1A}$, $\overrightarrow{F_2A}$, kde F_1, F_2 sú ohniská elipsy.

935. Dokážte, že elipsa a hyperbola so spoločnými ohniskami sa pretínajú pod pravým uhlom.

936. Nájdite analytické vyjadrenie množiny pólov všetkých dotyčníc ku kružnici $x^2 + y^2 = 16$ vzhľadom na elipsu $x^2/16 + y^2/9 = 1$.

937. Určte vzájomnú polohu priamky a hyperboly, ak ich rovnice sú:

a) $8x^2 - 9y^2 = 144$, $x - 7y + 22 = 0$;

b) $49x^2 - 50x^2 = 2450$, $7x - 5y - 35 = 0$;

c) $64x^2 - 81y^2 = 5184$, $2x - y = 0$.

938. Pre aké q priamka $y = x + q$ pretína, dotýka sa, leží mimo hyperboly $4x^2 - 25y^2 = 100$?

939. Nájdite rovnicu tetivy hyperboly $81x^2 - 25y^2 = -2025$, ak jej stred je v bode $A = (5, 18)$.

940. Nájdite dĺžku tetivy ktorá je kolmá na hlavnú os hyperboly $9x^2 - 4y^2 = 36$ a prechádza jej ohniskom.

941. Nájdite rovnicu priemeru hyperboly $4x^2 - 9y^2 = 144$ združeného k tetivám rovnobežným s priamkou $16x - 9y + 2 = 0$.

942. Nájdite rovnicu množiny stredov všetkých tetív hyperboly $x^2 - y^2 = 6$, ktoré prechádzajú bodom $M = (6, 0)$.

943. Hyperbola má rovnicu $y^2 = 4x^2 - 4$ a jej priemer má rovnicu $y = -x$. Nájdite rovnicu priemeru k nemu združeného a uhol týchto priemerov.

944. Nájdite rovnicu združených priemerov hyperboly, ak jej rovnica je:

a) $2x^2 - 3y^2 = 96$ a uhol združených priemerov je 45°;

b) $x^2 - 2y^2 = 16$ a jeden z priemerov je kolmý na priamku $3x + 2y - 10 = 0$.

945. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály k hyperbole:

a) $x^2 - 9y^2 = 9$ v bode $A = (-3, 0)$;

b) $4(x - 3)^2 - 45(y + 2)^2 = 180$ v bode $A = (-12, 2)$.

946. Nájdite rovnicu dotyčnice k hyperbole:

a) $4x^2 - 9y^2 = 36$ rovnobežnej s priamkou $x + y - 5 = 0$;

b) $27x^2 - 121y^2 = 3267$ rovnobežnej s priamkou $6x - 11y - 10 = 0$.

947. Nájdite rovnice dotyčníc k hyperbole $x^2 - y^2 = 4$ v jej priesečníkoch s priamkou $5y = 3x$.

948. Napíšte rovnice dotyčníc k hyperbole $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$, kolmých na priamku $2x + y = 0$.

949. Na hyperbole $3x^2 - 16y^2 = 192$ nájdite bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky $x - 2y - 14 = 0$.

950. Nájdite poláru bodu $P = (3, 5)$ vzhľadom na hyperbolu $9x^2 - 4y^2 = 36$.

951. Nájdite rovnice dotyčníc z bodu $A = (-6, -7)$ k hyperbole $5x^2 - 20y^2 = 100$.

952. Nájdite rovnicu hyperboly, ktorej osi ležia v súradnicových osiach a jej dotyčnica v bode $A = (4, 2)$ je priamka $x - y - 2 = 0$.

953. Nájdite rovnicu hyperboly, ktorá sa dotýka priamok $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$, ak jej osi ležia v súradnicových osiach.

954. Nájdite polosi hyperboly, ktorá má asymptoty $y = x/3$, $y = -x/3$ a dotýka sa priamky $\sqrt{2}x - y - 1 = 0$.

955. Dokážte, že dotyčnica hyperboly v bode B je osou uhla vektorov $\overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{F_2B}$, kde F_1, F_2 sú ohniská hyperboly.

956. Na zrkadlo tvaru hyperboly $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$ dopadá svetelný lúč z ľavého ohniska hyperboly, ktorý s osou o_x zviera uhol α, pričom $\operatorname{tg} \alpha = -2/11$, $(3\pi/2 < \alpha < 2\pi)$. Nájdite rovnicu priamky, v ktorej leží odrazený lúč, ak lúč sa odráža

a) od pravej vetvy hyperboly; b) od ľavej vetvy hyperboly.

957. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých bodov, z ktorých vidieť hyperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ pod pravým uhlom.

958. Zistite vzájomnú polohu priamky a paraboly, ak ich rovnice sú:

a) $y^2 = 20x$, $3x - 2y + 5 = 0$; c) $y^2 = -8x$, $x + y = 3$.

b) $x^2 = -32y$, $y = -x/2 + 2$;

959. Pre aké q priamka $y = x + q$ pretína, dotýka sa, leží mimo paraboly $y^2 = 10x$.

960. Nájdite rovnicu tetivy paraboly $y^2 = 40x$, ak jej stred je v bode $A = (2, 6)$.

961. Nájdite rovnicu priemeru paraboly $y^2 = 18x$, ktorý prechádza stredom jej tetivy na priamke $3x + y - 20 = 0$.

962. Tetiva paraboly $y^2 = 4x$ prechádza ohniskom a pretína parabolu v bode, ktorého x-ová súradnica je 4. Nájdite dĺžku tejto tetivy.

963. Vo vrchole paraboly $y^2 = 6x$ sú zostrojené dve tetivy, pretínajúce parabolu v bodoch, ktorých vzdialenosť od ohniska je 12. Nájdite uhol týchto tetív.

964. Do paraboly $y^2 = 11x$ je vpísaný rovnostranný trojuholník, ktorý má jeden vrchol vo vrchole paraboly. Napíšte rovnice strán trojuholníka.

965. Nájdite rovnicu dotyčnice k danej parabole rovnobežnej s danou priamkou, ak ich rovnice sú:

a) $y^2 = 8x$, $2x + y - 4 = 0$; c) $y = x^2/3 - x + 1$, $y = x$,
b) $x^2 = 4y$, $3x + 2y - 6 = 0$; d) $x = 2y^2 + 3y + 2$, $y = 2x + 2$.

966. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály k parabole v bode A, ak
a) $y^2 = 2x$, $A = (2, -2)$;
b) $3y^2 + x - 12y + 14 = 0$, $A = (-2, 2)$;
c) $x^2 + 6x - 2y + 15 = 0$, $A = (-3, 3)$.

967. Parabolu $y = x^2/2 + 3x + 7/2$ pretína priamka v bodoch, ktorých x-ové súradnice sú -4 a -1. Napíšte rovnicu dotyčnice k danej parabole, rovnobežnej s danou priamkou.

968. Na parabole nájdite bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky p, ak rovnice paraboly a priamky p sú:
a) $y^2 = 36x$, $9x - y + 83 = 0$; b) $x^2 = 64y$, $3x + 4y - 39 = 0$.

969. Nájdite rovnice dotyčníc paraboly kolmých na danú priamku, ak rovnice priamky a parboly sú:
a) $x + y + 1 = 0$, $y^2 = 14x$; b) $5x + 2y + 3 = 0$, $x^2 = 100y$.

970. Nájdite poláru bodu $Q = (2, -3)$ vzhľadom na parabolu $x^2 = 12y$.

971. Nájdite pól priamky $5x + 2y - 10 = 0$ vzhľadom na parabolu $x^2 = 6y$.

972. Napíšte rovnicu dotyčnice ku parabole:
a) $y^2 = 4x$, ktorá prechádza bodom $B = (-4, 0)$;
b) $x^2 = 2y$, ktorá prechádza bodom $A = (-1, -4)$.

973. Zistite, pod akým uhlom vidieť parabolu $y^2 = 6x$ z bodu $A = (-2, 2)$. Aké sú rovniče dotyčníc k parabole z bodu A?

974. Zistite, pod akým uhlom sa pretínajú paraboly $y^2 = 4x$ a $x^2 = 4y$.

975. Nájdite vzdialenosť ohniska od dotyčnice paraboly $y^2 = 2px$, ktorá s osou paraboly zviera uhol α.

976. Dokážte, že svetelné lúče vychádzajúce z ohniska paraboly odrážajú sa od paraboly do priamok rovnobežných s jej osou.

977. Nájdite analytické vyjadrenie stredov všetkých kružníc dotýkajúcich sa osi o_x a kružnice $x^2 + y^2 = 2ny$, $n > 0$.

978. Nájdite analytické vyjadrenie stredov všetkých tetív paraboly $y^2 = 2px$, ktoré vychádzajú z vrcholu paraboly.

979. Nájdite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú danej priamky a danú kružnicu kolmo pretínajú.

980. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých priesečníkov navzájom kolmých normál paraboly $y^2 = 2px$.

981. Nájdite analytické vyjadrenie množiny všetkých päť kolmíc spustených z ohniska paraboly $y^2 = 2px$ na jej normály.

982. Nájdite poláru ohniska:
a) elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; c) paraboly $y^2 = 2px$.
b) hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$;

983. Dokážte, ak priamka $Ax + By + C = 0$ je dotyčnicou
a) k elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, platí $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$;
b) k hyperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, platí $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$;
c) k parabole $y^2 = 2px$, platí $B^2p = 2AC$.

4,15. Všeobecná rovnica kužeľosečky

Kvadratická rovnica s neznámymi x, y má všeobecný tvar

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

kde a_{ij}, ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$) sú čísla a aspoň jedno z čísiel a_{11}, a_{12}, a_{22} sa nerovná nule.

Rovnica (1) v pravouhlom súradnicovom systéme môže vyjadrovať: 1. *kužeľosečku* (kružnicu, elipsu, hyperbolu, parabolu); 2. *dvojicu priamok* alebo *priamku*; 3. *bod*; 4. *prázdnu množinu*.

Označme:

$$I_3 = D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_2 = D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad I_1 = a_{11} + a_{22},$$

$$S_2 = D_{11} + D_{22} = \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13} \\ a_{31}, & a_{33} \end{vmatrix}^{*)}$$

Ak $I_3 \neq 0$, rovnica (1) je rovnicou kužeľosečky alebo bodu alebo prázdnej množiny.

Ak $I_3 = 0$, možno ľavú stranu rovnice (1) vyjadriť ako súčin dvoch lineárnych činiteľov vzhľadom na x a y. Rovnica (1) potom je rovnicou dvoch priamok (rôznobežiek, rovnobežiek) alebo jednej priamky, alebo bodu alebo prázdnej množiny a hovoríme, že rovnica (1) je rovnicou *degenerovanej kužeľosečky*.

Stred kužeľosečky. Ak kužeľosečka daná rovnicou (1) má jediný stred súmernosti, potom ho nazývame *stredom* kužeľosečky a kužeľosečku nazývame *stredovou*.

Pre stred súmernosti množiny určenej rovnicou (1) platí

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pri riešení sústavy (2) môžu nastať tri prípady:

a) Sústava (2) má jediné riešenie, ak $I_2 \neq 0$. Rovnica (1) môže byť rovnicou kružnice, elipsy, hyperboly, dvoch rôznobežiek, bodu a prázdnej množiny.

Nech sústava (2) má jediné riešenie (m, n) a $I_3 \neq 0$, polohu množiny (1) určujeme takto: Posunutím

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + m \\ y &= y' + n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

rovnica (1) prejde na tvar

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0, \tag{4}$$

pričom $a'_{3} = a_{13}m + a_{23}n + a_{33}$ alebo

$$a'_{33} = \frac{I_3}{I_2}. \tag{5}$$

Ak $a_{12} \neq 0$, použijeme otočenie

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha, \\ y' &= x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

okolo počiatku O' o uhol α tak, aby v rovnici (4) bolo $a_{12} = 0$. Rovnica (4) prejde na tvar

$$a''_{11}x''^2 + a''_{12}y''^2 + a'_{33} = 0. \tag{7}$$

Pre uhol α platí

$$a_{12}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + (a_{11} - a_{22})\,\mathrm{tg}\,\alpha - a_{12} = 0. \tag{8}$$

Z rovnice (8) možno určiť $\mathrm{tg}\,\alpha$ a pomocou známych vzťahov z trigonometrie $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}} \tag{9}$$

a potom podľa vzťahov (6) vykonať otočenie.

---

*) Platí $a_{ji} = a_{ij}$.

Poznámka 1. Rovnicu (4) možno previesť na rovnicu (7) aj priamo. Koeficienty a''_{11}, a''_{22} sú riešením tzv. *charakteristickej rovnice*

$$z^2 - I_1 z + I_2 = 0 \tag{10}$$

a tg α nájdeme zo vzťahu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a''_{11} - a_{11}}{a_{12}}. \tag{11}$$

Ak rovnica (7) je rovnicou elipsy a pre korene rovnice (10) platí $|a''_{11}| < |a''_{22}|$, tak vzťah (11) udáva smernicu hlavnej osi elipsy.

Ak rovnica (7) je rovnicou hyperboly a a''_{11} je ten koreň rovnice (10), ktorý má rovnaké znamienko ako I_3, vzťah (11) udáva smernicu reálnej osi hyperboly.

b) Sústava (2) má nekonečne mnoho riešení, ak $I_2 = I_3 = 0$. Rovnica (1) je rovnicou dvoch rovnobežiek alebo priamky alebo prázdnej množiny, ako sme to prv uviedli. Ľavú stranu tejto rovnice môžeme rozložiť na súčin lineárnych činiteľov vzhľadom na x a y, čím dostaneme rovnicu týchto množín.

c) Sústava (2) nemá riešenie, ak $I_2 = 0$ a $I_3 \neq 0$. Rovnica (1) je rovnicou paraboly. Otočením

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$
$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

kde uhol α je určený vzťahom (8), prejde rovnica (1) na tvar

$$a''_{11} x'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a_{33} = 0,$$

ak $a'_{11} \neq 0$ alebo na tvar (12)

$$a''_{22} y'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a_{33} = 0,$$

ak $a'_{22} \neq 0$.

Vhodným posunutím rovnica (12) prejde na osový tvar rovnice paraboly.

Poznámka 2. Rovnicu (1) možno previesť na osový tvar rovnice paraboly aj priamo tak, že nájdeme parameter paraboly, jej os, vrchol a jej polohu na osi. Vrchol určíme riešením rovnice paraboly s rovnicou jej osi

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0,$$

alebo (13)

$$a_{21}x + a_{22}y + \frac{a_{22}a_{23} + a_{12}a_{13}}{a_{11} + a_{22}} = 0.$$

Vektor $s = \left(\begin{vmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{23} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{31}, & a_{32} \end{vmatrix} \right)$ je súhlasne rovnobežný s vektorom $F - V$, kde F je ohnisko a V vrchol paraboly. Parameter paraboly určíme zo vzťahu

$$p = \sqrt{-I_3/I_1^3}. \tag{14}$$

Ako sme to uviedli v poznámke 1 a v poznámke 2 osové rovnice kužeľosečiek, prípadne rovnice množín určených rovnicou (1) môžeme dostať aj bez uvedených transformácií, a to pomocou čísiel I_3, I_2, I_1 (invariantov), S (semiinvariantu) a koreňov λ_1, λ_2 charakteristickej rovnice (10), podľa *tab. 5*.

Údaje v druhom a treťom stĺpci *tab. 5* sú nutné a postačujúce podmienky pre množinu uvedenú v štvrtom stĺpci.

Polára a dotyčnica. Polára bodu $P = (x_0, y_0)$ vzhľadom na kužeľosečku (1) má rovnicu

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})\, x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})\, y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0. \tag{15}$$

Ak bod $P = (x_0, y_0)$ je bodom kužeľosečky (1), rovnica (15) je rovnicou dotyčnice ku kužeľosečke v bode P.

Priemer kužeľosečky (1), ktorý prislúcha k tetivám zvierajúcim s osou o_x uhol α, má rovnicu

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) \cos \alpha + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) \sin \alpha = 0, \tag{16}$$

alebo

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\, k = 0, \tag{17}$$

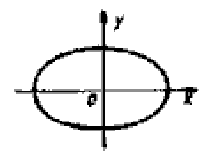
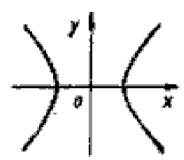
kde k je smernica tetív.

Pre smernice k, k' združených priemerov platí

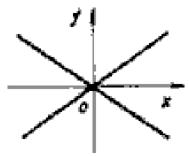
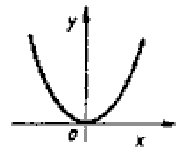
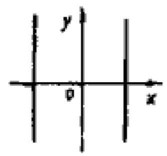
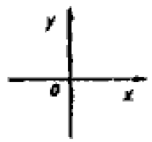
$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0. \tag{18}$$

Tabuľka 5

Určenie množiny bodov danej všeobecnou rovnicou (1) v pravouhlom súradnicovom systéme

Poradové číslo	Hodnoty invariantov a semiinvariantov			Množina	Znázornenie	Rovnica*(1) po transformácii	
1	$I_2 \neq 0$	$I_2 > 0$	$I_1 I_3 < 0$	elipsa (kružnica)		$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*) $(a = b)$
2			$I_1 I_3 > 0$	prázdna množina			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$
3			$I_3 = 0$	bod			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
4		$I_2 < 0$	$I_3 \neq 0$	hyperbola			$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Pokračovanie tab. 5

5	$I_2 \neq 0$	$I_2 < 0$	$I_3 = 0$	dve rôznobežky		$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
6	$I_2 = 0$	$I_3 \neq 0$		parabola		$I_1 x^2 + 2 \sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}\, y = 0$	$x^2 - 2py = 0$
7		$I_3 = 0$	$S_2 < 0$	dve rovnobežky		$I_1 x^2 + \frac{S_2}{I_1} = 0$	$x^2 - a^2 = 0$
8			$S_2 > 0$	prázdna množina			$x^2 + a^2 = 0$
9			$S_2 = 0$	jedna priamka			$x^2 = 0$

*) Rovnica (1) pri uvedených hodnotách invariantov je rovnicou kružnice, ak $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, inač je rovnicou elipsy.

Asymptoty hyperboly možno považovať za priemer, ktorý je sám sebe združený. Pre uhol asymptot hyperboly s osou o_x platí

$$a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 0, \tag{19}$$

alebo, ak $a_{22} \neq 0$, platí pre smernice asymptot

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0. \tag{20}$$

Príklad 1. Nájdime tvar a polohu kužeľosečky

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0. \tag{21}$$

Riešenie. Vypočítajme

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5, & 2, & -16 \\ 2, & 8, & -28 \\ -16, & -28, & 80 \end{vmatrix} = -1296; \qquad I_2 = \begin{vmatrix} 5, & 2 \\ 2, & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0;$$

$$I_1 = 5 + 8 = 13.$$

Keďže $I_2 > 0$, $I_1I_3 = 13(-1296) < 0$, $a_{12} = 4 \neq 0$, rovnica (21) je rovnicou elipsy. Tvar a polohu tejto elipsy určíme tak, že nájdeme jej stred, dĺžku polosí a rovnicu hlavnej osi. Hľadajme stred elipsy. Riešime systém

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 16 &= 0 \\ 2x + 8y - 28 &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

a dostaneme $S = (2, 3)$. Vykonajme posunutie

$$x = x' + 2,$$
$$y = y' + 3,$$

kde $O = S$.

Rovnica (21) prejde na tvar

$$5x'^2 + 4x'y' + 8y'^2 - 36 = 0. \tag{23}$$

Otočme súradnicový systém $x'O'y'$ okolo počiatku O' tak, aby sa koeficient pri $x'y'$ v rovnici (23) rovnal nule. Použitím vzťahov (6) z rovnice (23) dostaneme

$$\begin{aligned} &(5\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha)\,x''^2 + (6\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha)\,x''y'' + \\ &+ (5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha)\,y''^2 - 36 = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Uhol α zvolíme tak, aby spĺňal rovnicu

$$6\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 0,$$

alebo

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2 = 0. \tag{25}$$

Riešením rovnice (25) dostaneme $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -1/2$. Zvolíme $\mathrm{tg}\,\alpha = -1/2$. Vypočítame

$$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

a dosadíme do vzťahu (24). Dostaneme

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0, \tag{26}$$

čiže

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} - 1 = 0. \tag{27}$$

Rovnica (21) je preto rovnica elipsy so stredom $S = (2, 3)$ a polosami $a = 3$, $b = 2$. Jej hlavná os má smernicu $\mathrm{tg}\,\alpha = -1/2$ (pozri *obr. 64*).

Poznámka. Rovnicu (23) môžeme previesť na rovnicu (26) aj priamo. Koeficienty a''_{11}, a''_{22} sú korene charakteristickej rovnice

$$z^2 - 13z + 36 = 0. \tag{28}$$

Jej riešenie je $z_1 = 4$, $z_2 = 9$. Keďže $z_1 < z_2$, položme $a''_{11} = 4$ a $a''_{22} = 9$. Z toho dostaneme podľa vzťahu (7)

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0$$

a osová rovnica tejto elipsy je

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1.$$

Smernica hlavnej osi podľa vzťahu (11) je

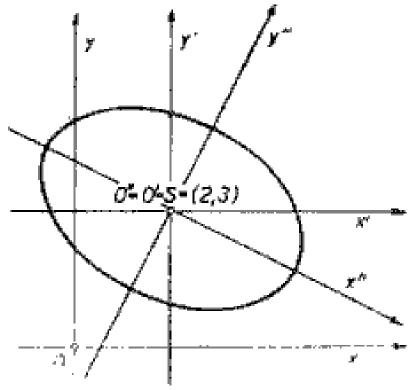
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - 5}{2} = -\frac{1}{2}$$

a rovnica hlavnej osi je

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2),$$

alebo

$$x + 2y - 8 = 0.$$



Obr. 64

Príklad 2. Zistime, akú množinu bodov v rovine určuje rovnica

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y - 3 = 0 \tag{29}$$

a znázornime ju.

Riešenie. Vypočítajme

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2, & 3/2, & -5/2 \\ 3/2, & -2, & 5/2 \\ -5/2, & 5/2, & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 2, & 3/2 \\ 3/2, & -2 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4} < 0.$$

Keďže $I_3 = 0$ a $I_2 < 0$, rovnica (29) je rovnicou dvoch rôznobežiek. Ich rovnice nájdeme najjednoduchšie tak, keď rovnicu (29) usporiadame podľa klesajúcich mocnín y (resp. x) a vyriešime vzhľadom na y (resp. x). Dostaneme

$$-2y^2 + y(3x + 5) + 2x^2 - 5x - 3 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{-(3x + 5) \pm \sqrt{(3x + 5)^2 + 8(2x^2 - 5x - 3)}}{-4},$$

$$y_{1,2} = \frac{-(3x + 5) \pm \sqrt{25x^2 - 10x + 1}}{-4},$$

$$y_{1,2} = \frac{3x + 5 \pm (5x - 1)}{4}.$$

Z toho $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x/2 + 3/2$. Ľavú stranu rovnice (29) môžeme preto písať v tvare

$$-2(y - y_1)(y - y_2),$$

alebo po dosadení za y_1 a y_2 v tvare

$$-(y - 2x - 1)(2y + x - 3)$$

a máme

$$(2x - y + 1)(x + 2y - 3) = 0.$$

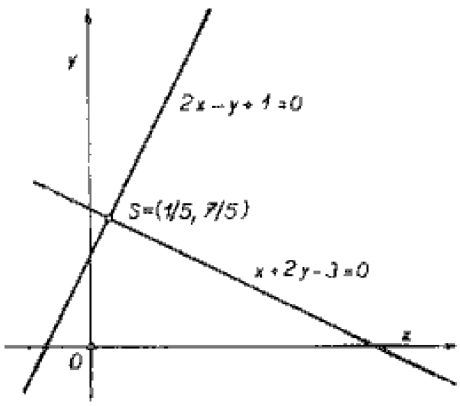
Z toho vyplýva (ako sme už predtým zistili), že množinou bodov v rovine, určenou rovnicou (29), sú dve rôznobežky

$$2x - y + 1 = 0,$$
$$x + 2y - 3 = 0,$$

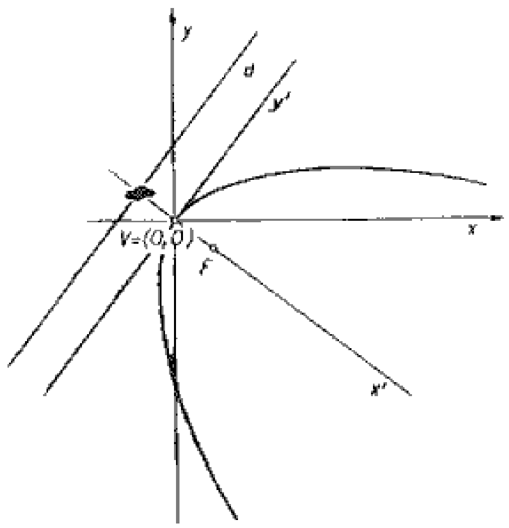
pričom ich priesečník je $P = (1/5, 7/5)$ (pozri *obr. 65*).

Poznámka. Uvedené rovnice sme mohli dostať tiež úpravou ľavej strany rovnice (29) na rozdiel štvorcov:

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y - 3 = 2\left[\left(x + \frac{3y - 5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5y - 7}{4}\right)^2\right].$$



Obr. 65



Obr. 66

Príklad 3. Zistime, aký geometrický útvar má rovnicu

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0. \tag{30}$$

Riešenie.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 9, & 12, & -20 \\ 12, & 16, & 15 \\ -20, & 15, & 0 \end{vmatrix} = -15\,625 \neq 0, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} 9, & 12 \\ 12, & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Keďže $I_3 \neq 0$ a $I_2 = 0$, daná rovnica je rovnicou paraboly. Rovnicu (30) prevedieme na vrcholový tvar tak, že nájdeme vrchol a parameter paraboly. Vrchol určíme podľa (13) riešením rovníc

$$9x + 12y = 0,$$
$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$$

Riešením tejto sústavy je dvojica $(0, 0)$, čiže vrchol $V = (0, 0)$. Parameter paraboly podľa (14) je:

$$p = \sqrt{\frac{-I_3}{I_1^3}} = \sqrt{\frac{15\,625}{25^3}} = \sqrt{1} = 1.$$

Os paraboly je súhlasne rovnobežná s vektorom $\boldsymbol{s} = \{4/5, -3/5\}$. Jej vrcholová rovnica je $y'^2 = 2x'$ (pozri *obr. 66*).

Príklad 4. Zistime, akú kužeľosečku predstavuje rovnica

$$7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0. \tag{31}$$

Riešenie.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 7, & -12, & -19 \\ -12, & 0, & 12 \\ -19, & 12, & 175 \end{vmatrix} = -20\,736 \neq 0, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 7, & -12 \\ -12, & 0 \end{vmatrix} = -144, \quad I_1 = 7 + 0 = 7.$$

Keďže $I_3 \neq 0$ a $I_2 < 0$, je rovnica (31) rovnicou hyperboly.

Polohu hyperboly určíme najjednoduchšie tak, že nájdeme jej stred. Pre súradnice stredu platí

$$\begin{aligned} 7x - 12y - 19 &= 0, \\ -12x + 12 \quad\quad &= 0. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy je dvojica $(1, -1)$ a stred hyperboly je $S = (1, -1)$.

Aby sme určili osovú rovnicu hyperboly, riešime charakteristickú rovnicu

$$z^2 - 7z - 144 = 0.$$

Jej korene sú $z_1 = 16$ a $z_2 = -9$. Rovnicu (31) môžeme previesť na tvar

$$-9x''^2 + 16y''^2 + 144 = 0,$$

alebo

$$\frac{x''^2}{16} - \frac{y''^2}{9} = 1,$$

čo je hľadaná osová rovnica hyperboly.

Smernica reálnej osi hyperboly je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-9 - 7}{-12} = \frac{4}{3}$$

a rovnica tejto reálnej osi je

$$4x - 3y - 7 = 0.$$

Pre uhol asymptot hyperboly s osou o_x platí podľa vzťahu (19)

$$7 \cos^2 \alpha - 24 \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (0 \leq \alpha < 180°).$$

Z toho vyplýva $\cos \alpha = 0$, čiže $\alpha = 90°$ a $7 \cos \alpha - 24 \sin \alpha = 0$, čiže $\operatorname{tg} \alpha = 7/24$. Rovnice asymptot hyperboly (31) sú

$$x = 1$$

a

$$y + 1 = \frac{7}{24}(x - 1),$$

alebo

$$x - 1 = 0, \quad 7x - 24y - 31 = 0 \ \textit{(obr. 67)}.$$

Príklad 5. Nájdime združené priemery elipsy

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0, \tag{32}$$

ak jeden z nich je rovnobežný s polárou bodu $P = (0, 0)$ vzhľadom na danú elipsu.

Riešenie. Rovnica poláry bodu $P = (0, 0)$ vzhľadom na elipsu (32) je podľa vzťahu (15)

$$-16x - 28y + 80 = 0,$$

čiže

$$4x + 7y - 20 = 0. \tag{33}$$

Priemer elipsy (32), ktorého tetivy sú rovnobežné s polárou (33) má podľa vzťahu (17) rovnicu

$$(5x + 2y - 16) + (2x + 8y - 28)\left(-\frac{4}{7}\right) = 0,$$

čiže

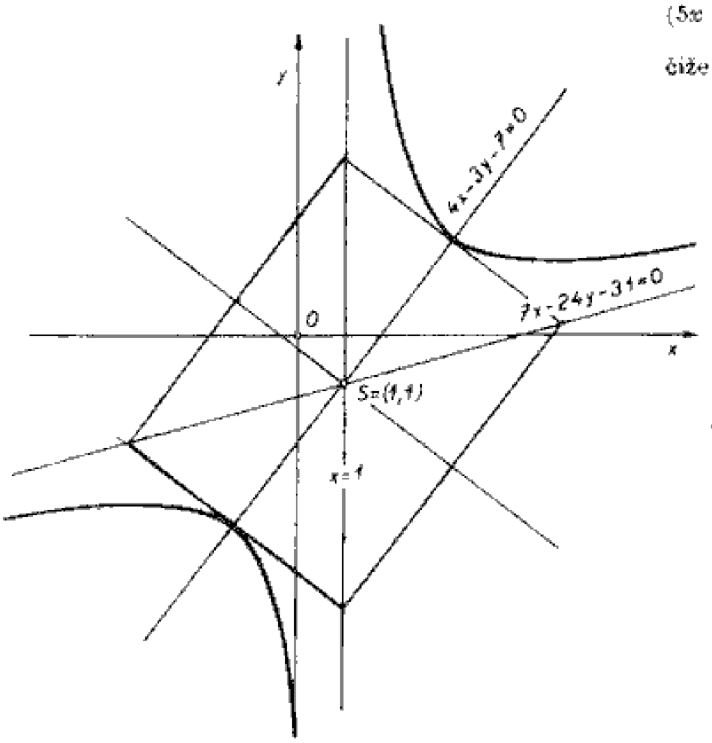
$$3x - 2y = 0.$$

Keďže tetivy združeného priemeru sú rovnobežné s vypočítaným priemerom so smernicou $k = 3/2$, združený priemer podľa vzťahu (17) má rovnicu

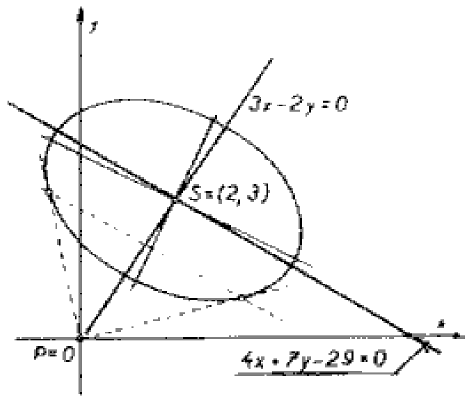
$$(5x + 2y - 16) + (2x + 8y - 28)\frac{3}{2} = 0,$$

čiže

$$4x + 7y - 29 = 0 \quad \textit{(obr. 68)}.$$



Obr. 67



Obr. 68

984. V uvedených rovniciach stanovte koeficienty $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$:

a) $x^2 - xy + 2y^2 - y + \sqrt{2}x + 6 = 0$; d) $4y^2 + 2y - 1 = 0$;
b) $y^2 - x^2 + 4y - 6 = 0$; e) $x^2 + y^2 = 0$.
c) $2xy + 6y - 7x + 9 = 0$;

985. Napíšte rovnicu kužeľosečky, ktorá prechádza bodmi:

a) $A = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, $B = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $C = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $D = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $E = (-1/2, \sqrt{3}/2)$;
b) $A = (0, 2)$, $B = (1, 3)$, $C = (2, 6)$, $D = (-2, 6)$, $E = (-4, 18)$.

986. Nájdite rovnicu kužeľosečky, ktorá je určená bodmi:

a) $A = (3, -1)$, $B = (1, -2)$, $C = (0, -1)$, $D = (2, 0)$, $E = (0, 0)$;
b) $A = (3, 2)$, $B = (0, 3)$, $C = (0, 5)$, $D = (15, 0)$ a nie je stredová.

987. Dané sú body $A = (2, 3)$, $B = (2, 1)$, $C = (1, -2 + \sqrt{6})$. Rozhodnite, ktoré z nich sú bodmi množiny danej rovnicou $2x^2 + 3xy - y^2 + 6x - 7y - 6 = 0$.

988. Pre aké číslo c je rovnica $x^2 + 4xy + cy^2 + 8x + 4y - 12 = 0$ rovnicou:
a) kužeľosečky;
b) stredovej kužeľosečky;
c) degenerovanej kužeľosečky;
d) paraboly?

989. Napíšte rovnicu $6x^2 - 7xy + y^2 + x - y + 6 = 0$ v novom súradnicovom systéme, ktorý dostanete posunutím pôvodného tak, aby nový počiatok bol:
a) v bode $A = (-1, 2)$;
b) v priesečníku priamok $6x - 3y/2 + 1/2 = 0$, $-3x/2 + y - 1/2 = 0$.

990. Kužeľosečka prechádza počiatkom a bodmi $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$. Nájdite jej rovnicu, ak jej stred je $S = (4, 2)$.

991. Akú množinu predstavuje rovnica:
a) $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 10x + 10y + 13 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 2y - 9 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y - 5 = 0$?

992. Zistite, či množina bodov daná rovnicou:
a) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$;
b) $xy + 2x + 3y = 0$;
c) $x^2 + 4x - y + 5 = 0$;
d) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$;
e) $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$

predstavuje stredovú kužeľosečku. Ak áno, nájdite jej stred.

993. Dokážte, že množina bodov, ktorej analytické vyjadrenie je:
a) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x - 6y - 4 = 0$;
b) $x^2 - 16 = 0$;
c) $y^2 - y - 6 = 0$;
d) $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$

má nekonečne mnoho stredov. Nájdite analytické vyjadrenie množiny týchto stredov.

994. Daná je kužeľosečka $x^2 + xy + x - 3 = 0$. Posuňte počiatok súradnicového systému do stredu kužeľosečky a vyjadrite ju v novom súradnicovom systéme.

995. Aké množiny bodov sú dané rovnicami:
a) $x^2 + y^2 = 0$;
b) $x^2 - y^2 = 0$;
c) $xy = 0$;
d) $x^2 + y^2 + 2 = 0$;
e) $(x + y)^2 = 0$?

996. Ukážte, že rovnice:
a) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 9 = 0$;
b) $x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$;
c) $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 10x - 5y = 0$;
d) $25x^2 + 30xy + 9y^2 + 70x + 42y + 49 = 0$;
e) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 30x + 20y - 11 = 0$

vyjadrujú degenerované kužeľosečky a rozkladom na činitele nájdite množiny určené týmito rovnicami.

997. Posunutím a otočením súradnicového systému preveďte rovnicu kužeľosečky:
a) $x^2 - xy + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$;
b) $x^2 + 6xy + y^2 + 12x + 20y + 51 = 0$

na osový tvar.

998. Daná je rovnica:
a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
b) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$;
c) $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0$.

Zistite, či daná rovnica je rovnicou kužeľosečky a ak áno, napíšte jej osovú, resp. vrcholovú rovnicu.

999. Vhodnými zhodnosťami zjednodušte uvedené rovnice a zistite, akú množinu predstavujú:

a) $9x^2 + 24xy + 41y^2 + 18x + 24y - 36 = 0$;
b) $35x^2 - 8xy + 50y^2 - 8x + 100y + 67 = 0$;
c) $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 112x + 34y + 129 = 0$;
d) $11x^2 + 24xy + 4y^2 + 42x + 64y + 51 = 0$;
e) $8x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4 = 0$;
f) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 110x - 20y - 50 = 0$;
g) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 120x - 160y + 425 = 0$;
h) $x^2 - 10xy + 25y^2 - 2x + 10y - 15 = 0$;
i) $9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 4 = 0$.

1000. Nájdite stred, osovú rovnicu a rovnice osí elipsy:

a) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
b) $21x^2 + 24xy + 14y^2 + 18x - 4y - 139 = 0$;
c) $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 64x + 64y - 224 = 0$.

1001. Nájdite stred, osovú rovnicu, rovnice osí a asymptot hyperboly:

a) $3x^2 + 4xy + 12x + 16y - 36 = 0$;   b) $2xy + 3x - 8y + 10 = 0$.

1002. Nájdite vrchol os, parameter, ohnisko a vrcholovú rovnicu paraboly:

a) $x^2 - 2xy + y^2 - 14x + 6y + 29 = 0$;
b) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 38x - 34y + 71 = 0$.

1003. Nájdite vzájomnú polohu kužeľosečky $3x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ a priamky

a) $x - 5y + 5 = 0$;   c) $4x + y - 1 = 0$;
b) $2x + y + 2 = 0$;   d) $3x - y = 0$.

1004. Nájdite rovnice dotyčníc ku kužeľosečke $2x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 3y = 0$ v bodoch, ktorých y-ová súradnica je -2.

1005. Napíšte rovnice dotyčníc ku kužeľosečke $x^2 + xy + y^2 + 3x + 2y - 3 = 0$ rovnobežných

a) s osou o_y;   b) s priamkou $3x + 3y - 5 = 0$.

1006. V priesečníkoch kužeľosečky $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y = 0$ s priamkou $x - 3y - 6 = 0$ sú zostrojené dotyčnice. Vypočítajte súradnice ich priesečníkov.

1007. Nájdite rovnice dotyčníc z bodu A ku kužeľosečke, ak bod A a rovnica kužeľosečky sú:

a) $A = (0, 0)$, $5x^2 + 7xy + 3y^2 + 5x + 4y + 1 = 0$;
b) $A = (4, 3)$, $x^2 - 4xy + 2y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$;
c) $A = (1, -2)$, $2x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 3y = 0$.

1008. Z bodu $M = (1, 3)$ sú zostrojené dotyčnice ku kužeľosečke $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$. Nájdite rovnicu spojnice dotykových bodov.

1009. Vypočítajte združené priemery kužeľosečky $2x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$, ak jeden z priemerov prechádza počiatkom.

1010. Napíšte rovnice združených priemerov kužeľosečky $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$, ktoré zvierajú uhol 45°.

1011. Nájdite priemer kužeľosečky $5x^2 + 7xy + 3y^2 + 5x + 4y + 1 = 0$, ktorého tetivy sú:

a) rovnobežné s osou o_x;   c) rovnobežné s priamkou $x + y + 1 = 0$.
b) rovnobežné s osou o_y;

1012. Daná je parabola $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$. Nájdite rovnice priemeru tejto paraboly, ktorý

a) prechádza počiatkom;
b) má tetivy rovnobežné s osou o_x;
c) má tetivy rovnobežné s osou o_y;
d) je kolmý na svoje tetivy.

1013. Napíšte rovnicu kužeľosečky, ktorá prechádza počiatkom a dotýka sa priamky $3x + 4y + 2 = 0$ v bode $P = (-2, 1)$ a priamky $x - y + 1 = 0$ v bode $Q = (-1\ 0)$.

1014. Nájdite rovnicu hyperboly, ktorá

a) prechádza počiatkom a má asymptoty $x + 1 = 0$ a $y + 1 = 0$;
b) dotýka sa priamky $x + 4y + 5 = 0$ a má asymptoty $y - 1 = 0$ a $x - 2y - 1 = 0$.

1015. Napíšte rovnicu paraboly, na ktorej ležia body $A = (2, 1)$, $B = (1, 1)$ a rovnica direkčnej priamky je $x + y - 1 = 0$.

1016. Nájdite rovnicu paraboly, ktorá sa dotýka osi o_x v bode $A = (5, 0)$ a osi o_y v bode $B = (0, 3)$.

4,16. Rovina

1. *Všeobecná rovnica roviny.* Každá rovina v pravouhlom súradnicovom systéme v priestore má rovnicu

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1}$$

pričom aspoň jedno z čísiel a, b, c je rôzne od nuly.

Ak aspoň jedno z čísiel a, b, c je rôzne od nuly, potom každá rovnica tvaru (1) je v pravouhlom súradnicovom systéme v priestore rovnicou roviny. Rovnicu (1) nazývame *všeobecnou rovnicou roviny.*

Zvláštne prípady všeobecnej rovnice roviny:

a) Ak $d = 0$, rovina prechádza počiatkom súradnicového systému.

b) Ak číslo $a[b, c]$ sa rovná nule a $d \neq 0$, rovina je rovnobežná s osou $o_x[o_y, o_z]$.

c) Ak číslo $a[b, c]$ sa rovná nule, a $d = 0$, je (1) rovnicou roviny, ktorá prechádza osou $o_x[o_y, o_z]$.

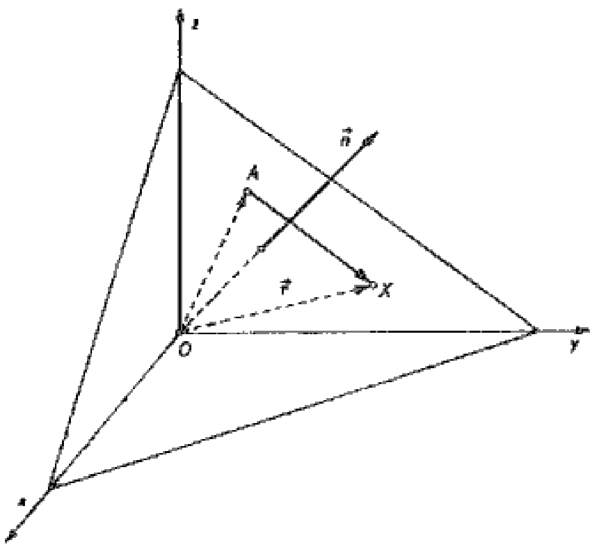
d) Ak čísla a, b [b, c, alebo a, c] rovnajú sa nule a $d \neq 0$, potom rovnica (1) je rovnicou roviny rovnobežnej so súradnicovou rovinou R_{xy} [R_{yz} alebo R_{xz}].

e) Ak čísla a, b [b, c alebo a, c] sa rovnajú nule ako aj $d = 0$, rovnica (1) je rovnicou roviny R_{xy}[R_{yz} alebo R_{xz}].

2. *Vektorová rovnica roviny* (1) je

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + d = 0, \tag{2}$$

kde $\mathbf{n} = \{a, b, c\}$ je nenulový vektor, ktorý určuje priamku kolmú na danú rovinu, $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ je polohový vektor ľubovoľného bodu roviny. Vektor $\mathbf{n}$ nazývame *normálovým vektorom* roviny *(obr. 69)*.



Obr. 69

3. *Normálová rovnica roviny* v pravouhlom súradnicovom systéme je

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \tag{3}$$

kde p je dĺžka kolmice k spustenej z počiatku súradnicového systému na rovinu a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sú jej smerové kosínusy.

Ak jednotkový vektor tejto kolmice je $\mathbf{n}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, potom vektorový tvar normálovej rovnice roviny je

$$\mathbf{n}^\circ . \mathbf{r} - p = 0. \tag{4}$$

Ak rovina je určená rovnicou (1), potom o smerových kosínusoch kolmice k a čísle p platí

$$\cos\alpha = a\mu, \quad \cos\beta = b\mu, \quad \cos\gamma = c\mu,$$

$$p = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \text{kde } \mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \tag{5}$$

pričom $\mu > 0$, ak $d \leqq 0$ a $\mu < 0$, ak $d \gtrapprox 0$.

Všeobecnú rovnicu roviny (1) možno previesť na normálovú rovnicu roviny vynásobením číslom μ.

4. *Úseková rovnica roviny* je

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \tag{6}$$

kde nenulové čísla p, q, r nazývame ***úsekmi*** a sú určené priesečníkmi $P = (p, 0, 0)$, $Q = (0, q, 0)$, $R = (0, 0, r)$ roviny so súradnicovými osami o_x, o_y, o_z.

5. ***Rovnica roviny určenej bodom*** $A = (x_1, y_1, z_1)$ a jej normálovým vektorom $\mathbf{n} = (a, b, c)$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \tag{7}$$

Vektorový tvar tejto rovnice je

$$\mathbf{n} . (X - A) = 0. \tag{8}$$

(Pozri *obr. 69*).

6. ***Rovnica roviny prechádzajúcej bodom*** $A = (x_1, y_1, z_1)$ ***a rovnobežnej s dvoma nekolineárnymi vektormi*** $\mathbf{a} = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\mathbf{b} = \{l_2, m_2, n_2\}$ je

$$[(X - A) \times \mathbf{a}] . \mathbf{b} = 0, \tag{9}$$

alebo

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1, & z - z_1 \\ l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Parametrický tvar rovnice (9) je

$$X = A + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \tag{11}$$

alebo

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ul_1 + vl_2, \\ y &= y_1 + um_1 + vm_2, \\ z &= z_1 + un_1 + vn_2, \end{aligned} \tag{12}$$

kde u, v sú ľubovoľné čísla, ktoré nazývame *parametrami*.

7. ***Rovnica roviny určenej troma bodmi*** $A = (a_1, b_1, c_1)$, $B = (a_2, b_2, c_2)$, $C = (a_3, b_3, c_3)$, ktoré neležia na jednej priamke, je

$$X = A + u(B - A) + v(C - A), \tag{13}$$

alebo

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u(a_2 - a_1) + v(a_3 - a_1), \\ y &= b_1 + u(b_2 - b_1) + v(b_3 - b_1), \\ z &= c_1 + u(c_2 - c_1) + v(c_3 - c_1), \end{aligned} \tag{14}$$

kde u, v sú ľubovoľné čísla.

Vylúčením parametrov u a v z rovnice (13) dostaneme rovnicu

$$[(X - A) \times (B - A)] . (C - A) = 0. \tag{15}$$

V pravouhlom súradnicovom systéme rovnica (15) má tvar

$$\begin{vmatrix} x - a_1, & y - b_1, & z - c_1 \\ a_2 - a_1, & b_2 - b_1, & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1, & b_3 - b_1, & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

alebo

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ a_1, & b_1, & c_1, & 1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & 1 \\ a_3, & b_3, & c_3, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

8. *Uhol dvoch rovín*

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{r} + d_1 = 0,$$
$$\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{r} + d_2 = 0,$$

kde $\boldsymbol{n}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$, $\boldsymbol{n}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ je uhol $\varphi = \sphericalangle\, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$, pre ktorý platí

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}. \tag{18}$$

Ak roviny majú rovnice

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

potom

$$\cos \varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{20}$$

Nutná a postačujúca podmienka, aby roviny (19) boli

a) *rovnobežné*, je

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2, \tag{21}$$

b) *kolmé*, je

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \tag{22}$$

9. *Vzdialenosť bodu od roviny.* Pre vzdialenosť bodu $A = (x_1, y_1, z_1)$ od roviny ν s rovnicou (1) platí

$$\varrho(A, \nu) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{23}$$

Ak rovina ν má rovnicu (2) a bod A má polohový vektor $\boldsymbol{r}$, platí

$$\varrho(A, \nu) = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 + d|}{|\boldsymbol{n}|}, \tag{24}$$

kde $\boldsymbol{n} = \{a, b, c\}$ a $\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$.

Pre odchýlku bodu A od roviny ν s rovnicou (1), resp. (2) platí

$$\sigma(A, \nu) = \lambda \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \tag{25}$$

alebo

$$\sigma(A, \nu) = \lambda \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 + d}{|\boldsymbol{n}|}, \tag{26}$$

pričom $\lambda = -1$, ak $d \geqq 0$ a $\lambda = 1$, ak $d \leqq 0$.

Ak rovina ν neprechádza počiatkom súradnicového systému, potom body, pre ktoré odchýlka od danej roviny je kladná, ležia v polpriestore, ktorý neobsahuje počiatok a pre ne platí

$$ax + by + cz + d > 0. \tag{27}$$

Body, pre ktoré odchýlka od danej roviny je záporná, ležia v polpriestore, ktorý obsahuje počiatok, a pre ne platí

$$ax + by + cz + d < 0. \tag{28}$$

10. *Vzájomná poloha dvoch rovín*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

je určená hodnosťami matíc $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \end{pmatrix}$.

Ak platí

a) $h(\boldsymbol{M}) = 2$, roviny sa pretínajú,
b) $h(\boldsymbol{M}) = 1$ a $h(\boldsymbol{N}) = 2$, roviny sú rovnobežné,
c) $h(\boldsymbol{N}) = 1$, roviny splývajú.

11. *Zväzkom rovín* nazývame množinu všetkých navzájom rôznych rovín prechádzajúcich danou priamkou, alebo navzájom rovnobežných rovín. Rovnica zväzku rovín určených rovnicami (29) je

$$\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \tag{30}$$

kde λ_1, λ_2 sú ľubovoľné reálne čísla, pričom aspoň jedno z nich je rôzne od nuly.

12. *Trsom rovín* nazývame množinu všetkých rovín prechádzajúcich daným bodom. Rovnica trsu rovín určeného rovinami

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0,$$

ktoré majú spoločný priesečník, je

$$\begin{aligned} \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) + \\ + \lambda_3(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

kde λ_1, λ_2, λ_3 sú ľubovoľné reálne čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly.

Príklad 1. Nájdime všeobecnú, normálovú a úsekovú rovnicu ako aj parametrické rovnice roviny, ktorá prechádza bodom $A = (4, -2, 3)$ a je kolmá na vektor $\boldsymbol{n} = \{13, 5, 11\}$.

Riešenie. Rovnica roviny danej bodom a vektorom podľa vzťahu (7) je

$$13(x - 4) + 5(y + 2) + 11(z - 3) = 0$$

a po úprave

$$13x + 5y + 11z - 75 = 0,$$

čo je všeobecná rovnica hľadanej roviny.

Ak poslednú rovnicu vynásobíme číslom

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{13^2 + 5^2 + 11^2}} = \frac{1}{3\sqrt{35}},$$

dostaneme normálovú rovnicu roviny.

$$13x/3\sqrt{35} + 5y/3\sqrt{35} + 11z/3\sqrt{35} - 25/\sqrt{35} = 0.$$

Z tejto rovnice vyplýva, že

$$\cos\alpha = 13/3\sqrt{35}, \quad \cos\beta = 5/3\sqrt{35}, \quad \cos\gamma = 11/3\sqrt{35}$$

a vzdialenosť roviny od počiatku pravouhlého súradnicového systému je $25/\sqrt{35}$.

V nájdenej všeobecnej rovnici roviny je absolútny člen rôzny od nuly, teda rovina neprechádza počiatkom. Jej úsekovú rovnicu dostaneme tak, že všeobecnú rovnicu roviny vydelíme číslom $-d = 75$ a upravíme. Máme

$$x/(75/13) + y/15 + z/(75/11) = 1.$$

Z tejto rovnice vidíme, že úseky na súradnicových osiach sú $p = 75/13$, $q = 15$, $r = 75/11$.

Ak položíme vo všeobecnej rovnici $y = u$, $z = v$ a vypočítame z nej x, dostaneme parametrické rovnice roviny:

$$x = 75/13 - 5u/13 - 11v/13,$$
$$y = u,$$
$$z = v,$$

pričom u, v sú ľubovoľné reálne čísla.

Príklad 2. Nájdime rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = (4, 2, 1)$ a

a) je rovnobežná s rovinou $x - 2y + 4z = 0$,
b) je kolmá na rovinu $x - y + 2z - 4 = 0$ a obsahuje bod $B = (5, 4, 2)$.

Riešenie. a) Rovina rovnobežná s danou rovinou má tvar

$$x - 2y + 4z + d = 0.$$

Číslo d určíme z podmienky, že A je bod roviny:

$$4 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + d = 0,$$

z toho $d = -4$.

Rovnica hľadanej roviny je

$$x - 2y + 4z - 4 = 0.$$

b) Rovina, ktorá prechádza bodom A má tvar

$$a(x - 4) + b(y - 2) + c(z - 1) = 0.$$

Z podmienky kolmosti dvoch rovín dostaneme

$$1 \cdot a - 1 \cdot b + 2 \cdot c = 0.$$

Keďže B je bodom roviny, platí

$$a(5 - 4) + b(4 - 2) + c(2 - 1) = 0.$$

Tým dostaneme systém lineárnych rovníc

$$a - b + 2c = 0,$$
$$a + 2b + c = 0.$$

Jeho riešením je $(-5k, k, 3k)$, kde k je ľubovoľné číslo.

Položme $k = -1$, dostaneme $a = 5$, $b = -1$, $c = -3$ a hľadaná rovnica roviny je

$$5(x - 4) - (y - 2) - 3(z - 1) = 0,$$

čiže

$$5x - y - 3z - 15 = 0.$$

Príklad 3. Vypočítajme výšku štvorstena na jeho stenu ABC, ak $V = (1, 5, 5)$, $A = (4, 4, 4)$, $B = (-1, 10, -4)$, $C = (2, -2, 5)$.

Riešenie. Hľadanú výšku v vypočítame ako vzdialenosť bodu V od roviny ν danej troma bodmi A, B, C. Podľa vzťahu (16) rovnica roviny ν je

$$\begin{vmatrix} x - 4, & y - 4, & z - 4 \\ -5, & 6, & -8 \\ -2, & -6, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$2x - y - 2z + 4 = 0.$$

Vzdialenosť bodu V od roviny $2x - y - 2z + 4 = 0$ je podľa (23)

$$v = \varrho(V, \nu) = \frac{|2 \cdot 1 - 5 - 2 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3.$$

Hľadaná výška štvorstena je 3.

Príklad 4. Zo zväzku rovín, určeného rovinami $4x + 2y - 3z - 8 = 0$, $x - 3y + 6z - 2 = 0$ nájdite dve navzájom kolmé roviny, z ktorých jedna prechádza bodom $A = (3, -2, 4)$.

Riešenie. Rovnica zväzku rovín je

$$\lambda_1(4x + 2y - 3z - 8) + \lambda_2(x - 3y + 6z - 2) = 0,$$

čiže

$$(4\lambda_1 + \lambda_2)\,x + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)\,y + (-3\lambda_1 + 6\lambda_2)\,z - (8\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0, \tag{32}$$

kde aspoň jedno z čísiel λ_1, λ_2 je rôzne od nuly.

Najprv určme zo zväzku rovín rovinu, ktorá obsahuje bod A. Pre λ_1, λ_2 dostaneme

$$\lambda_1(12 - 4 - 12 - 8) + \lambda_2(3 + 6 + 24 - 2) = 0,$$

alebo

$$-12\lambda_1 + 31\lambda_2 = 0.$$

Z toho vyplýva

$$\lambda_2 = 12\lambda_1/31.$$

Položme $\lambda_1 = 31$, dostaneme $\lambda_2 = 12$. Po dosadení do rovnice (32) za λ_1 a λ_2 rovnica hľadanej roviny je

$$(4\,.\,31 + 12)\,x + (2\,.\,31 - 3\,.\,12)\,y + (-3\,.\,31 + 6\,.\,12)\,z - (8\,.\,31 + 2\,.\,12) = 0,$$

čiže

$$136x + 26y - 21z - 272 = 0. \tag{33}$$

Nájdime teraz rovinu, ktorá je kolmá na rovinu (33) a patrí do zväzku rovín (32). Z podmienky kolmosti týchto rovín pre λ_1, λ_2 dostaneme

$$136(4\lambda_1 + \lambda_2) + 26(2\lambda_1 - 3\lambda_2) - 21(-3\lambda_1 + 6\lambda_2) = 0,$$

alebo

$$-68\lambda_2 + 659\lambda_1 = 0.$$

Z toho

$$\lambda_2 = 659\lambda_1/68.$$

Položme $\lambda_1 = 68$, potom $\lambda_2 = 659$. Po dosadení λ_1 a λ_2 do rovnice (32) dostaneme

$$(4\,.\,68 + 659)\,x + (2\,.\,68 - 3\,.\,659)\,y + (-3\,.\,68 + 6\,.\,659)\,z -$$
$$- (8\,.\,68 + 2\,.\,659) = 0.$$

Po úprave máme

$$931x - 1841y + 3750z - 1862 = 0.$$

Hľadané roviny majú rovnice

$$136x + 26y - 21z - 272 = 0,$$
$$931x - 1841y + 3750z - 1862 = 0.$$

1017. Zostrojte rovinu, ktorej rovnica je:

a) $4x + 3y + 2z - 12 = 0$; c) $3z - 4 = 0$;
b) $4x + 2y - 8 = 0$; d) $2x - z = 0$.

1018. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi $M = (4, 0, 1)$, $N = (2, 2, 2)$ a je rovnobežná s osou:

a) o_x; b) o_y; c) o_z.

1019. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $C = (4, 3, 1)$ a je rovnobežná s rovinou:

a) R_{xy}; b) R_{yz}; c) R_{xz}.

1020. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $B = (2, -3, 7)$ a osou:

a) o_x; b) o_y; c) o_z.

1021. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A a má normálový vektor $\boldsymbol{n}$, ak

a) $A = (0, 0, 0)$, $\boldsymbol{n} = \{3, 8, -4\}$;
b) $A = (5, -1, 0)$, $\boldsymbol{n} = \{-1, 1, 2\}$.

1022. Nájdite normálové vektory rovín:

a) $3x + y - 5z - 10 = 0$;
b) $2x - y - 6z = 0$;
c) $3x - 7y - 15 = 0$;
d) $3x - 2z = 0$;
e) $z - 3 = 0$;
f) $x = 0$.

1023. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na vektor určený bodmi A, B, ak:

a) $A = (0, 0, 0)$, $B = (5, -3, 0)$;
b) $A = (4, 0, 5)$, $B = (6, 8, 10)$.

1024. Napíšte rovnicu roviny kolmej na vektor $\boldsymbol{n}$, ktorej vzdialenosť od počiatku je p, ak

a) $\boldsymbol{n} = \{4, 5, 7\}$, $p = 7$;
b) $\boldsymbol{n} = \{3/4, 1/2, -\sqrt{3}/4\}$, $p = 10$.

1025. Zistite, ktoré z uvedených rovníc sú normálové rovnice roviny:

a) $x/4 + y/2 + \sqrt{11}z/4 - 2 = 0$;
b) $3x/4 - 6y/7 + 2z/7 + 2 = 0$;
c) $4x/5 - 3z/5 - 3 = 0$;
d) $x + y - 5 = 0$;
e) $y - 2 = 0$;
f) $-12y/13 + 5z/13 - 12 = 0$.

1026. Napíšte normálovú rovnicu roviny $(10\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}) . \boldsymbol{r} + 40 = 0$.

1027. Nájdite smerové uhly kolmice spustenej z počiatku súradnicového systému na rovinu a vzdialenosť počiatku od roviny, ak rovnica roviny je:

a) $\sqrt{2}x + y - z + 8 = 0$;
b) $2x - y - z - 1 = 0$;
c) $x + \sqrt{3}z - 2 = 0$;
d) $2z - 3 = 0$;
e) $2x - 6y + 3z + 12 = 0$;
f) $-x/16 - y/4 + z/8 = 1$.

1028. Nájdite úseky a priesečníky roviny so súradnicovými osami, ak rovnica roviny je:

a) $2x - y + 3z - 6 = 0$;
b) $3x - 7y + 10z - 105 = 0$.

1029. Daná je rovina $3x - 4y + 8z - 24 = 0$. Vypočítajte:

a) obsah trojuholníka, vytvoreného priesečnicou danej roviny s rovinou R_{yz} a osami o_y, o_z;
b) obsah trojuholníka, ktorý vytínajú súradnicové roviny na danej rovine;
c) objem telesa ohraničeného danou rovinou a súradnicovými rovinami.

1030. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = (-3, 1, 1)$ a vytína na súradnicových osiach:

a) úseky $q = 2$, $r = -10$;
b) rovnaké úseky;
c) úseky rovnakej dĺžky;
d) úseky p, q, r, pričom platí $p : q : r = 3 : 1 : 2$.

1031. Nájdite rovinu tak, aby jej priesečnice so súradnicovými rovinami R_{xy}, R_{yz}, R_{xz} vytvorili trojuholník so stranami $2\sqrt{3}$, 4, 4.

1032. Nájdite rovnicu roviny, ktorá vytína na osi o_y úsek $q = 2$ a

a) je kolmá na vektor $\boldsymbol{a} = \{3, -4, -1\}$;
b) je rovnobežná s vektorom $\boldsymbol{b} = \{1, -1, 1\}$ a úsek na osi o_z je $r = 4$;
c) je kolmá na rovinu $2x - y - z - 10 = 0$ a úsek na osi o_x je $p = 3$.

1033. Bodmi $A = (3, -2, 1)$ a $B = (0, 3, 5)$ veďte rovinu tak, aby pre úseky na osiach o_x, o_y platilo $p = q$.

1034. Nájdite úsekovú a normálovú rovnicu ako aj parametrické rovnice roviny:

a) $x - 2y + 2z + 21 = 0$;
b) $3x - 2y + 6z - 14 = 0$;
c) $12x - 7y - 8z + 15 = 0$;
d) $3x + 4y + 5z - 15 = 0$;
e) $12x - 5y + 13 = 0$;
f) $2x - 7 = 0$;
g) $z + 1 = 0$.

1035. Napíšte rovnicu roviny, ktorá je určená troma bodmi:

a) $A = (4, 0, 3)$, $B = (4, 1, 5)$, $C = (1, 2, -3)$;
b) $A = (6, -3, 3)$, $B = (7, -3, 0)$ $C = (5, -2, 3)$;
c) $A = (1, 1, -1)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (4, 4, -3)$;
d) $A = (2, 1, 2)$, $B = (1, -2, 3)$, $C = (0, 0, 0)$.

1036. Zistite, ktoré z dvoch rovín:

a) $2x + 3y - 7z = 0$, $4x + 6y - 14z - 12 = 0$;
b) $x - 3y + z + 10 = 0$, $2x - 7y - 23z + 4 = 0$;
c) $x - 2z + 10 = 0$, $2x - 4z + 11 = 0$;
d) $y + 3z - 7 = 0$, $3y - z + 5 = 0$.

sú kolmé a ktoré sú rovnobežné.

1037. Pre aké čísla k, l sú nasledujúce roviny:
1. kolmé, 2. rovnobežné, ak ich rovnice sú

a) $2x + 7y + kz - 10 = 0$, $lx - 14y + 5z - 2 = 0$;
b) $x + ky + 2z - 1 = 0$, $3x + y + lz - 12 = 0$;
c) $kx - 3y + 2z - 2 = 0$, $2x + ly - z + 3 = 0$.

1038. Nájdite uhol rovín:

a) $x + 3y - z + 8 = 0$, $2x - 5y - 13z + 10 = 0$;
b) $2x + 2y + z - 11 = 0$, $15x - 16y + 12z - 3 = 0$;
c) $\sqrt{2}x + y - z - 10 = 0$, $\sqrt{2}x - y - z = 0$;
d) $2x - 2z - 7 = 0$, $y + z + 1 = 0$.

1039. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s rovinou $3x - 2y + 3z - 10 = 0$ a prechádza

a) počiatkom O;
b) bodom $A = (-2, -8, 1)$.

1040. Dané sú rovnice troch stien rovnobežnostena $x - 3y + 4z - 12 = 0$, $y + 2z - 5 = 0$, $x + 4 = 0$ a jeden jeho vrchol $A = (4, -3, 2)$.
Nájdite rovnice ostatných troch stien rovnobežnostena.

1041. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $B = (7, 1, 2)$ a je

a) kolmá na roviny $y = 0$, $3x + 2z + 6 = 0$;
b) kolmá na roviny $2x - 5y + z - 1 = 0$, $3x + 10y - 2z - 12 = 0$.

1042. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi $A = (3, 1, 2)$ a $B = (4, 7, -11)$ a je rovnobežná s vektorom $\boldsymbol{a} = \{3, -1, -4\}$.

1043. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi M, N a je kolmá na danú rovinu, ak

a) $M = (3, 0, 2)$, $N = (4, 1, 5)$, $2x + 4y + 6z - 7 = 0$;
b) $M = (2, 2, 3)$, $N = (1, 0, 2)$, $x - 8y + z - 10 = 0$;
c) $M = (3, 1, 3)$, $N = (2, 0, 2)$, $x + y - z - 1 = 0$.

1044. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = (2, 1, -2)$ a je rovnobežná s vektormi $\boldsymbol{a} = \{3, 2, 4\}$, $\boldsymbol{b} = \{3, 5, 2\}$.

1045. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $M = (3, 2, -2)$ kolmo na rovinu $5x - 2y + 5z - 11 = 0$ a zviera s rovinou $x - 4y - 8z + 1 = 0$ uhol $\alpha = \pi/4$.

1046. Nájdite odchýlku a vzdialenosť bodu M od danej roviny, ak

a) $M = (1, 4, 3)$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$;
b) $M = (3, -1, 2)$, $12x + 15y + 16z - 153 = 0$;
c) $M = (1, 0, 8)$, $5x + 2y + 3z - 10 = 0$;
d) $M = (4, 1, 1)$, $4y + 3z - 2 = 0$;
e) $M = (3, 0, 2)$, $x + y - z + 2 = 0$.

1047. Zistite, či body $M = (3, 3, -1)$ a $N = (4, -5, 8)$ ležia v tom istom polpriestore vzhľadom na rovinu:

a) $3x - y + 7z + 11 = 0$;
b) $10x + 8y + z + 1 = 0$;
c) $2x - 8y - z + 12 = 0$;
d) $3x + 5y + 19z - 6 = 0$;
e) $x + y + 5z + 1 = 0$.

1048. Zistite, či rovina $8x - 5y - 4z + 10 = 0$ pretína úsečku MN, ak

a) $M = (1, 0, 3)$, $N = (-1, 5, 2)$; b) $M = (3, 1, -1)$, $N = (1, 2, 1)$.

1049. Napíšte rovnicu roviny, ktorá vytína na súradnicových osiach úseky úmerné číslam 2, 6, 3 a jej vzdialenosť od bodu $A = (2, -4, 0)$ sa rovná 2.

1050. Nájdite vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín:

a) $4x - 2y - 2z - 3 = 0$, $2x - y - z - 1 = 0$;
b) $3x - 2y + 6z - 10 = 0$, $3x - 2y + 6z + 4 = 0$;
c) $12x - 16y + 15z - 100 = 0$, $12x - 16y + 15z + 25 = 0$.

1051. Vypočítajte objem kocky, ktorej dve steny ležia na rovinách:

a) $2x + 3y - 10z - 8 = 0$, $2x + 3y - 10z + 4 = 0$;
b) $3x - 11y + 10z + 1 = 0$, $3x - 11y + 10z - 22 = 0$.

1052. Daná je rovina ν rovnicou $6x - 2y + 3z - 14 = 0$. Nájdite bod A, ktorý leží:

a) na osi o_y a $\varrho(A, \nu) = 4$;
b) na osi o_x a $\varrho(A, \nu) = \varrho(A, B)$, kde $B = (4, 2, \sqrt{3})$;
c) na osi o_z a $\varrho(A, \nu) = \varrho(A, \mu)$, kde rovina μ má rovnicu $2x - 2y - z - 8 = 0$.

1053. Daná je rovina ν rovnicou $16x - 12y + 15z - 50 = 0$. Nájdite množinu všetkých bodov A, pre ktoré platí:

a) $\varrho(A, \nu) = 3$; b) $\delta(A, \nu) = -5$.

1054. Nájdite množinu všetkých bodov rovnako vzdialených od rovín:

a) $x + 3y - 2z + 7 = 0$, $x + 3y - 2z - 5 = 0$;
b) $2x - 7y + 9z - 12 = 0$, $2x - 7y + 9z + 8 = 0$;
c) $x - 5y + 4z + 5 = 0$, $2x - 10y + 8z + 3 = 0$;
d) $4x + 5y - 3z - 1 = 0$, $8x + 10y - 6z - 4 = 0$.

1055. Nájdite rovinu rovnobežnú s dvoma danými rovnobežnými rovinami $3x + 2y - 2z - 3 = 0$, $6x + 4y - 4z + 1 = 0$, ktorá delí vzdialenosť medzi nimi v pomere 2 : 3.

1056. Nájdite rovinu súmernosti dvoch pretínajúcich sa rovín:

a) $2x + 5y - 5z + 16 = 0$, $2x - 7y - z + 8 = 0$;

b) $2x - 3y + 8z + 10 = 0$, $6x - 4y + 5z - 9 = 0$;

c) $4x + y - 3z - 9 = 0$, $x + 3y + 4z - 3 = 0$.

1057. Zistite, ktoré z uvedených rovín sa pretínajú, sú rovnobežné alebo splývajú:

a) $4x + y - 3z - 9 = 0$, $x + 3y + 2z - 3 = 0$;

b) $2x + 4y - z + 2 = 0$, $4x + 8y + 3z - 2 = 0$;

c) $4x + 2y + 3z - 8 = 0$, $2x + y + 3z/2 - 6 = 0$;

d) $2x - 2y + 3z - 1 = 0$, $6x - 6y + 9z - 3 = 0$.

1058. Ktoré z troch rovín prechádzajú: 1. jedným bodom; 2. jednou priamkou; 3. pretínajú sa v troch rovnobežkách:

a) $3x + y + z - 12 = 0$, $2x + 3y + z - 11 = 0$, $x - 2y + z - 3 = 0$;

b) $x + 2y + 3z - 10 = 0$, $2x - y - z + 5 = 0$, $x + 7y + 10z - 35 = 0$;

c) $x + y + z - 6 = 0$, $2x + y + 3z - 18 = 0$, $3x + 2y + 4z - 12 = 0$;

d) $2x + y - z - 2 = 0$, $x - 2y - z + 1 = 0$, $x + y + z - 7 = 0$;

e) $2x + 2y - 3z - 9 = 0$, $5x - y + 8z - 7 = 0$, $x + 3y + 2z - 1 = 0$.

1059. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priesečníkom rovín $x + 2y + z - 5 = 0$, $2x + 3y + z - 1 = 0$, $2x + y + 3z - 11 = 0$, počiatkom súradnicového systému a bodom $M = (7, 1, 2)$.

1060. Nájdite rovnicu roviny rovnobežnej s rovinou $x + y + 2z - 2 = 0$, ktorá prechádza priesečníkom rovín $x + 2y - z = 0$, $x + y + z - 4 = 0$, $x - 3y + z - 4 = 0$, bez výpočtu priesečníka.

1061. Nájdite číslo a tak, aby sa roviny $x - 3y + z - 2 = 0$, $x - y - z = 0$, $x - 4y + 2z + a = 0$ pretínali v priamke.

1062. Zo zväzku rovín určeného rovinami $3x + y - z - 4 = 0$, $x - 2y + 4z - 2 = 0$ nájdite dve navzájom kolmé roviny, z ktorých jedna prechádza bodom $A = (2, -3, 4)$.

1063. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priesečnicou rovín $4x + y + z - 2 = 0$, $x + 3z - 4 = 0$ a vytína na súradnicových osiach o_x a o_y rovnaké úseky.

4,17. Priamka v priestore

1. *Priamka určená bodom a vektorom.* Majme v priestore bod A a nenulový vektor $\boldsymbol{a}$. *Vektorová rovnica* priamky *(parametrický tvar)* určenej bodom A a vektorom $\boldsymbol{a}$ je

$$X = A + \boldsymbol{a}t, \tag{1}$$

kde t je ľubovoľné číslo, ktoré nazývame *parametrom*. Vektor $\boldsymbol{a}$ nazývame *smerovým vektorom* priamky.

Vylúčením parametra t dostaneme z rovnice (1) *vektorovú rovnicu* priamky *(kánonický tvar)* určenej bodom A a vektorom $\boldsymbol{a}$

$$(X - A) \times \boldsymbol{a} = 0. \tag{1a}$$

Ak v pravouhlom súradnicovom systéme v priestore je $X = (x, y, z)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ a $\boldsymbol{a} = \{a, b, c\}$, parametrické rovnice priamky určenej bodom A a vektorom $\boldsymbol{a}$ sú

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + at \\ y &= y_1 + bt \\ z &= z_1 + ct, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kde t je ľubovoľné číslo.

Čísla a, b, c nazývame *smerovými číslami* priamky.

Vylúčením parametra t z rovníc (2) dostávame kánonické rovnice priamky určenej bodom A a smerovými číslami a, b, c

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \tag{3}$$

2. *Priamka určená dvoma bodmi.* Majme dva rôzne body v priestore $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$. Vektorová rovnica priamky určenej bodmi A, B je

$$X = A + (B - A)\, t, \tag{4}$$

kde t je ľubovoľné číslo.

Parametrické rovnice tejto priamky sú

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\, t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\, t \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)\, t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

kde t je ľubovoľné číslo.

Kánonické rovnice priamky určenej bodmi A, B sú

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{6}$$

3. *Priamka ako priesečnica dvoch rovín.* Majme dve roviny μ, ν, ktoré majú všeobecné rovnice

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

pričom hodnosť matice $h\begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{pmatrix} = 2$. Potom rovnice (7) nazývame *všeobecnými rovnicami* priamky, ktorá je priesečnicou rovín μ a ν. Smerový vektor tejto priamky je

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1, & a_1 \\ c_2, & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} \right\}, \tag{8}$$

kde $\boldsymbol{n}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$, $\boldsymbol{n}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ sú normálové vektory rovín μ a ν.

Ak trojica (x_0, y_0, z_0) je jedno riešenie systému rovníc (7), potom kánonické rovnice priamky určenej rovinami μ a ν sú

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} c_1, & a_1 \\ c_2, & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}\ ^{*)}. \tag{9}$$

4. *Uhol dvoch priamok.* Ak priamky p_1, p_2 majú smerové vektory $\boldsymbol{a}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$, potom pre uhol φ priamok p_1, p_2 platí

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{10}$$

Nutná a postačujúca podmienka *kolmosti* priamok p_1, p_2 je

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0\,. \tag{11}$$

Nutná a postačujúca podmienka *rovnobežnosti* priamok p_1, p_2 je

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2. \tag{12}$$

Príklad 1. Napíšme kánonické, parametrické rovnice priamky a vektorovú rovnicu priamky, ktorej všeobecné rovnice sú

$$\left.\begin{aligned} x + 4y + 4z - 7 &= 0 \\ 4x + 4y + 5z - 11 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

---

*) V kánonických rovniciach priamky (3), (6), (9) predpokladáme, že každý z menovateľov je rôzny od nuly. Ak niektorý z nich sa rovná nule, namiesto rovníc (3), (6), (9) používame rovnice

$$(x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1) = a : b : c$$

$$(x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1) = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$$

$$(x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0) = \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1, & a_1 \\ c_2, & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

Riešenie. Aby sme mohli napísať požadované rovnice priamky, musíme nájsť jeden bod danej priamky A a jej smerový vektor $\boldsymbol{a}$.

Súradnice bodu A nájdeme ako jedno z riešení systému (13). Vylúčením jednej neznámej, napr. y dostaneme

$$\left.\begin{aligned} x + 4y + 4z - 7 &= 0 \\ 3x \qquad + z - 4 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Jednu zo zvyšných neznámych v druhej rovnici, zvolíme ľubovoľne, napr. $x = 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned} 4y + 4z - 7 &= 0 \\ z - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Z toho $z = 4$, $y = -9/4$. Jedno riešenie systému (13) je trojica $(0, -9/4, 4)$ a hľadaný bod je $A = (0, -9/4, 4)$.

Podľa (8) smerový vektor priamky je

$$\boldsymbol{a} = \left\{ \begin{vmatrix} 4, & 4 \\ 4, & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4, & 1 \\ 5, & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1, & 4 \\ 4, & 4 \end{vmatrix} \right\} = \{4, 11, -12\}.$$

Podľa (3) kánonické rovnice priamky sú

$$\frac{x - 0}{4} = \frac{y + 9/4}{11} = \frac{z - 4}{-12}.$$

Parametrické rovnice priamky podľa (2) sú

$$\begin{aligned} x &= 0 + 4t \\ y &= -9/4 + 11t \\ z &= 4 - 12t, \end{aligned}$$

kde t je ľubovoľné číslo.

Vektorová rovnica priamky podľa (1) je

$$X = (0, -9/4, 4) + \{4, 11, -12\}\, t.$$

Poznámka 1. Hľadané rovnice priamky môžeme nájsť aj tak, že nájdeme namiesto smerového vektora $\boldsymbol{a}$ další bod B priamky. Zvoľme opäť jednu neznámu z druhej rovnice (14), napr. $z = -8$. Dostaneme

$$\begin{aligned} x + 4y - 39 &= 0 \\ 3x \qquad - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Z toho $x = 4$, $y = 35/4$. Jedno riešenie systému (13) je trojica $(4, 11, -12)$, a teda $B = (4, 11, -12)$. Podľa (6) kánonické rovnice priamky sú

$$\frac{x - 0}{4} = \frac{y + 9/4}{11} = \frac{z - 4}{-12}.$$

Parametrické rovnice priamky podľa (5) sú

$$\begin{aligned} x &= 0 + 4t \\ y &= -9/4 + 11t \\ z &= 4 - 12t. \end{aligned}$$

Vektorová rovnica priamky podľa (4) je

$$X = (0, -9/4, 4) + \{4, 11, -12\}\, t.$$

Poznámka 2. Parametrické rovnice danej priamky môžeme napísať aj tak, že nájdeme všeobecné riešenie systému (13). Vylúčením neznámej y dostaneme

$$\begin{aligned} x + 4y + 4z - 7 &= 0 \\ 3x \qquad + \ z - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Ak zvolíme za voľnú neznámu x, máme

$$\begin{aligned} y + z &= 7/4 - x/4 \\ z &= 4 - 3x. \end{aligned}$$

Ak položíme $x = 4t$, všeobecné riešenie systému (13) je $(4t, -9/4 + 11t, 4 - 12t)$ a parametrické rovnice priamky sú

$$x = 4t, \quad y = -9/4 + 11t, \quad z = 4 - t,$$

kde t je ľubovoľné číslo.

Príklad 2. Napíšme rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = (-6, 3, 4)$ a je rovnobežná s priamkou

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z + 7 &= 0 \\ 4x + 5y - z - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Podľa (8) smerový vektor danej priamky je

$$\boldsymbol{a} = \left\{ \begin{vmatrix} -2, & -3 \\ 5, & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3, & 1 \\ -1, & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1, & -2 \\ 4, & 5 \end{vmatrix} \right\} = \{17, -11, 13\}.$$

Keďže hľadaná priamka je rovnobežná s danou, pre jej smerové čísla a, b, c musí podľa vzťahu (12) platiť

$$a : b : c = 17 : -11 : 13.$$

Z toho vyplýva, že za jej smerový vektor môžeme zvoliť vektor $\{17, -11, 13\}$. Podľa (3) rovnica priamky, ktorá prechádza bodom $A = (-6, 3, 4)$ a má smerový vektor $\{17, -11, 13\}$, je

$$\frac{x + 6}{17} = \frac{y - 3}{-11} = \frac{z - 4}{13}.$$

Príklad 3. Nájdite rovnicu kolmice z bodu $A = (4, 1, 2)$ na priamku

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z}{1}.$$

Riešenie. Kolmica je určená bodom A a jej priesečníkom N s danou priamkou. Parametrické rovnice danej priamky sú

$$x = 1 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = t, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Ak parameter bodu N je t_0, potom $N = (1 + t_0, -1 + 2t_0, t_0)$. Rovnice hľadanej priamky podľa (6) sú

$$\frac{x - 4}{1 + t_0 - 4} = \frac{y - 1}{-1 + 2t_0 - 1} = \frac{z - 2}{t_0 - 2},$$

čiže

$$\frac{x - 4}{t_0 - 3} = \frac{y - 1}{2t_0 - 2} = \frac{z - 2}{t_0 - 2}.$$

Z podmienky kolmosti (11) oboch priamok vyplýva

$$\begin{aligned} 1(t_0 - 3) + 2(2t_0 - 2) + 1(t_0 - 2) &= 0, \\ 6t_0 - 9 &= 0, \\ t_0 &= 3/2. \end{aligned}$$

Priesečník je $N = (5/2, 2, 3/2)$ a rovnica kolmice je

$$\frac{x-4}{3/2-4} = \frac{y-1}{3-2} = \frac{z-2}{3/2-2},$$

čiže

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

Príklad 4. Nájdime rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = (-1, -7, 4)$ a pretína priamky

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{-1}, \qquad \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{-5}.$$

Riešenie. Nech M, N sú priesečníky hľadanej priamky s danými priamkami, pričom m, n sú ich parametre. Z parametrických rovníc oboch priamok

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t, & x &= 5 + 2t,\\ y &= -5 - 2t, & y &= -3 + 3t,\\ z &= 3 - t, & z &= 2 - 5t \end{aligned}$$

vyplýva, že $M = (2 + 3m, -5 - 2m, 3 - m)$, $N = (5 + 2n, -3 + 3n, 2 - 5n)$. Podľa (6) pre hľadanú priamku, ktorá je určená bodmi A, M, platí

$$\frac{x+1}{2+3m+1} = \frac{y+7}{-5-2m+7} = \frac{z-4}{3-m-4}.$$

Pretože bod N je tiež bodom priamky, platí

$$\frac{5+2n+1}{3+3m} = \frac{-3+3n+7}{2-2m} = \frac{2-5n-4}{-1-m}.$$

Z toho dostaneme

$$(6 + 2n) : (4 + 3n) : (-2 - 5n) = (3m + 3) : (2 - 2m) : (-m - 1),$$

alebo

$$\left.\begin{aligned} 13mn + 24m + 5n &= 0\\ 13mn + 8m - 7n &= 0\\ 13mn + 13n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Z poslednej rovnice tohto systému vyplýva

$$n(m + 1) = 0,$$

Z toho

$$n_1 = 0, \qquad m_2 = -1.$$

Pre $n_1 = 0$ z prvých dvoch rovníc systému dostaneme $m_1 = 0$. Pre $m_2 = -1$ z prvých dvoch rovníc systému vyplýva

$$\begin{aligned} -13n - 24 + 5n &= 0\\ -13n - 8 - 7n &= 0 \end{aligned}$$

a ďalej

$$\begin{aligned} -8n &= 24\\ -20n &= 8, \end{aligned}$$

čiže pre $m_2 = -1$ systém nemá riešenie. Jediné riešenie systému (15) je dvojica $(0, 0)$. Hľadaná rovnica priamky je

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

1064. Napíšte parametrické a kánonické rovnice priamok daných:
a) bodom $A = (-1, 3, 4)$ a vektorom $\boldsymbol{a} = \{-2, 3, 1\}$;
b) bodom $A = (2, 3, 4)$ a smerovými uhlami vektora $\boldsymbol{a}$, $\alpha = \pi/3$, $\beta = 2\pi/3$, $\gamma = \pi/4$.

1065. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $P = (3, 1, 2)$ a je kolmá na rovinu $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

1066. Nájdite kánonické a parametrické rovnice priamky, ktorá prechádza bodom $M = (4, -5, 7)$ rovnobežne s:
a) vektorom $\boldsymbol{a} = \{2, 7, 9\}$;
b) priamkou $x = 3 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3$;
c) priamkou $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{-11}$;
d) priamkou $x + 3y + 10z - 2 = 0$, $2x - y + z - 4 = 0$;
e) osou o_x;
f) osou o_y;
g) osou o_z.

1067. Napíšte kánonické a parametrické rovnice priamky, ktorá prechádza bodmi M, N, ak
a) $M = (0, 0, -2)$, $N = (2, 3, -4)$;
b) $M = (2, 1, -3)$, $N = (0, 2, -6)$;
c) $M = (6, 1, -1)$, $N = (4, 1, 1)$.

1068. Trojuholník má vrcholy $A = (5, 7, 2)$, $B = (-7, -11, 6)$, $C = (-5, 3, 2)$. Nájdite rovnice:
a) strán; b) ťažníc; c) výšok.

1069. Trojuholník má vrcholy $A = (2, 1, -4)$, $B = (0, 4, -10)$, $C = (-6, 16, -6)$. Nájdite rovnicu osi vnútorného uhla trojuholníka pri vrchole B.

1070. Nájdite kánonické a parametrické rovnice priamok, ak ich všeobecné rovnice sú:
a) $x = 1$, $y = -2$;
b) $x = -3$; $z = 4$;
c) $y = 4$, $x + z - 2 = 0$;
d) $x = 7$, $3x - 2y - z - 12 = 0$;
e) $x + y - 1 = 0$, $x + 2y + 2 = 0$.

1071. Nájdite kánonické a parametrické rovnice priamok, ak ich všeobecné rovnice sú:
a) $3x + y - 2z - 11 = 0$
$x + 2y - 2z - 9 = 0$;
b) $x + 2y - z + 1 = 0$
$x - y - 2z + 6 = 0$;
c) $4x - 2y - z + 8 = 0$
$3x + y - 2z + 1 = 0$;
d) $x - 3y + 4z - 5 = 0$
$4x + 3y - 6z - 5 = 0$.

1072. Nájdite rovnice priamok, v ktorých rovina $3x - 12y + 8z - 10 = 0$ pretína súradnicové roviny.

1073. Nájdite rovnice priamky, ktorá je priesečnicou roviny $2x + 5y - z + 12 = 0$ s rovinou prechádzajúcou osou o_z a bodom $M = (5, -3, 10)$.

1074. Napíšte rovnice priamky, ktorá prechádza bodom $A = (1, 2, 1)$ a je rovnobežná s rovinami $x - 2y - 1 = 0$, $x - 2 = 0$.

1075. Nájdite smerové kosínusy priamky
$$\begin{aligned} 3x - 6y - 2z + 2 &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

1076. Nájdite uhol priamok:
a) $(x + 2) : y : (z - 3) = 3 : 0 : -1$, $(x + 1) : y : (z + 3) = 2 : 0 : 1$;
b) $x = -3 + t$, $y = -3 + 2t$, $z = 4 - 2t$,
$9x + 2y + 2z - 11 = 0$
$6x - y + 6z + 8 = 0$;

c) $2x + 2y + z - 7 = 0$, $x - 2y + 2z + 75 = 0$, $9x - 2y + z - 16 = 0$, $3x - y - z + 3 = 0$;
d) $x - y - 2z - 1 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$, $2x - y - z - 1 = 0$, $2x + y + z - 1 = 0$;
e) $4x - 3y - z = 0$, $4x + 2y - 6z - 3 = 0$, $3x + 2y - z - 2 = 0$, $y - 2z - 1 = 0$.

1077. Zistite, ktoré z nasledujúcich rovníc priamok sú rovnice rovnobežných, rôznobežných, mimobežných priamok alebo tej istej priamky:

a) $2x + y - z = 0$, $x - 3y + 2z - 14 = 0$, $x + 5y - 6z + 34 = 0$, $6x - 2y - z - 9 = 0$;
b) $3x + y - 2z + 8 = 0$, $5x - y - 2z + 11 = 0$, $x + y - z - 4 = 0$, $3x - y - z - 12 = 0$;
c) $x = -1 + t$, $y = 18 + 9t$, $z = 10 + 5t$, $x + y - 2z + 3 = 0$, $3x - 2y + 3z + 9 = 0$;
d) $x = 4$, $y = 5 + t$, $z = 1 + 2t$, $x - y + z - 4 = 0$, $x + y - 3z = 0$.

1078. Nájdite podmienky, ktoré musia spĺňať koeficienty a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 v rovniciach priamky

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

aby priamka:

a) bola rovnobežná s osou o_x;
b) pretínala os o_y;
c) bola totožná s osou o_z;
d) bola rovnobežná s rovinou R_{yz};
e) ležala v rovine R_{xz};
f) prechádzala počiatkom súradnicového systému.

1079. Aké musí byť číslo d, aby priamka

$$x + 3y + 2z + 6 = 0$$
$$3x - y + z + d = 0,$$

pretínala os:

a) o_x; b) o_y; c) o_z.

1080. Nájdite číslo a tak, aby sa priamky

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{3-y}{3} = \frac{3-z}{2}, \qquad \frac{x+2}{-3} = \frac{-y}{3} = \frac{z-4}{a}$$

pretínali.

1081. Napíšte rovnicu priamky prechádzajúcej bodom $M = (3, -4, 5)$ a kolmej na priamky

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{1}, \qquad \frac{x+3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{3}.$$

1082. Nájdite rovnicu kolmice na priamky

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1} \quad \text{a} \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{1}.$$

1083. Napíšte kánonické rovnice priamky, ktorá leží v rovine R_{xz}, prechádza počiatkom a je kolmá na priamku

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{1}.$$

1084. Nájdite rovnice priamky, ktorá prechádza bodom $A = (1, 15, 8)$, pričom
a) je kolmá na priamku $x = 4 + 4t$, $y = 2 + 4t$, $z = 3 + 9t$ a pretína priamku

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2};$$

b) pretína dve priamky

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}, \qquad \frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-8}{-3}.$$

1085. Nájdite os dvoch mimobežiek

$$\frac{x-13}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{-2}, \qquad \frac{x+15}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{-2}.$$

4,18. Priamka a rovina

1. *Priesečník priamky s rovinou.* Nutná a postačujúca podmienka, aby priamka

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt \\ y &= y_0 + nt \\ z &= z_0 + pt \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

pretínala rovinu

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{2}$$

je

$$am + bn + cp \neq 0. \tag{3}$$

Ak priamka (1) pretína rovinu (2), potom pre parameter t_0 priesečníka platí rovnica, ktorú dostaneme dosadením za neznáme x, y, z z rovníc priamky (1) do rovnice roviny (2). Ak priamka je daná všeobecnými rovnicami a pretína danú rovinu (2), potom jej priesečník s rovinou dostaneme ako priesečník troch rovín.

2. *Uhol priamky s rovinou.* Pre uhol φ priamky (1) so smerovým vektorom $\boldsymbol{a} = \{m, n, p\}$ a roviny (2) s normálovým vektorom $\boldsymbol{n} = \{a, b, c\}$ platí

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{n}|} = \frac{|am + bn + cp|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{4}$$

Nutnou a postačujúcou podmienkou, aby priamka (1) a rovina (2) boli:

a) *rovnobežné*, je

$$am + bn + cp = 0, \tag{5}$$

b) *kolmé*, je

$$a : b : c = m : n : p. \tag{6}$$

Rovina určená *bodom* $A = (x_1, y_1, z_1)$ a *priamkou* (1), ktorá neobsahuje bod A, má rovnicu

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1, & z - z_1 \\ x_0 - x_1, & y_0 - y_1, & z_0 - z_1 \\ m, & n, & p \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

4. *Rovnica roviny určenej dvoma rovnobežkami*

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}, \qquad \frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{p}$$

je

$$\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ m, & n, & p \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

5. *Rovnica roviny určenej dvoma rôznobežkami*

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_1}{m_2} = \frac{y-y_1}{n_2} = \frac{z-z_1}{p_2}$$

je

$$\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ m_1, & n_1, & p_1 \\ m_2, & n_2, & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

6. Nutnou a postačujúcou podmienkou, aby priamka (1) ležala v rovine (2) je

$$\left.\begin{aligned} am + bn + cp &= 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Príklad 1. Nájdime kolmý priemet bodu $A = (8, 2, 1)$ na rovinu

$$3x - 4y + z + 9 = 0. \tag{11}$$

Riešenie. Kolmý priemet bodu A na rovinu nájdeme ako priesečník danej roviny a kolmice z bodu A na túto rovinu. Smerový vektor kolmice je $\boldsymbol{a} = \{3, -4, 1\}$ a parametrické rovnice kolmice sú

$$x = 8 + 3t, \qquad y = 2 - 4t, \qquad z = 1 + t. \tag{12}$$

Hľadajme priesečník s danou rovinou riešením rovníc (12) a (11). Po dosadení x, y, z z (12) do (11) máme

$$\begin{aligned} 3(8 + 3t) - 4(2 - 4t) + (1 + t) + 9 &= 0, \\ 24 + 9t - 8 + 16t + 1 + t + 9 &= 0, \\ 26t &= -26, \\ t &= -1. \end{aligned}$$

Parameter priesečníka je $t = -1$. Kolmý priemet bodu A je $P = (5, 6, 0)$.

Príklad 2. Nájdime rovnice kolmice z bodu $P = (2, 3, 2)$ na priamku

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Riešenie. Úlohu rozriešime dvoma spôsobmi:

a) Hľadaná kolmica prechádza bodom $P = (2, 3, 2)$, preto má rovnicu

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z-2}{p},$$

kde m, n, p sú smerové čísla kolmice. Z podmienky kolmosti priamok vyplýva

$$-1m + 2n + 3p = 0. \tag{13}$$

Bod P leží v rovine určenej oboma rôznobežkami, preto podľa (9) platí

$$\begin{vmatrix} 2+1, & 3+0, & 2-3 \\ -1, & 2, & 3 \\ m, & n, & p \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$11m - 8n + 9p = 0. \tag{14}$$

Smerové čísla m, n, p dostaneme riešením systému rovníc (13) a (14). Dostaneme $m = -3k$, $n = -3k$, $p = k$, kde k je ľubovoľné číslo. Ak zvolíme napr. $k = 1$, máme $m = -3$, $n = -3$, $p = 1$. Rovnice hľadanej kolmice sú

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{1}.$$

b) Nájdeme najprv rovinu kolmú na danú priamku, ktorá prechádza bodom P. Normálový vektor tejto roviny sa rovná smerovému vektoru danej priamky $n = \{-1, 2, 3\}$. Rovnica tejto roviny je

$$-1(x-2) + 2(y-3) + 3(z-2) = 0,$$

čiže

$$x - 2y - 3z + 10 = 0.$$

Priesečník tejto roviny s danou priamkou je päta N kolmice z bodu P na danú priamku, ktorej parametrické rovnice sú

$$x = -1 - t, \qquad y = 2t, \qquad z = 3 + t.$$

Po dosadení do rovnice roviny dostaneme pre parameter t_0 priesečníka

$$-1 - t_0 - 2(2t_0) - 3(3 + t_0) + 10 = 0,$$

čiže

$$8\,t_0 = 0,$$
$$t_0 = 0.$$

Päta kolmice je $N = (-1, 0, 3)$. Rovnice hľadanej kolmice určenej bodmi A, N sú

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{1}.$$

Príklad 8. Vrcholy štvorstena sú $A = (2, -1, 1)$, $B = (4, 1, -9)$, $C = (3, -2, 4)$ a $D = (14, 11, -5)$. Nájdime uhol hrany AD so stenou ABC.

Riešenie. Hľadaný uhol φ je uhol priamky určenej bodmi A, D a roviny ν určenej bodmi A, B, C.

Rovnica roviny ν je

$$\begin{vmatrix} x-2, & y+1, & z-1 \\ 4-2, & 1+1, & -9-1 \\ 3-2, & -2+1, & 4-1 \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$x + 4y + z + 1 = 0.$$

Rovnica priamky určenej bodmi A, D je

$$\frac{x-2}{14-2} = \frac{y+1}{11+1} = \frac{z-1}{-5-1},$$

čiže

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Pre uhol φ podľa (4) platí

$$\sin\varphi = \frac{|1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Uhol hrany AD so stenou ABC je 45°.

Príklad 4. Kváder má vrcholy $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 0, 0)$, $C = (3, 4, 0)$, $D = (0, 4, 0)$, $E = (0, 0, 12)$, $F = (3, 0, 12)$, $G = (3, 4, 12)$, $H = (0, 4, 12)$. Nájdime najkratšiu vzdialenosť uhlopriečok CE a BD.

Riešenie. Najkratšiu vzdialenosť oboch uhlopriečok nájdeme ako najkratšiu vzdialenosť priamok CE a BD o rovniciach

$$\frac{x - 0}{3} = \frac{y - 0}{4} = \frac{z - 12}{-12}$$

a

$$(x - 3) : y : z = -3 : 4 : 0.$$

Najkratšiu vzdialenosť týchto priamok vypočítame ako vzdialenosť priamky CE od roviny rovnobežnej s priamkou CE, ktorá prechádza priamkou BD. Táto rovina je teda rovnobežná so smerovými vektormi oboch priamok $\{3, 4, -12\}$, $\{-3, 4, 0\}$ a prechádza bodom B. Rovnica tejto roviny je

$$\begin{vmatrix} x - 3, & y - 0, & z - 0 \\ 3, & 4, & -12 \\ -3, & 4, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$4x + 3y + 2z - 12 = 0.$$

Hľadanú vzdialenosť nájdeme tak, že zvolíme ľubovoľný bod na priamke CE a vypočítame jeho vzdialenosť od nájdenej roviny. Zvoľme za bod priamky CE bod E. Potom je

$$\varrho(F, \nu) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 12 - 12|}{\sqrt{16 + 9 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{29}}.$$

Najkratšia vzdialenosť dvoch uhlopriečok je $12/\sqrt{29}$.

1086. Nájdite priesečníky priamky p so súradnicovými rovinami, ak rovnice priamky sú:

a) $3x + 2y + z - 10 = 0$
$\quad x + 5y + 2z - 6 = 0$;

b) $x = 3 - 2t$
$\quad y = 11 - 7t$
$\quad z = -3 + t$.

1087. Nájdite priesečník priamky

$$\frac{x + 2}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z + 2}{2}$$

s rovinou $x + y - z + 2 = 0$.

1088. Nájdite rovnicu priamky, ktorá je kolmá na rovinu $3x - 2y + 5z - 12 = 0$ a prechádza priesečníkom tejto roviny s osou o_x.

1089. Nájdite kolmý priemet bodu A na rovinu, ak:

a) $A = (1, -2, 1)$ a rovnica roviny je $3x + 2y - 4z - 5 = 0$;
b) $A = (0, 3, 2)$ a rovnica roviny je $x + y + 3z + 2 = 0$.

1090. V nasledujúcich úlohách zistite, či daná priamka leží v danej rovine alebo je s ňou rovnobežná alebo ju pretína. V poslednom prípade nájdite aj priesečník:

a) $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-4}$, $\quad 6x - 4y + 3z - 12 = 0$;

b) $3x - y + 4z - 10 = 0$, $x + 2y - 5z + 7 = 0$, $\quad 2x - 17y + 47z - 79 = 0$;

c) $x = 3 + 2t$, $y = -2 - 2t$, $z = 1 - 3t$, $\quad 2x - y - 2z - 6 = 0$;

d) $3x - y + z - 1 = 0$, $x + y + z - 7 = 0$, $\quad 2x + y - 4z + 2 = 0$;

e) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{1}$, $\quad 2x + y - 10z + 2 = 0$.

1091. Nájdite bod Q súmerný k bodu P vzhľadom na rovinu ν, ak pre bod P a rovinu ν platí:

a) $P = (5, 2, -6)$, $\quad x - y - 4z - 9 = 0$;

b) $P = (1, 3, -4)$, a rovina je určená bodmi $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 0, 3)$, $C = (3, -1, 4)$;

c) $P = (5, -3, 2)$ a rovina prechádza priamkami

$4x - y + 2z - 3 = 0$, $3x + y - 2z - 5 = 0$, a $2x + 5y - 3z + 5 = 0$, $3x + 3y + z + 7 = 0$.

1092. Zistite, či priamky:

a) $x - 3z/2 + 1 = 0$, $y - z/2 - 3 = 0$ a $x/2 - 6z + 49/2 = 0$, $2x - 37z/2 + 74 = 0$;

b) $x/3 - z + 1/3 = 0$, $y/3 + 5z/3 - 7/3 = 0$ a $2x/3 - y/3 - 5/3 = 0$, $7x/3 - z/3 + 2/3 = 0$;

c) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ a $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$

ležia v jednej rovine.

1093. Napíšte rovnice priamky, ktorá leží v danej rovine a pretína dané priamky, ak ich rovnice sú:

a) $2x + y = 0$, $\quad \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$, $\quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-1}$;

b) $3x + y - z + 1 = 0$, $\quad x = 3 - 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = 3 + 3t$, $\quad x = 4 - 6t$, $y = 2 + 2t$, $z = 8 - 9t$.

1094. Nájdite rovnice rovín, ktoré kolmo premietajú priamku p do súradnicových rovín a rovnice priemetov priamky do súradnicových rovín, ak priamka p má rovnice:

a) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-5}$; $\quad$ b) $7x - 2y + 5z - 10 = 0$, $3x + y + 2z - 6 = 0$.

1095. Nájdite rovnicu kolmého priemetu danej priamky na danú rovinu, ak ich rovnice sú:

a) $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{-6}$ a $x - 2y - z + 8 = 0$;

b) $\begin{aligned} 2x + 2y - 3z &= 0 \\ x - 3y - 2z + 5 &= 0 \end{aligned}$ a $3x + y + 2z + 3 = 0$.

1096. Nájdite uhol priamky

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+5}{-1}$ s rovinou $4x - y + z + 24 = 0$;

b) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{\sqrt{2}} = \dfrac{z+2}{-1}$ s rovinou $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$;

c) $\begin{aligned} x - y + z + 1 &= 0 \\ x + y + 3z - 3 &= 0 \end{aligned}$ s rovinou $x - y + z = 0$.

1097. Počiatkom súradnicového systému veďte rovinu rovnobežnú s rôznobežkami

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{a} \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{-8} = \frac{z-1}{12}.$$

1098. Nájdite rovnicu roviny určenej dvoma rovnobežkami

a) $\dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ a $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-5}{1}$;

b) $\begin{aligned} 3x + y + 3z + 7 &= 0 \\ 5x - 3y + 2z + 5 &= 0, \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} 8x - 2y + 5z &= 0 \\ 4x + 6y + 7z + 4 &= 0. \end{aligned}$

1099. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na danú priamku, ak

a) $A = (1, 3, 2)$, $\quad \begin{aligned} 2x + y - z + 3 &= 0 \\ x + 2y - z &= 0; \end{aligned}$

b) $A = (4, 3, 2)$, $\quad \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-11}{7} = \dfrac{z-1}{3}$;

c) $A = (4, 3, 2)$, $\quad \begin{aligned} 3x - 2y + z - 10 &= 0 \\ x + 2y + 3z - 1 &= 0. \end{aligned}$

1100. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s danými priamkami, ak

a) $A = (1, 2, 2)$, $\quad \begin{aligned} 2x + y - z + 3 &= 0 \\ x - y - z + 4 &= 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} x - y - z + 3 &= 0 \\ x - 2y - z + 4 &= 0; \end{aligned}$

b) $A = (3, -2, 1)$, $\quad \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}, \quad \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.

1101. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza daným bodom P a danou priamkou, ak

a) $P = (0, 3, 2)$, $\quad \begin{aligned} x + y - z + 1 &= 0 \\ x - 2y - z + 5 &= 0; \end{aligned}$

b) $P = (4, 3, -2)$, $\quad \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-5}$;

c) $P = (5, 3, 2)$, $\quad \begin{aligned} x + 2y + 6z - 7 &= 0 \\ 3x + y + 8z - 18 &= 0. \end{aligned}$

1102. Nájdite rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou p_1 a je rovnobežná s priamkou p_2, ak rovnice priamok p_1 a p_2 sú:

a) $x - 2y - 3z + 6 = 0 \qquad 2x + 3 = y = 3z - 2;$
$x + y + z - 1 = 0,$

b) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z+1}{2}, \qquad \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-1}{1}.$

1103. Nájdite rovinu, ktorá prechádza priamkou

$$2x + y - z + 1 = 0$$
$$y - 2 = 0$$

a je kolmá na rovinu $x + y + z - 1 = 0$.

1104. Napíšte rovnicu roviny, v ktorej ležia priamky

$$3x + 2y - z + 1 = 0 \qquad 5x + y + 4z - 3 = 0$$
$$x + y - 3z + 3 = 0 \quad \text{a} \quad 2x + y + 2z - 2 = 0.$$

1105. Nájdite kolmý priemet bodu P na danú priamku, ak

a) $P = (-7, 8, 12), \qquad \dfrac{x-18}{3} = \dfrac{y-16}{-1} = \dfrac{z-13}{-1};$

b) $P = (-7, 8, 12), \qquad x + 2y + z - 33 = 0$
$2x + y - z + 12 = 0;$

c) $P = (2, 3, 2), \qquad x = -3 + 2t, \quad y = -6 + t, \quad z = -1 + 3t.$

1106. Nájdite bod Q súmerný k bodu P vzhľadom na priamku p, ak

a) $P = (4, 1, -3)$ a priamka prechádza bodmi $A = (3, -2, 2)$, $B = (4, 1, 4)$;
b) $P = (3, 7, -2)$ a všeobecné rovnice priamky sú $x - 2y - 2z - 2 = 0$, $x + 2y - 6z + 10 = 0$.

1107. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $M = (2, -2, 0)$ a priesečníkom priamky $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{2}$ s rovinou $4x - 3y + 2z - 1 = 0$.

1108. Priesečníkom roviny $2x - 2y - z - 4 = 0$ s priamkou $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ veďte priamku, ktorá leží v danej rovine a je kolmá na danú priamku.

1109. Nájdite rovnice kolmice ku priamkam

$$y + 4z - 4 = 0 \qquad x = 0$$
$$4x - y - 4 = 0 \quad \text{a} \quad y + 2z + 1 = 0.$$

1110. Dokážte, že pre vzdialenosť d bodu P od priamky, ktorá prechádza bodom A a má smerový vektor $\boldsymbol{r}$, platí

$$d = \frac{|\boldsymbol{r} \times (P - A)|}{|\boldsymbol{r}|}.$$

1111. Dokážte, že vzdialenosť medzi dvoma rovnobežnými priamkami je daná vzťahom

$$d = \frac{|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{p}|},$$

kde $\boldsymbol{p}$ je smerový vektor priamky a $\boldsymbol{r}$ je vektor s počiatočným bodom na jednej a koncovým bodom na druhej priamke.

1112. Dokážte, že pre najkratšiu vzdialenosť medzi dvoma nerovnobežnými priamkami platí

$$d = \frac{|[(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3]|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|},$$

kde $\mathbf{r}_1$ je smerový vektor jednej priamky, $\mathbf{r}_2$ smerový vektor druhej priamky a $\mathbf{r}_3$ je ľubovoľný vektor s počiatočným bodom na jednej a s koncovým bodom na druhej priamke.

1113. Nájdite vzdialenosť bodu A od danej priamky, ak:

a) $A = (-2, 4, 3)$, $\quad x - 2y - z + 8 = 0,\ \ x + y - z + 2 = 0;$

b) $A = (2, 3, 5)$, $\quad \dfrac{x-2}{9} = \dfrac{y+5}{5} = \dfrac{z-3}{1}.$

1114. Nájdite vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok
$x = 2t - 2,\ y = t + 2,\ z = t + 1$ a $x = 2t - 2,\ y = t + 3,\ z = t + 2.$

1115. Nájdite najkratšiu vzdialenosť dvoch priamok

a) $x - 1 = y + 1 = z - 1$ a $x - 2 = 0,\ \ y - 1 = 0;$

b) $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{5}$ a $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+2}{2}.$

1116. Nájdite rovnice priamok, ktoré sú rovnobežné s rovinou $x + y + z - 1 = 0$ a pretínajú priamky

$$x + y - z + 2 = 0,\quad x - y - z + 12 = 0$$
$$x - 2y - z + 5 = 0,\quad x + y - z = 0.$$

1117. Nájdite rovnice priamok, ktoré pretínajú tri dané priamky:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & y = 2 & x = -1 \\ z = 0, & z = 1, & y = 1. \end{array}$$

4,19. Zobrazenie a transformácia priestoru

Uvažujme o pravouhlom súradnicovom systéme v priestore a o množine všetkých bodov v priestore. **Afinnou transformáciou***) priestoru nazývame takú transformáciu, pri ktorej každému bodu $M = (x, y, z)$ priestoru je priradený bod $M' = (x', y', z')$ priestoru, pričom platí

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + m \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + n \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + p, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

kde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}, m, n, p$ sú reálne čísla. Rovnice (1) nazývame *transformačnými rovnicami afinnej transformácie.*

1. Afinná transformácia priestoru je *regulárna* vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice transformácie

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

je 3.

*) Pojem transformácie pozri str. 143.

Regulárna afinná transformácia priestoru zachováva deliaci pomer troch bodov, pomer obsahov rovinných útvarov a pomer objemov telies. Obrazom roviny je rovina, obrazom priamky je priamka, obrazom úsečky je úsečka.

2. Posunutie. Afinnú transformáciu danú rovnicami

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + m \\ y' &= y + n \\ z' &= z + p, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

nazývame posunutím.

3. Stlačenia. Afinnú transformáciu danú rovnicami

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= kz, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

kde k je kladné číslo, nazývame *stlačením* v smere osi o_z (vzhľadom na rovinu R_{xy}). Číslo k nazývame *koeficientom stlačenia*.

4. Zhodnosť*). Afinnú transformáciu f nazývame zhodnosťou, ak pre každé dva body A, B priestoru platí $\varrho(A, B) = \varrho[f(A), f(B)]$.

Vlastnosti zhodnosti:

a) Zhodnosť je regulárna transformácia.

b) Inverzná transformácia zhodnosti je zhodnosť.

c) Zhodnosť zachováva vzdialenosť medzi dvoma bodmi, uhly medzi priamkami, rovnobežnosť priamok, rovnobežnosť rovín, rovnobežnosť priamok a rovín.

d) Afinná transformácia f daná rovnicami (1) je zhodnosť vtedy a len vtedy, ak platí:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

alebo v krátkosti

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{E}, \tag{6}$$

kde $\mathbf{A}$ je matica (3), $\mathbf{A}'$ je transponovaná matica k matici $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}$ je jednotková matica tretieho stupňa.

Podmienka (6) je rovnocenná so vzťahom

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{E}, \tag{7}$$

alebo

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}', \tag{8}$$

kde $\mathbf{A}^{-1}$ je inverzná matica k matici $\mathbf{A}$.

e) Determinant matice $\mathbf{A}$ sa rovná 1, alebo -1.

f) Reálne čísla $a_{11}, \ldots, a_{33}, m, n, p$ v transformačných rovniciach (1) majú tento geometrický význam:

Bod $O' = (m, n, p)$ je obrazom počiatku $O = (0, 0, 0)$.

Vektor $\mathbf{e}_1' = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}$ je obrazom jednotkového vektora $\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}$; vektor $\mathbf{e}_2' = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}$ je obrazom jednotkového vektora $\mathbf{j} = \{0, 1, 0\}$; vektor $\mathbf{e}_3' = \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}$ je obrazom jednotkového vektora $\mathbf{k} = \{0, 0, 1\}$.

Ak afinná transformácia f je zhodnosť, potom vektory $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ sú jednotkové vektory navzájom kolmé a označujeme ich $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$.

g) Posunutie je zhodnosť, stlačenie nie je zhodnosť.

h) Zhodnosť danú rovnicami

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

nazývame otočením okolo počiatku pravouhlého súradnicového systému.

*) Zhodnosť nazývame tiež *ortogonálnou transformáciou priestoru*.

5. Niekedy sa namiesto jedného pravouhlého súradnicového systému uvažuje o dvoch pravouhlých súradnicových systémoch v priestore a určujú sa súradnice daného bodu v oboch súradnicových systémoch. Ak $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory v jednom súradnicovom systéme, a $\bar{\boldsymbol{i}}$, $\bar{\boldsymbol{j}}$, $\bar{\boldsymbol{k}}$ sú jednotkové vektory v druhom súradnicovom systéme, pričom vzhľadom na prvý súradnicový systém platí

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{i}} &= \{\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1\},\\ \bar{\boldsymbol{j}} &= \{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2\},\\ \bar{\boldsymbol{k}} &= \{\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3\}, \end{aligned}$$

a pre počiatok $\bar{O}$ druhého súradnicového systému vzhľadom na prvý súradnicový systém platí $\bar{O} = (m,\ n,\ p)$, potom pre súradnice ľubovoľného bodu M v oboch súradnicových systémoch platí

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}\cos\alpha_1 + \bar{y}\cos\beta_1 + \bar{z}\cos\gamma_1 + m\\ y &= \bar{x}\cos\alpha_2 + \bar{y}\cos\beta_2 + \bar{z}\cos\gamma_2 + n\\ z &= \bar{x}\cos\alpha_3 + \bar{y}\cos\beta_3 + \bar{z}\cos\gamma_3 + p \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

6. Ak platí $\boldsymbol{i} = \bar{\boldsymbol{i}}$, $\boldsymbol{j} = \bar{\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{k} = \bar{\boldsymbol{k}}$, hovoríme, že druhý systém vznikol z prvého systému *posunutím*. Pre súradnice bodu M v oboch súradnicových systémoch platí

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + m\\ y &= \bar{y} + n\\ z &= \bar{z} + p \end{aligned}\right\} \quad \text{alebo} \quad \left.\begin{aligned} \bar{x} &= x - m\\ \bar{y} &= y - n\\ \bar{z} &= z - p. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

7. Ak $\bar{O} = O$, potom hovoríme, že druhý systém vznikol z prvého otočením. Pre súradnice bodu M v oboch súradnicových systémoch platí

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}\cos\alpha_1 + \bar{y}\cos\alpha_2 + \bar{z}\cos\alpha_3\\ y &= \bar{x}\cos\beta_1 + \bar{y}\cos\beta_2 + \bar{z}\cos\beta_3\\ z &= \bar{x}\cos\gamma_1 + \bar{y}\cos\gamma_2 + \bar{z}\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

alebo

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1\\ \bar{y} &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2\\ \bar{z} &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Transformácia cylindrických a sférických súradníc do pravouhlých súradníc. *Transformáciou cylindrických súradníc do pravouhlých súradníc* nazývame zobrazenie množiny všetkých bodov priestoru $M = (\varrho,\ \varphi,\ u)$ v danom cylindrickom súradnicovom systéme do množiny všetkých bodov priestoru $M' = (x,\ y,\ z)$ pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme s transformačnými rovnicami

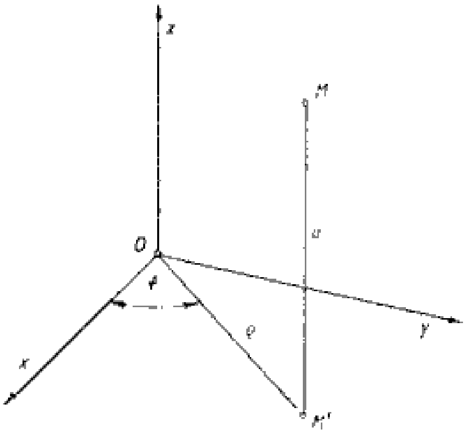
$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi\\ y &= \varrho\sin\varphi\\ z &= u. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Transformáciou sférických súradníc do pravouhlých súradníc nazývame zobrazenie množiny všetkých bodov priestoru $M = (r,\ \varphi,\ \vartheta)$ v danom sférickom súradnicovom systéme do množiny všetkých bodov $M' = (x,\ y,\ z)$ priestoru vo zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme s transformačnými rovnicami

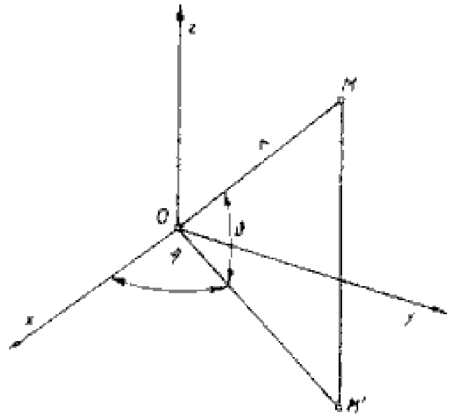
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta\\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta\\ z &= r\sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Nech cylindrický súradnicový systém je zvolený v danom pravouhlom súradnicovom systéme tak, že rovina π leží v rovine R_{xy}, polárna os je v osi o_x, počiatok cylindrického súradnicového systému P je v O, jednotkový bod polárneho súradnicového systému je totožný s bodom $J_1 = (1,\ 0,\ 0)$, bod K leží v bode $J_2 = (0,\ 1,\ 0)$ a os u v osi o_z *(obr. 70)*. Potom uvedená transformácia (14) udáva pravouhlé súradnice bodu $M = (\varrho,\ \varphi,\ u)$ pri takto zvolenom cylindrickom súradnicovom systéme.

Nech sférický súradnicový systém je zvolený v danom pravouhlom súradnicovom systéme tak, že rovina π leží v rovine R_{xy}, polárna os v osi o_x, počiatok sférického súradnicového systému je v bode O, jednotkový bod polárnej osi v rovine π je v bode $J_1 = (1, 0, 0)$, bod K leží v bode $J_2 = (0, 1, 0)$ a nech bod R leží na kladnej časti osi o_z (pozri *obr. 71*). Potom uvedená transformácia (15) udáva pravouhlé súradnice bodu $M = (r, \varphi, \vartheta)$ pri takto zvolenom sférickom súradnicovom systéme.



Obr. 70



Obr. 71

Inverzná transformácia k transformácii (14) má rovnice

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

alebo

$$\varrho = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad u = z,$$

pre každý bod na osi o_z.

Inverzná transformácia k transformácii (15) má rovnice

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \sin\vartheta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\vartheta &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{18}$$

pre body, ktoré neležia na osi o_z alebo $r = |z|$, $\vartheta = (\operatorname{sgn} z)\pi/2$, $\varphi = 0$ pre body, ktoré ležia na osi o_z.

Príklad 1. Nájdite rovnicu obrazu roviny ν s rovnicou $x + 4y - 3z - 3 = 0$ pri zobrazení f, ktorého transformačné rovnice sú

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x + 2z - 4 \\ y' &= 3y + z - 1 \\ z' &= 2x - y + 3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Riešenie. Uvedenú úlohu rozriešime troma typickými spôsobmi.

a) Uvažujme ľubovoľný bod $A = (t, u, v)$ danej roviny, kde reálne čísla t, u, v spĺňajú rovnicu roviny, t. j. platí

$$t + 4u - 3v - 3 = 0.$$

Z toho $t = 3 - 4u + 3v$, kde u a v sú ľubovoľné reálne čísla. Pre obraz A' bodu A podľa (19) platí

$$\begin{aligned} x' &= -(3 - 4u + 3v) + 2v - 4 \\ y' &= 3u + v - 1 \\ z' &= 2(3 - 4u + 3v) - u + 3, \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} x' &= -7 + 4u - v \\ y' &= -1 + 3u + v \\ z' &= 9 - 9u + 6v. \end{aligned} \tag{20}$$

Keďže vektory $\{4, 3, -9\}$, $\{-1, 1, 6\}$ nie sú kolineárne a u, v sú ľubovoľné reálne čísla, rovnice (20) sú parametrické rovnice roviny ν', ktorá je obrazom danej roviny ν. Vylúčením parametrov u, v z rovníc (20) dostaneme všeobecnú rovnicu roviny ν':

$$27x' - 15y' + 7z' + 111 = 0.$$

b) Pre všetky body roviny ν a ich obrazy platia rovnice

$$\begin{aligned} -x + 2z &= x' + 4 \\ 3y + z &= y' + 1 \\ 2x - y &= z' + 3 \\ x + 4y - 3z &= 3. \end{aligned} \tag{20'}$$

Z definície transformácie vyplýva, že riešením tohto systému musí byť aspoň jedna trojica čísel (x', y', z'). Podľa Frobeniovej vety musí sa hodnosť matice systému rovnať hodnosti rozšírenej matice systému. Matica systému je typu 4/3, preto jej hodnosť môže byť najviac 3.

Pretože determinant

$$\begin{vmatrix} -1, & 0, & 2, \\ 0, & 3, & 1, \\ 2, & -1, & 0, \end{vmatrix} = -13 \neq 0,$$

je hodnosť matice systému 3.

Aby sa mohla hodnosť rozšírenej matice systému rovnať hodnosti matice systému, musí platiť

$$\begin{vmatrix} -1, & 0, & 2, & x' + 4 \\ 0, & 3, & 1, & y' + 1 \\ 2, & -1, & 0, & z' - 3 \\ 1, & 4, & -3, & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$27x' - 15y' + 7z' + 111 = 0.$$

Pre každú trojicu čísiel (x', y', z'), ktorá spĺňa poslednú rovnicu, má systém (20') jediné riešenie (x, y, z). Toto vyhovuje i rovnici roviny ν, preto

$$27x' - 15y' + 7z' + 111 = 0$$

je rovnica obrazu roviny ν.

c) Keďže hodnosť matice transformácie sa rovná 3, daná transformácia je regulárna. Podľa vlastnosti (2) obrazom danej roviny bude rovina, ktorá je určená obrazmi troch bodov roviny ν, ktoré neležia na jednej priamke. Zvoľme v rovine ν body $A = (0, 0, -1)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (3, 0, 0)$, ktoré neležia na jednej priamke. Z rovníc (19) vyplýva $A' = (-6, -2, 3)$, $B' = (-3, 2, 0)$, $C' = (-7, -1, 9)$.

Rovnica roviny určenej bodmi A', B', C' je

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' & 1 \\ -6, & -2, & 3, & 1 \\ -3, & 2, & 0, & 1 \\ -7, & -1, & 9, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$27x' - 15y' + 7z' + 111 = 0.$$

Príklad 2. Nájdime afinnú transformáciu, ktorá bodom $O = (0, 0, 0)$, $J_1 = (1, 0, 0)$, $J_2 = (0, 1, 0)$ a $J_3 = (0, 0, 1)$ priraďuje body $O' = J_3$, $J_1' = J_2$, $J_2' = J_1$, $J_3' = O$. Určme k nej inverznú transformáciu, ak existuje.

Riešenie. Z transformačných rovníc (1) pre bod O' vyplýva

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}0 + a_{12}0 + a_{13}0 + m \\ 0 &= a_{21}0 + a_{22}0 + a_{23}0 + n \\ 1 &= a_{31}0 + a_{32}0 + a_{33}0 + p. \end{aligned}$$

Z toho

$$m = 0, \qquad n = 0, \qquad p = 1.$$

Podobne pre bod J_1' dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}1 + a_{12}0 + a_{13}0 \\ 1 &= a_{21}1 + a_{22}0 + a_{23}0 \\ 0 &= a_{31}1 + a_{32}0 + a_{33}0 + 1, \end{aligned}$$

z toho

$$a_{11} = 0, \qquad a_{21} = 1, \qquad a_{31} = -1.$$

Pre bod J_2' platí:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \,.\, 0 + a_{12}1 + a_{13}0 \\ 0 &= 1 \,.\, 0 + a_{22}1 + a_{23}0 \\ 0 &= 1 \,.\, 0 + a_{32}1 + a_{33}0 + 1, \end{aligned}$$

z toho

$$a_{12} = 1, \qquad a_{22} = 0, \qquad a_{32} = -1.$$

Napokon pre bod J_3' máme

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \,.\, 0 + 1 \,.\, 0 + a_{13}0 \\ 0 &= 1 \,.\, 0 + 0 \,.\, 0 + a_{23}1 \\ 0 &= 1 \,.\, 0 - 1 \,.\, 0 + a_{33}1 + 1, \end{aligned}$$

a z toho

$$a_{13} = a_{23} = 0, \qquad a_{33} = -1.$$

Hľadané transformačné rovnice sú

$$x' = y, \qquad y' = x, \qquad z' = -x - y - z + 1. \tag{21}$$

Matica tejto transformácie je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinant tejto matice sa rovná 1, teda $h(\mathbf{A}) = 3$, preto afinná transformácia je regulárna. Inverznú transformáciu určíme najjednoduchšie z (21). Dostaneme

$$x = y', \qquad y = x', \qquad z = -x' - y' - z' + 1.$$

Príklad 3. Nájdime transformačné rovnice zobrazenia, ktoré každému bodu priestoru priraďuje bod súmerný podľa roviny ν danej rovnicou $x + y + z - 1 = 0$. Ukážme, že toto zobrazenie je zhodnosť.

Riešenie. Zvoľme ľubovoľný bod priestoru $M = (x_0, y_0, z_0)$. Spusťme kolmicu z bodu M na danú rovinu. Jej rovnice sú

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t \\ y &= y_0 + t \\ z &= z_0 + t. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Priesečník $S = (x_S, y_S, z_S)$ tejto kolmice s danou rovinou určíme riešením rovnice (22) a rovnice roviny ν. Pre parameter t priesečníka S dostaneme

$$x_0 + t + y_0 + t + z_0 + t - 1 = 0.$$

Z toho je

$$t = \frac{1}{3}(1 - x_0 - y_0 - z_0).$$

Po dosadení do rovníc (22) máme:

$$x_S = \frac{1}{3}(2x_0 - y_0 - z_0 + 1),$$

$$y_S = \frac{1}{3}(-x_0 + 2y_0 - z_0 + 1),$$

$$z_S = \frac{1}{3}(-x_0 - y_0 + 2z_0 + 1).$$

Bod $M_0' = (x_0', y_0', z_0')$, súmerný k danému bodu podľa roviny ν, je koncovým bodom úsečky, ktorá má stred v bode S a druhý koncový bod v bode M. Preto platí

$$x_S = \frac{x_0 + x_0'}{2},$$

$$y_S = \frac{y_0 + y_0'}{2},$$

$$z_S = \frac{z_0 + z_0'}{2}.$$

Po dosadení za x_S, y_S, z_S a úprave dostaneme

$$x_0' = \frac{1}{3}(x_0 - 2y_0 - 2z_0 + 2),$$

$$y_0' = \frac{1}{3}(-2x_0 + y_0 - 2z_0 + 2),$$

$$z_0' = \frac{1}{3}(-2x_0 - 2y_0 + z_0 + 2).$$

Transformačné rovnice hľadaného zobrazenia sú

$$\begin{aligned} x' &= x/3 - 2y/3 - 2z/3 + 2/3 \\ y' &= -2x/3 + y/3 - 2z/3 + 2/3 \\ z' &= -2x/3 - 2y/3 + z/3 + 2/3. \end{aligned}$$

Zostáva ešte dokázať, že dané zobrazenie je zhodnosť, t. j. že platia vzťahy (5), resp. (6). Počítajme preto súčin $\mathbf{AA}'$:

$$\mathbf{AA}' = \begin{pmatrix} 1/3, & -2/3, & -2/3 \\ -2/3, & 1/3, & -2/3 \\ -2/3, & -2/3, & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3, & -2/3, & -2/3 \\ -2/3, & 1/3, & -2/3 \\ -2/3, & -2/3, & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Nájdené zobrazenie je zhodnosť.

Príklad 4. Ak v priestore sú zvolené: pravouhlý súradnicový systém, cylindrický súradnicový systém a sférický súradnicový systém, tak ako je to uvedené v úvode tohto článku, vypočítajme:

a) cylindrické a sférické súradnice bodu A, ak v pravouhlom súradnicovom systéme je $A = (-1, \sqrt{3}, 2)$;

b) pravouhlé a sférické súradnice bodu C, ak v cylindrickom súradnicovom systéme je $C = (2, \pi/4, -3)$;

c) pravouhlé a cylindrické súradnice bodu E, ak v sférickom súradnicovom systéme je $E = (3, 4\pi/3, \pi/4)$.

Riešenie. a) Podľa (16) pre cylindrické súradnice bodu A máme

$$\varrho = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = 2, \quad \sin\varphi = \sqrt{3}/2, \quad \cos\varphi = -1/2 \quad \text{a} \quad \varphi = 2\pi/3,$$
$$u = z = 2,$$

teda v cylindrickom súradnicovom systéme je

$$A = (2, 2\pi/3, 2).$$

Pre sférické súradnice bodu A podľa (17) platí

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = \sqrt{3}/2, \quad \cos\varphi = -1/2, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3},$$
$$\sin\vartheta = z/r = 2/2\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}, \quad \vartheta = \pi/4$$

a teda v sférickom súradnicovom systéme je $A = (2\sqrt{2}, 2\pi/3, \pi/4)$.

b) Podľa (14) pre pravouhlé súradnice bodu C máme

$$x = 2\cos(\pi/4) = 2\sqrt{2}/2 = \sqrt{2},$$
$$y = 2\sin(\pi/4) = 2\sqrt{2}/2 = \sqrt{2},$$
$$z = u = -3$$

a teda v pravouhlom súradnicovom systéme je $C = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3)$.

Podľa (17) pre sférické súradnice bodu C platí

$$r = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},$$
$$\varphi = \pi/4,$$

$\sin\vartheta = -3/\sqrt{13}$, $\vartheta = -\arcsin(3/\sqrt{13})$ a teda v sférickom súradnicovom systéme je $C = (\sqrt{13}, \pi/4, -\arcsin(3/\sqrt{13}))$.

c) Podľa (15) pre pravouhlé súradnice bodu E platí

$$x = 3\cos(4\pi/3)\cos(\pi/4) = -3\sqrt{2}/4,$$
$$y = 3\sin(4\pi/3)\cos(\pi/4) = -3\sqrt{6}/4,$$
$$z = 3\sin(\pi/4) = 3\sqrt{2}/2.$$

V pravouhlom súradnicovom systéme je $E = (-3\sqrt{2}/4, -3\sqrt{6}/4, 3\sqrt{2}/2)$.

Pre cylindrické súradnice bodu E platí

$$\varrho = 3\cos(\pi/4) = 3\sqrt{2}/2, \quad \varphi = 4\pi/3, \quad u = 3\sin(\pi/4) = 3\sqrt{2}/2$$

a teda v cylindrickom súradnicovom systéme je $E = (3\sqrt{2}/2, 4\pi/3, 3\sqrt{2}/2)$.

1118. V pravouhlom súradnicovom systéme je daný bod $P = (-2, 1, 3)$. Nájdite obraz P' bodu P pri posunutí:

a) v ktorom obrazom bodu $O = (0, 0, 0)$ je bod $O' = (2, 1, 2)$,

b) určenom vektorom $\boldsymbol{a} = \{3, 4, -2\}$.

Napíšte transformačné rovnice posunutia.

1119. Vrcholy štvorstena sú v bodoch $A = (-6, 2, -1)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (5, -2, 1)$, $D = (0, -1, -2)$. Pri posunutí je obrazom ťažiska bod $M = (7, -3, 2)$. Nájdite obrazy vrcholov pri tomto posunutí.

1120. Množina bodov je daná rovnicou $x^2 + 3y^2 - 2yz - 6x + 2y + 4z - 5 = 0$. Nájdite rovnicu tejto množiny, keď nový súradnicový systém vznikol posunutím tak, že $\overline{O} = (3, 2, 7)$.

1121. Nájdite afinnú transformáciu priestoru, ak obrazom počiatku je bod $O' = (3, 2, 1)$ a obrazy jednotkových vektorov sú vektory $\mathbf{e}_1' = \{0, 1, 1\}$, $\mathbf{e}_2' = \{6, 0, 4\}$, $\mathbf{e}_3' = \{3, 2, 7\}$. Nájdite k nej tiež inverznú transformáciu, ak existuje.

1122. Afinná transformácia má transformačné rovnice:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z \\ y' &= x + y - 3 \\ z' &= 3x - y + 2z + 1. \end{aligned}$$

Nájdite: a) inverznú transformáciu, ak existuje;
b) obrazy počiatku O a jednotkových vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$; bod, ktorého obraz je $M' = O$ a vektory, ktorých obrazy sú $\mathbf{a}' = \mathbf{i}$, $\mathbf{b}' = \mathbf{j}$, $\mathbf{c}' = \mathbf{k}$.

1123. Nájdite afinnú transformáciu, ktorá zobrazí
a) súradnicové osi o_x, o_y, o_z opäť do súradnicových osí;
b) rovinu R_{xy} do roviny R_{xy};
c) súradnicovú os o_z do osi o_z.

1124. Zistite, či uvedené afinné transformácie sú regulárne a nájdite obraz roviny R_{xy} pri týchto transformáciách:

a) $$\begin{aligned} x' &= x - y - z + 2 \\ y' &= -x + y - z + 3 \\ z' &= 2x + y + z - 1; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z + 3 \\ y' &= x + y - 2z \\ z' &= 3x - z + 1; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x' &= x + 3y + 2z - 1 \\ y' &= 2x + 6y + 4z - 2 \\ z' &= -x - 3y - 2z + 1; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x' &= 2 \\ y' &= 3 \\ z' &= 4; \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x \\ z' &= x. \end{aligned}$$

1125. Nájdite obrazy bodov $A = (-3, 0, 1)$, $B = (2, 2, -1)$, $C = (3, 2, -1)$ pri afinnom zobrazení, ktorého transformačné rovnice sú

a) $$\begin{aligned} x' &= x - 2y + z - 3 \\ y' &= -2x + y - 3z \\ z' &= x + y + 2z - 2; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x' &= -y + z + 2 \\ y' &= 6x + 4y - 2z + 6 \\ z' &= 2x/3 - y/2 + 2z - 3. \end{aligned}$$

1126. Daná je rovina $x + y + z - 6 = 0$ a priamka $x/1 = y/1 = z/1$. Nájdite obrazy danej roviny a priamky pri zobrazení, ktorého transformačné rovnice sú:

a) $$\begin{aligned} x' &= x - y + z + 2 \\ y' &= x - y - z + 3 \\ z' &= x + y + z - 1; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -x - y + 2z; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x' &= 2x/3 - y/3 + 2z/3 \\ y' &= x/3 + 14y/15 + 2z/15 \\ z' &= 2x/3 - 2y/15 - 11z/15. \end{aligned}$$

Ak je možné, vypočítajte uhol obrazu priamky a roviny a zistite, pri ktorých zobrazeniach sa uhol nemení.

1127. Nájdite afinnú transformáciu, ktorá vrcholom štvorstena $OABC$ priraďuje body $ODEF$, kde D, E, F sú stredy hrán BC, AC, AB, pričom $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$.

1128. Nájdite zobrazenie priestoru, ktoré bodom O, A, B, C priraďuje body:
a) O, G, E, D; b) F, B, A, C,
kde $OADBCEFG$ sú vrcholy kocky o strane a, pričom je $O = (0, 0, 0)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$, $C = (0, 0, a)$.

1129. Nájdite rovnice transformácie, ktorá každému bodu M priestoru priradí jeho kolmý priemet:
a) do roviny $2x - 3y + 2z - 1 = 0$;
b) do priamky $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{2}$.

1130. Nájdite rovnice transformácie, ktorá priraďuje každému bodu M priestoru bod súmerne položený
a) podľa počiatku;
b) podľa bodu $A = (7, 11, -2)$;
c) podľa súradnicovej osi o_y;
d) podľa priamky $x/1 = y/1 = z/1$;
e) podľa súradnicovej roviny R_{xz};
f) podľa roviny $2x - y + 3z - 5 = 0$.

1131. Nájdite rovnice transformácie, ktorá priraďuje každému bodu M priestoru bod M', pre ktorý platí:
a) $M' - A = 2(M - A)$, kde $A = (1, 1, 1)$;
b) $\delta(M', \nu) = -3\delta(M, \nu)$, kde ν je rovina daná rovnicou $x + y + z - 3 = 0$ a spojnica bodov M', M je kolmá na rovinu ν.

1132. Nájdite zhodnosť, ak
a) obrazom bodu O je $O' = O$ a obrazom jednotkových vektorov sú vektory: $\mathbf{i}' = \{2/3, -11/15, -2/15\}$, $\mathbf{j}' = \{-1/3, -2/15, -14/15\}$, $\mathbf{k}' = \{2/3, 2/3, -1/3\}$;
b) obrazom bodu O je $O' = (3, 2, 1)$ a $\sphericalangle\, \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' = 1/3$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' = -2/3$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' < \pi/2$, $\sphericalangle\, \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' = -2/3$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' > \pi/2$.

1133. Napíšte transformačné rovnice otáčania, keď nová os $o_{\bar{z}}$ pravouhlého, pravotočivého súradnicového systému je daná vektorom $\mathbf{p}_1 = \{1, 2, -2\}$ a nová os $o_{\bar{y}}$ vektorom $\mathbf{p}_2 = \{2, 1, 2\}$.

1134. Daná je zhodnosť

$$\begin{aligned} x' &= 2x/7 - 6y/7 + 3z/7 \\ y' &= 3x/7 - 2y/7 - 6z/7 \\ z' &= 6x/7 + 3y/7 + 2z/7. \end{aligned}$$

Nájdite obrazy:
a) súradnicových osí;
b) súradnicových rovín;
c) roviny $2x - y + 3z - 10 = 0$;
d) jednotkových vektorov;
e) priamky, ktorá prechádza počiatkom súradnicového systému a bodom $A = (7, 7, 14)$.

1135. Napíšte rovnicu obrazu roviny $-x + z - \sqrt{2} = 0$ pri otočení súradnicového systému okolo osi o_y o uhol $\varphi = \pi/4$ v kladnom smere.

1136. Nájdite takú priamku v priestore, ktorú zhodnosť

$$x' = 2x/3 + 11y/15 + 2z/15$$
$$y' = x/3 - 2y/15 - 14z/15$$
$$z' = 2x/3 - 2y/3 + z/3$$

zobrazí opäť do tej istej priamky.

1137. Ako sa zmení rovnica

a) $z = xy$; b) $x^2 + y^2 = 4z$

po transformácii otočením, pričom v novom súradnicovom systéme prvé dve súradnicové osi sú v osiach uhla $\sphericalangle(o_x, o_y)$ a tretia súradnicová os je nezmenená.

V nasledujúcich úlohách predpokladajte, že pravouhlý súradnicový systém, cylindrický súradnicový systém a sférický súradnicový systém sú zvolené tak, ako v úvode k tomuto článku.

1138. Nájdite pravouhlé a cylindrické súradnice bodov, ak v sférickom súradnicovom systéme pre ne platí: $A = (3,\ \pi/3,\ \arccos 1/\sqrt{3})$, $B = (2,\ \pi,\ \pi/2)$, $C = (1,\ 3\pi/4,\ 0)$.

1139. Nájdite pravouhlé a sférické súradnice bodov, ak sú dané v cylindrickom súradnicovom systéme: $A = (4,\ \pi/4,\ 3)$, $B = (5,\ \pi,\ 5)$, $C = (2,\ \pi/2,\ -4)$.

1140. Nájdite cylindrické a sférické súradnice bodov, ak sú dané v pravouhlom súradnicovom systéme: $A = (1/2,\ \sqrt{3}/2,\ 1)$, $B = (0,\ 4,\ 4)$, $C = (0,\ 0,\ -8)$.

1141. Napíšte rovnicu roviny v sférickom súradnicovom systéme, ak v pravouhlom súradnicovom systéme má rovnicu $x + y + z = 1$. Nájdite v rovine bod, ktorý má sférické súradnice $\varphi = \pi/4$, $\vartheta = \pi/4$.

1142. Nájdite vzdialenosť bodov A, B, ak

a) v sférickom súradnicovom systéme pre ne platí $A = (r_1,\ \varphi_1,\ \vartheta_1)$, $B = (r_2,\ \varphi_2,\ \vartheta_2)$;

b) v cylindrickom súradnicovom systéme pre ne platí $A = (\varrho_1,\ \varphi_1,\ u_1)$, $B = (\varrho_1,\ \varphi_2,\ u_2)$.

1143. Nájdite uhol úsečky OM s polárnou súradnicovou osou, a to

a) v sférickom súradnicovom systéme, kde $M = (r,\ \varphi,\ \vartheta)$;

b) v cylindrickom súradnicovom systéme, kde $M = (\varrho,\ \varphi,\ u)$.

4.20. Kvadratické plochy

Guľová plocha

Guľová plocha je množina všetkých bodov $X = (x, y, z)$ priestoru, ktoré majú od daného bodu $S = (m, n, p)$ rovnakú vzdialenosť r. Bod S nazývame ***stredom*** guľovej plochy, číslo r ***polomerom*** guľovej plochy. Rovnica tejto guľovej plochy pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme v priestore je

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2. \tag{1}$$

Ak stred S je totožný s počiatkom pravouhlého súradnicového systému, potom rovnica guľovej plochy je

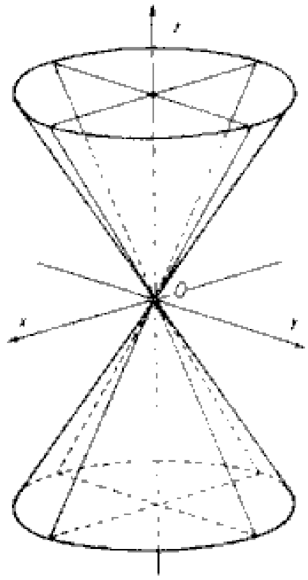
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{2}$$

Kvadratická kužeľová plocha

Nech k je kužeľosečka a V bod, ktorý neleží v rovine tejto kužeľosečky. Množina všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a bodmi kužeľosečky k, sa nazýva ***kvadratickou kužeľovou plochou***. Bod V sa nazýva ***vrcholom*** kužeľovej plochy, priamka idúca bodom V a bodom kužeľosečky sa nazýva *povrchovou priamkou* kvadratickej kužeľovej plochy a kužeľosečka k *určujúcou krivkou*. Kužeľová plocha sa nazýva *kruhovou*, ak kužeľosečka k je kružnica a spojnica vrcholu V so stredom S kružnice k je kolmá na rovinu kružnice.

Kánonická rovnica kužeľovej plochy *(obr. 72)* je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{3}$$



Obr. 72

Kvadratická valcová plocha

Nech k je kužeľosečka a p je priamka, ktorá nie je rovnobežná s rovinou kužeľosečky k. Množinu všetkých priamok rovnobežných s priamkou p, ktoré prechádzajú kužeľosečkou, nazývame *kvadratickou valcovou plochou*. Priamky tejto množiny nazývame *povrchovými priamkami* kvadratickej valcovej plochy. Kužeľosečku k nazývame *určujúcou krivkou* kvadratickej valcovej plochy.

Ak kužeľosečka k je kružnica, potom dostávame *kruhovú valcovú* plochu. Ak k je elipsa, dostaneme *eliptickú* valcovú plochu. Ak k je hyperbola, dostaneme *hyperbolickú* valcovú plochu. Ak k je parabola, dostaneme *parabolickú* valcovú plochu.

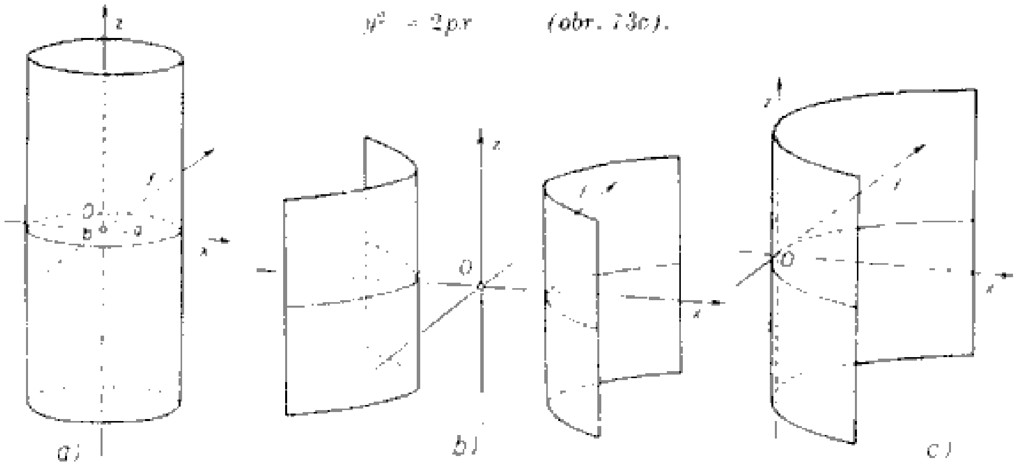
Ak povrchové priamky valcovej plochy sú rovnobežné s osou o_z pravouhlého súradnicového systému, potom kánonické rovnice týchto valcových plôch sú:

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (obr.\ 73a), \tag{5}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (obr.\ 73b), \tag{6}$$

$$y^2 = 2px \qquad (obr.\ 73c). \tag{7}$$



Obr. 73

Podobne môžeme napísať kánonické rovnice valcových plôch, ak povrchové priamky sú rovnobežné so súradnicovými osami pravouhlého súradnicového systému o_x a o_y.

V ďalšom budeme uvažovať o afinnom zobrazení f, ktorého transformačné rovnice sú

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= \frac{b}{a}\,y \\ z' &= z, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

kde a, b sú kladné čísla, $a \neq b$.

Elipsoid

Nech je daná elipsa k. Množinu všetkých elíps, ktoré vzniknú otáčaním elipsy k okolo jednej z jej osí, nazývame *rotačným elipsoidom*. Ak os rotácie je hlavná os elipsy, potom dostaneme rotačný elipsoid *pretiahnutý*. Ak os rotácie je vedľajšia os elipsy, potom dostaneme rotačný elipsoid *sploštený*.

Kánonická rovnica rotačného elipsoidu s osou rotácie v osi o_z *(obr. 74)* je

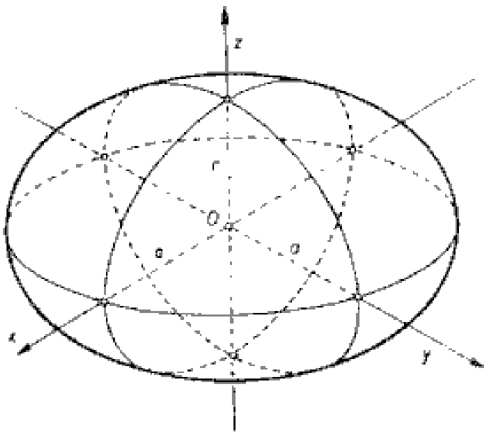
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{9}$$

Ak $a > c$, potom (9) je rovnica pretiahnutého rotačného elipsoidu. Ak $a < c$, potom rovnica (9) je rovnicou splošteného rotačného elipsoidu. Analogicky dostaneme rovnice rotačných elipsoidov, ak rotačné osi sú v osiach o_x, o_y.

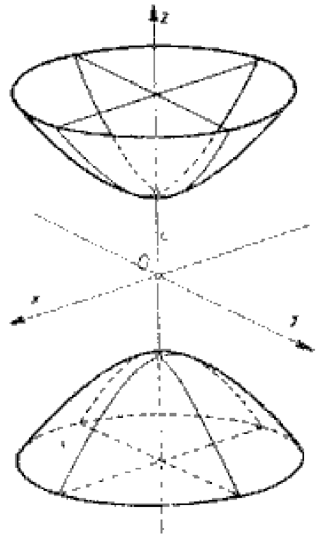
Obraz rotačného elipsoidu s rovnicou (9) pri afinnom zobrazení (8), ak $a \neq b \neq c$, nazývame *trojosovým* elipsoidom.

Kánonické rovnice trojosového elipsoidu sú

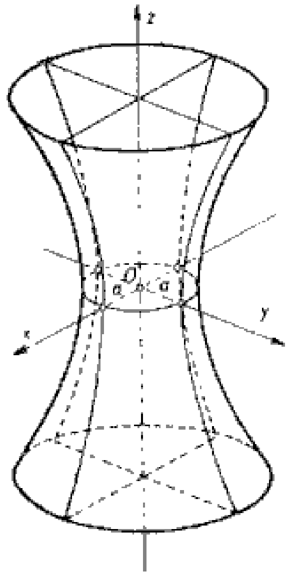
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{10}$$



Obr. 74



Obr. 75



Obr. 76

kde a, b, c sú navzájom rôzne kladné reálne čísla. Čísla a, b, c nazývame dĺžkami *polosí* elipsoidu. Trojosový elipsoid má tri roviny súmernosti a tri osi súmernosti. Priesečník osí súmernosti nazývame *stredom súmernosti* elipsoidu. Priesečníky osí s elipsoidom nazývame *vrcholmi* elipsoidu.

Hyperboloid

Nech je daná hyperbola k. Množinu všetkých hyperbol, ktoré vzniknú otáčaním hyperboly k okolo jej hlavnej osi nazývame *rotačným dvojdielnym hyperboloidom (obr. 75)*.

Kánonická rovnica rotačného dvojdielneho hyperboloidu s osou rotácie v osi o_z je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{11}$$

Množinu všetkých hyperbol, ktoré vzniknú otáčaním danej hyperboly okolo jej vedľajšej osi, nazývame *jednodielnym rotačným hyperboloidom (obr. 76)*.

Kánonická rovnica jednodielneho rotačného hyperboloidu s osou rotácie v osi o_z je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{12}$$

Podobne dostaneme rovnice jednodielnych a dvojdielnych rotačných hyperboloidov, ak osami otáčania sú o_x, o_y.

Obrazom dvojdielneho rotačného hyperboloidu s rovnicou (11) pri afinnom zobrazení (8) je *dvojdielny hyperboloid.*

Kánonická rovnica dvojdielneho hyperboloidu je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{13}$$

Obrazom jednodielneho rotačného hyperboloidu s rovnicou (12) pri afinnom zobrazení (8) je jednodielny hyperboloid.

Kánonická rovnica jednodielneho hyperboloidu je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{13'}$$

Ak hyperboloid je daný kánonickou rovnicou, potom súradnicové roviny sú rovinami súmernosti, súradnicové osi sú osami súmernosti. Priesečník osí súmernosti je *stred súmernosti* hyperboloidu. Priesečníky dvojdielneho hyperboloidu s osou smúernosti o_z nazývame *vrcholmi.*

Ak hyperboloid má rovnicu (13) a (13'), potom kužeľovú plochu s rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{14}$$

nazývame *asymptotickou kužeľovou plochou* hyperboloidu.

Paraboloidy

Nech je daná parabola k. Množinu všetkých parabol, ktoré vzniknú otáčaním paraboly k okolo jej osi, nazývame *rotačným paraboloidom.*

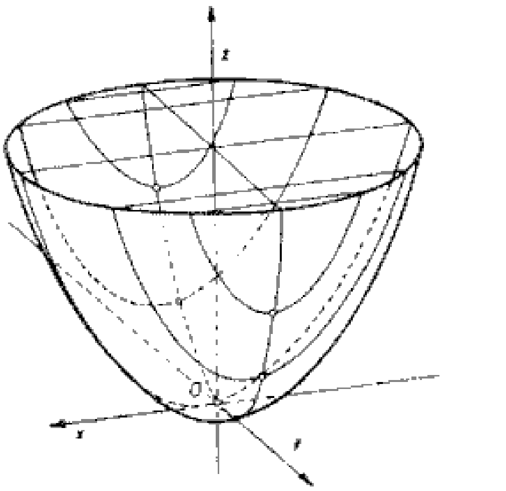
Kánonická rovnica rotačného paraboloidu s rotačnou osou v osi o_z je

$$x^2 + y^2 = 2pz, \tag{15}$$

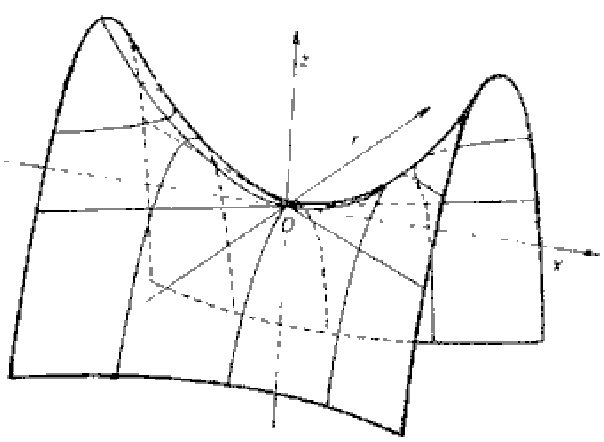
kde p je kladné reálne číslo rôzne od nuly.

Podobne dostaneme rovnice rotačných paraboloidov, ktoré majú osi otáčania v osiach o_x, o_y.

Nech sú dané dve paraboly k_1, k_2, ktoré majú spoločný vrchol, spoločnú os a ich vrcholové dotyčnice ležia v dvoch navzájom kolmých rovinách. Množinu všetkých parabol, ktoré dostaneme posunutím paraboly k_2 tak, aby vrcholy týchto parabol boli na parabole k_1, nazývame *paraboloidom.* Ak obe paraboly ležia v tom istom polpriestore, určenom rovinou, ktorá prechádza ich vrcholovými dotyčnicami, dostaneme *eliptický paraboloid (obr. 77).* Ak obe paraboly ležia v opačných polpriestoroch, dostaneme *hyperbolický paraboloid (obr. 78).* Roviny, v ktorých ležia



Obr. 77



Obr. 78

paraboly k_1, k_2 sú roviny súmernosti paraboloidu, ich spoločná os je osou súmernosti paraboloidu. Priesečník osi s paraboloidom je *vrchol* paraboloidu.

Kánonická rovnica eliptického paraboloidu je

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{16}$$

kde p, q sú kladné čísla, $p \neq q$.

Kánonická rovnica hyperbolického paraboloidu je

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{17}$$

kde p, q sú kladné čísla.

Dotyková rovina

Dotyková rovina ku kvadratickej ploche s rovnicou

$$a(x - m)^2 + b(y - n)^2 + c(z - p)^2 + d = 0$$

v dotykovom bode $M = (x_0, y_0, z_0)$ má rovnicu

$$a(x_0 - m)(x - m) + b(y_0 - n)(y - n) + c(z_0 - p)(z - p) + d = 0. \tag{18}$$

Dotyková rovina ku kvadratickej ploche s rovnicou

$$a(x - m)^2 + b(y - n)^2 - 2c(z - p) = 0$$

v dotykovom bode $M = (x_0, y_0, z_0)$ má rovnicu

$$a(x_0 - m)(x - m) + b(y_0 - n)(y - n) + c(z + z_0 - 2p) = 0. \tag{18'}$$

Príklad 1. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza bodom $A = (-4, 1, 2)$ a pretína rovinu $z - 1 = 0$ v kružnici:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 &= 0 \\ z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie. Rovnicu danej kružnice upravíme na tvar

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= 16 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že stredom kružnice je bod $(-1, 1, 1)$. Stred guľovej plochy S leží na priamke, ktorá prechádza stredom kružnice a je kolmá na rovinu kružnice, t. j. na rovinu $z - 1 = 0$. Stredom S je teda bod $(-1, 1, p)$. Súradnicu p a polomer r guľovej plochy nájdeme z podmienky, že guľová plocha má prechádzať daným bodom A a ľubovoľným bodom kružnice. Zvoľme napr. na kružnici bod $K = (3, 1, 1)$. Potom platí

$$\begin{aligned} \varrho(S, A) &= r, \\ \varrho(S, K) &= r, \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} \sqrt{(-1 + 4)^2 + (1 - 1)^2 + (p - 2)^2} &= r, \\ \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 1)^2 + (p - 1)^2} &= r. \end{aligned} \tag{19}$$

Po umocnení a úprave dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} (p - 2)^2 - r^2 + 9 &= 0, \\ (p - 1)^2 - r^2 + 16 &= 0, \end{aligned}$$

kde $r > 0$. Riešením tohto systému je $p = -2$, $r = 5$. To je aj riešením systému rovníc (19), o čom sa presvedčíme dosadením. Rovnica hľadanej guľovej plochy je

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 25.$$

Príklad 2. Napíšme rovnicu valcovej plochy, ktorej určujúcou krivkou je hyperbola

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 36 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

a jej povrchové priamky sú rovnobežné s priamkou, ktorá je určená počiatkom pravouhlého súradnicového systému a bodom $A = (0, 1, 1)$.

Riešenie. Rovnica priamky, ktorá je určená bodom $O = (0, 0, 0)$ a bodom $A = (0, 1, 1)$ je

$$x : y : z = 0 : 1 : 1. \tag{20}$$

Nech bod $B = (a, b, c)$ je bod, ktorý leží na danej hyperbole a $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod valcovej plochy, ktorý leží na povrchovej priamke prechádzajúcej bodom B. Keďže povrchové priamky sú rovnobežné s priamkou (20), ktorej smerové čísla sú 0, 1, 1, rovnica priamky určenej bodmi B a X je

$$x = a, \quad y = b + t, \quad z = c + t, \tag{21}$$

kde t je ľubovoľné reálne číslo. Bod B leží na danej hyperbole, a preto jeho súradnice vyhovujú rovnici tejto hyperboly, t. j. platí

$$a^2 - b^2 = 36, \tag{22}$$

$$c = 0. \tag{23}$$

Vylúčením čísel c a t z rovníc (21) na základe (23) dostaneme

$$x = a, \quad y = b + z.$$

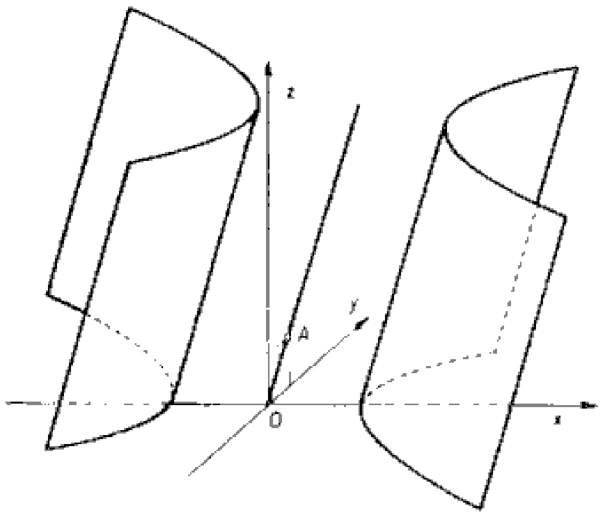
Z toho $a = x$, $b = y - z$. Po dosadení do rovnice (22) máme

$$x^2 - (y - z)^2 = 36,$$

čiže

$$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 36 = 0,$$

čo je rovnica hľadanej valcovej plochy (pozri *obr. 79*).



Obr. 79

Príklad 3. Nájdime rovnicu elipsoidu, ktorého osi ležia v súradnicových osiach, ak elipsoid prechádza bodom $A = (\sqrt{3}, 3, 3)$ a kružnicou k

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25 \\ x - z &= 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Riešenie. Rovnica hľadaného elipsoidu musí mať tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{25}$$

Bod A leží na elipsoide, preto platí:

$$3/a^2 + 9/b^2 + 9/c^2 = 1. \tag{26}$$

Elipsoid má prechádzať danou kružnicou, t. j. ľubovoľný bod danej kružnice musí vyhovovať rovnici (25). Z rovníc (24) pre ľubovoľný bod kružnice k vyplýva

$$x = z, \tag{27}$$

$$y^2 = 25 - 2z^2, \tag{28}$$

pričom z rovnice (28) máme

$$25 - 2z^2 \geqq 0,$$

čiže

$$|z| \leqq 5/\sqrt{2}. \tag{29}$$

Po dosadení z rovníc (27), (28) do rovnice (25) dostaneme

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{25 - 2z^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

alebo po úprave máme

$$z^2(1/a^2 + 1/c - 2/b^2) = 1 - 25/b^2.$$

Táto rovnosť podľa (29) má platiť pre každé $z \in \langle -5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2} \rangle$, čo je možné len vtedy, keď

$$1/a^2 + 1/c^2 - 2/b^2 = 0 \tag{30}$$

a

$$1 - 25/b^2 = 0. \tag{31}$$

Dĺžky polosí a, b, c hľadaného elipsoidu dostaneme riešením systému rovníc (26), (30), (31). Z (31) vyplýva $b^2 = 25$. Dosadením do (26) a (30) máme

$$3/a^2 + 9/c^2 = 16/25$$

$$1/a^2 + 1/c^2 = 2/25$$

a z toho $a^2 = 75$, $c^2 = 15$.

Dĺžky polosí hľadaného elipsoidu sú $a = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, $c = \sqrt{15}$ a jeho rovnica je

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{15} = 1.$$

Príklad 4. Nájdime priesečnicu jednodielneho hyperboloidu

$$x^2/36 + y^2/16 - z^2/9 = 1, \tag{32}$$

rovinou

$$x - y + 2z - 4 = 0. \tag{33}$$

Riešenie. Rovnice priesečníc dostaneme riešením systému dvoch rovníc (32), (33) s troma neznámymi. Vyjadrime pomocou neznámej y ostatné neznáme, dostaneme

$$x^2 - 4z^2 = \frac{9}{4}(16 - y^2)$$

$$x + 2z = 4 + y.$$

Úpravou tohto systému máme

$$(x - 2z)(x + 2z) = \frac{9}{4}(4 - y)(4 + y)$$

$$x + 2z = 4 + y;$$

čiže

$$(x - 2z)(4 + y) = \frac{9}{4}(4 - y)(4 + y)$$
$$x + 2z = 4 + y.$$

Pri riešení sú dve možnosti:

1. Ak $y + 4 \neq 0$, potom máme

$$x - 2z = \frac{9}{4}(4 - y)$$
$$x + 2z = 4 + y$$

a priesečnica je priamka so všeobecnými rovnicami

$$\begin{aligned} 4x + 9y - 8z - 36 &= 0 \\ x - y + 2z - 4 &= 0, \end{aligned}$$

čiže

$$\frac{x - 4}{10} = \frac{y - 4}{-16} = \frac{z - 2}{-13}.$$

2. Ak $y + 4 = 0$, priesečnica je priamka so všeobecnými rovnicami

$$\begin{aligned} y + 4 &= 0 \\ x + 2z &= 0, \end{aligned}$$

čiže

$$x : (y + 4) : z = 2 : 0 : 1.$$

Príklad 5. Vyšetrime plochu, ktorá má rovnicu

$$x^2 - y^2 + 4z = 0. \tag{34}$$

Riešenie. Zhodnosťou $x' = -y$, $y' = x$, $z' = z$ z rovnice (34) dostaneme

$$x'^2 - y'^2 = 4z',$$

čo je podľa (17) rovnica hyperbolického paraboloidu.

Túto plochu budeme ďalej vyšetrovať pomocou rezov danej plochy s rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami.

a) Majme rovinu $z = h$, kde h je ľubovoľné reálne číslo. Rovnica rezu tejto roviny s plochou (34) je

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 4z &= 0 \\ z &= h. \end{aligned} \tag{35}$$

V rovine $z = h$ rez má rovnicu, ktorú dostaneme vylúčením neznámej z z prvej rovnice (35):

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -4h \\ z &= h. \end{aligned} \tag{36}$$

Ak $h > 0$, potom rovnica (36) je rovnica rovnoosových hyperbol v rovine $z = h$, ktorých hlavná os je rovnobežná s osou o_y a s polosami $2\sqrt{h}$.

Ak $h = 0$, potom rovnica (36) je rovnica dvojice priamok $y = x$, $y = -x$ v rovine R_{xy}.

Ak $h < 0$, potom rovnica (36) je rovnicou rovnoosových hyperbol v rovine $z = h$, ktorých hlavná os je rovnobežná s osou o_x a ich polosi sú $2\sqrt{-h}$.

b) Majme roviny $y = h$, kde h je ľubovoľné reálne číslo. Rovnica rezu tejto roviny a plochy (34) je

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 4z &= 0 \\ y &= h. \end{aligned} \tag{37}$$

V rovine $y = h$ má rez rovnicu, ktorú dostaneme vylúčením neznámej y z prvej rovnice (37):

$$x^2 + 4z = h^2 \quad y = h,$$

čiže

$$x^2 = -4(z - h^2/4) \quad y = h. \tag{38}$$

Rovnice (38) sú rovnice parabol s parametrom $p = 2$. Ich vrcholy ležia v rovine R_{yz} na parabole $y^2 = 4z$ a ich osi sú nesúhlasne rovnobežné s osou o_z *(obr. 78)*.

c) Majme rovinu $x = h$, kde h je ľubovoľné reálne číslo. Rovnica rezu plochy (34) a tejto roviny je

$$x^2 - y^2 + 4z = 0 \quad x = h. \tag{39}$$

V rovine $x = h$ má rez rovnicu, ktorú dostaneme vylúčením neznámej x z prvej rovnice (39):

$$h^2 - y^2 + 4z = 0 \quad x = h,$$

čiže

$$y^2 = 4(z + h^2/4) \quad x = h. \tag{40}$$

Rovnice (40) sú rovnicami parabol s parametrom $p = 2$. Ich vrcholy ležia v rovine R_{zx} na parabole $x^2 = -4z$ a ich osi sú súhlasne rovnobežné s osou o_z.

Príklad 6. Nájdime rovnicu dotykovej roviny k rotačnému jednodielnemu hyperboloidu

$$x^2/16 + y^2/16 - z^2/9 = 1,$$

ktorá je rovnobežná s rovinou $3x - 3y + 4z - 5 = 0$.

Riešenie. Podľa (18) dotyková rovina k danému rotačnému jednodielnemu hyperboloidu je

$$\frac{x_0x}{16} + \frac{y_0y}{16} - \frac{z_0z}{9} = 1,$$

kde $M = (x_0, y_0, z_0)$ je dotykový bod.

Z podmienky rovnobežnosti oboch rovín vyplýva

$$\frac{x_0}{16} : \frac{y_0}{16} : \frac{-z_0}{9} = 3 : -3 : 4. \tag{41}$$

Bod M leží na danom hyperboloide, preto platí

$$x_0^2/16 + y_0^2/16 - z_0^2/9 = 1. \tag{42}$$

Zo vzťahu (41) dostaneme $x_0 = 4k$, $y_0 = -4k$, $z_0 = -3k$, kde k je ľubovoľné reálne číslo. Dosadením do vzorca (42) dostaneme pre k rovnicu

$$k^2 = 1.$$

Z toho $k_1 = 1$, $k_2 = -1$.

Pre $k_1 = 1$ máme dotykový bod $M_1 = (4, -4, -3)$ a dotyková rovina má rovnicu

$$3x - 3y + 4z - 12 = 0.$$

Pre $k_2 = -1$ máme dotykový bod $M_2 = (-4, 4, 3)$ a rovnica dotykovej roviny je

$$3x - 3y + 4z + 12 = 0.$$

1144. Nájdite rovnicu guľovej plochy, ak

a) jej stred je $S = (4, -2, 7)$ a polomer $r = 8$;
b) jej stred je $S = (-1, 2, -5)$ a prechádza počiatkom;
c) jej stred je $S = (5, -6, 3)$ a prechádza bodom $A = (7, -3, 9)$;
d) koncové body jedného jej priemeru sú $A = (3, -5, 2)$, $B = (9, 7, 6)$;
e) jej stred je $S = (-1, 3, 4)$ a dotyková rovina je $3x + 6y + 2z + 12 = 0$,
f) prechádza troma bodmi $A = (4, -1, 0)$, $B = (-1, 2, 4)$ a $C = (-4, -2, 3)$ a jej stred leží v rovine $2x + y - z + 6 = 0$;
g) prechádza štyrmi bodmi $A = (2, -4, 2)$, $B = (-4, 8, -2)$, $C = (5, -1, 14)$ a $D = (-7, -4, 5)$;
h) jej stred je $S = (-7, 3, 4)$ a dotýka sa osi o_y.

1145. Napíšte rovnicu guľovej plochy opísanej štvorstenu s vrcholmi $O = (0, 0, 0)$, $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$, $C = (0, 0, 3)$ a nájdite jej stred a polomer.

1146. Nájdite rovnicu guľovej plochy, ktorá

a) má polomer $r = 5$ a dotýka sa roviny $3x - 6y + 2z - 12 = 0$ v bode $M = (2, 1, 6)$;
b) dotýka sa rovín $2x + 2y + z - 12 = 0$, $2x + 2y + z + 18 = 0$, pričom bod dotyku je $M = (2, -2, 12)$;
c) dotýka sa rovín $2x - y - 2z + 2 = 0$, $2x - y - 2z - 4 = 0$ a jej stred leží na priamke $\begin{aligned} x + 4y + 5z - 14 &= 0 \\ x - 2y - 4z + 7 &= 0. \end{aligned}$

1147. Nájdite rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred $S = (4, -2, 3)$ a na priamke

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{3}$$

vytína tetivu dĺžky 12.

1148. Nájdite stred a polomer guľovej plochy, ak jej rovnica je:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$;
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 5 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 11 = 0$;
d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 4z - 15 = 0$;
e) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 24y - 16z - 25 = 0$.

1149. Zistite, aká je vzájomná poloha priamky a guľovej plochy, ak ich rovnice sú:

a) $\dfrac{x+5}{7} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-8}{-3}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2x - 4z + 16 = 0$;

b) $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-2}{1}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 34 = 0$;

c) $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-4}$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 + 28x - 22y + 24z - 164 = 0$.

1150. Zistite aká je vzájomná poloha guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 144$ a roviny

a) $2x + 3y - z + 6 = 0$; c) $x + y + z - 30 = 0$.
b) $2x + 2y + z - 36 = 0$;

1151. Nájdite stred a polomer kružnice, ktora je rezom guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 14y + 2z + 30 = 0$ s rovinou $3x + y - z - 4 = 0$.

1152. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza:

a) bodmi $A = (4, 1, 1)$, $B = (2, 3, 1)$ a $C = (0, 5, 3)$;

b) bodom $A = (1, 1, -4)$ a koncové body jedného jej priemeru sú $B = (-3, -1, 6)$, $C = (5, 3, -2)$.

1153. Nájdite rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza:

a) počiatkom a kružnicou $\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 16 \\ 3x - 2y + 6z - 8 &= 0; \end{aligned}$

b) kružnicou $\begin{aligned} x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 &= 25 \\ x - y - z - 1 &= 0, \end{aligned}$

a bodom $A = (2, 2, -2)$;

c) kružnicami $\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25 \\ z &= 3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 113 \\ z &= 7. \end{aligned}$

1154. Nájdite množinu všetkých bodov v priestore, ktoré majú od roviny R_{xz} vzdialenosť $d_1 = 5$ a od bodu $A = (3, 4, -2)$ vzdialenosť $d_2 = 3$.

1155. Napíšte rovnicu dotykových rovín ku guľovej ploche

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 36$$

a) v bode $M = (3, 1, 2)$;

b) v priesečníkoch tejto guľovej plochy s priamkou

$$\frac{x-9}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

1156. Nájdite rovnicu dotykovej roviny ku guľovej ploche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 8 = 0$$

v bodoch, v ktorých guľu pretína priamka $\begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ 2y + z - 1 &= 0. \end{aligned}$

1157. Nájdite rovnice dotykových rovín ku guľovej ploche

$$(x+3)^2 + (y-7)^2 + (z+4)^2 = 49,$$

ktoré sú rovnobežné:

a) s rovinou $2x - 6y + 3z - 5 = 0$;

b) s priamkami $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$, $\quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+1}{6}$.

1158. Napíšte rovnice dotykových rovín ku guľovej ploche $\mathbf{r}^2 = a^2$ rovnobežných s rovinou $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + d = 0$.

1159. Nájdite priesečníky guľovej plochy $(X - S)^2 = r^2$ s priamkou $X = S + \mathbf{a}t$.

1160. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorej vrchol je v počiatku, ak určujúca krivka má rovnice:

a) $x^2 + y^2 = 16$, $\quad z = 3$; $\qquad$ c) $y^2/16 + z^2/8 = 1$, $\quad x = -1$;

b) $x^2/9 + y^2/4 = 1$, $\quad z = 1$; $\qquad$ d) $y^2 = 2x - 1$, $\quad x - z - 1 = 0$.

1161. Nájdite rovnicu rotačnej kužeľovej plochy, ak

a) jej os je o_x, prechádza bodom $M = (6, 8, -3)$ a vytvárajúce priamky zvierajú s jej osou uhol 45°.

b) jej os je o_z a vytvárajúce priamky prechádzajú počiatkom a zvierajú s touto osou uhol 45°;

c) osi o_x, o_y, o_z sú jej povrchové priamky.

1162. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorá má:

a) vrchol $V = (0, 5, 0)$ a dotýka sa guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;

b) vrchol $V = (0, 0, 0)$ a dotýka sa guľovej plochy $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$.

1163. Napíšte rovnice kužeľových plôch opísaných guľovým plochám $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, $x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 1$.

1164. Zistite, akú množinu predstavuje rovnica $x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 6kx + 30kz + 84k^2 = 0$, kde k je ľubovoľné číslo.

1165. Napíšte rovnicu valcovej plochy, ak

a) určujúca krivka je $x^2 + y^2 = 16$, $z = 2$ a os valca je určená vektorom $\boldsymbol{a} = \{1, 2, 3\}$;

b) určujúca krivka je $y^2 = 2x$, $z = 0$ a povrchové priamky sú rovnobežné s priamkou $\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 0}{3}$;

c) určujúca krivka je $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$ a povrchové priamky zvierajú so súradnicovými osami rovnaké uhly.

1166. Nájdite rovnicu rotačnej valcovej plochy, ak

a) prechádza bodom $A = (4, 1, 8)$ a jej os je určená priamkou $(x - 1) : (y - 1) : (z + 1) = 1 : 0 : 1$;

b) jej povrchové priamky sú kolmé na rovinu $2x - y - z + 11 = 0$ a dotýkajú sa guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

1167. Nájdite rovnicu valcovej plochy opísanej guľovým plochám $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

1168. Nájdite množinu bodov v priestore, ktorá má rovnicu:

a) $x^2 + y^2 = 16$;
b) $x^2/16 - z^2/9 = 1$;
c) $y^2 = 6x$;
d) $x^2 - y^2 = 0$;
e) $x^2 + y^2 + 8 = 0$;
f) $x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0$.

1169. Nájdite rovnicu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou:

a) krivky $x^2/9 + y^2 = 1$ okolo osi o_x;
b) krivky $x^2/9 + y^2 = 1$ okolo osi o_y;
c) krivky $x^2 - z^2 = 9$ okolo osi o_z;
d) krivky $x^2 - z^2 = 9$ okolo osi o_x;
e) krivky $z^2 = 4x$ okolo osi o_x;
f) krivky $y + x = 0$ okolo osi o_x.

1170. Zistite, aká množina bodov je daná rovnicou:

a) $x^2/16 + y^2/16 + z^2/9 = a$;
b) $x^2/16 + y^2/4 + z^2/4 = a$;
c) $x^2/25 + y^2/16 + z^2/9 = a$,

kde a je ľubovoľné kladné číslo.

1171. Napíšte rovnicu rezu elipsoidu $x^2/25 + y^2/16 + z^2/9 = 1$ rovinou:

a) R_{xy};
b) R_{yz};
c) R_{xz};
d) $z = 5$;
e) $x = 5$;
f) $y = 5$.

1172. Trojosovému elipsoidu je opísaný kváder tak, že dotykovými bodmi sú vrcholy elipsoidu. Vypočítajte dĺžku tej časti telesovej uhlopriečky kvádra, ktorá leží vo vnútri elipsoidu.

1173. Ukážte, že všetky rovinné rezy trojosového elipsoidu sú elipsy alebo kružnice.

1174. Napíšte rovnicu elipsoidu s osami $2a$, $2b$, $2c$, ak jeho stred je $S = (x_0, y_0, z_0)$.

1175. Ktorá množina bodov je daná rovnicami:

a) $x^2 + y^2 + 4az = 0$; c) $3x^2 - 3y^2 + k^2z = 0$,
b) $16x^2 + 16y^2 - 8kz - k^2 = 0$;

kde a a k sú ľubovoľné čísla.

1176. Napíšte rovnicu rezu hyperboloidu $x^2/25 + y^2/16 - z^2/9 = 1$ rovinou:

a) $x = 3$; d) $y = 4$;
b) $x = -5$; e) $z = 3$.
c) $y = -5$;

1177. Napíšte rovnice povrchových priamok hyperboloidu $x^2/9 - y^2/4 - z^2/4 = -1$, ktoré prechádzajú bodom $M = (-6, 2, 4)$.

1178. Zistite, aká plocha je daná rovnicou $2x^2 + y^2 + 20x - z^2 + 34 = 0$.

1179. Zistite, akú množinu bodov určuje rovnica $3x^2 + 5y^2 - 3z^2 + 15k^2 = 0$, $k \neq 0$.

1180. Dokážte, že rez jednodielneho rotačného hyperboloidu rovinou, ktorá je rovnobežná s osou rotácie vo vzdialenosti rovnej polomeru „hrdla" hyperboloidu, je dvojica priamok.

1181. Nájdite kužeľosečku, v ktorej daná rovina pretína hyperbolický paraboloid $x^2/12 - y^2/9 = 4z$, ak rovnica roviny je:

a) $x + 4 = 0$; d) $x - y = 0$;
b) $y - 1 = 0$; e) $z - 1 = 0$;
c) $z = 0$; f) $z + 1 = 0$.

1182. Metódou rezov znázornite plochu, ktorá má rovnicu:

a) $z^2 = x^2/9 + y^2/16$; b) $z = x^2/18 - y^2/50$.

1183. Dokážte, že rovina $2x + y - 3 = 0$ pretína hyperbolický paraboloid $4x^2 - y^2 + z = 0$ v priamke.

1184. Dokážte, že rovina $5x + 2y - z - 10 = 0$ pretína hyperbolický paraboloid $z = xy$ v dvoch priamkach.

1185. Napíšte rovnice priemetov rezu do súradnicových rovín:

a) kvadratickej plochy $z = x^2 - y^2$ rovinou $x + y + z - 1 = 0$;
b) kvadratickej plochy $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$ rovinou $3x + 2y + z = 0$.

1186. Nájdite kužeľosečku, v ktorej pretína:

a) rovina $x + z - 1 = 0$ kvadratickú plochu $x^2/3 - y^2/4 = 2z$;
b) rovina $4x - 3y - z = 0$ kvadratickú plochu $x^2/16 - y^2/9 - z^2/25 = 1$;
c) rovina $x - 3y + z - 1 = 0$ kvadratickú plochu $x^2/12 + y^2/8 + z^2/3 = 1$.

1187. Napíšte rovnicu dotykovej roviny k dvojdielnemu hyperboloidu $x^2/25 - y^2/16 - z^2/25 = 1$ v bode $A = (15, -8, -10)$.

1188. Nájdite dotykovú rovinu k elipsoidu $x^2/81 + y^2/25 + z^2/36 = 1$, ak

a) bod dotyku je $M = (6, 5/3, 4)$;
b) dotyková rovina je rovnobežná s rovinou $25x + 18y + 105z = 0$.

1189. Nájdite priesečník P danej kvadratickej plochy a priamky, ak ich rovnice sú:

a) $x^2/36 + y^2/32 + z^2/16 = 1, \quad \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-8}{-4} = \dfrac{z-4}{-2}$;

b) $x^2/81 - y^2/9 + z^2/25 = 1, \quad \frac{x-27}{9} = \frac{y+3}{-9} = \frac{z+15}{-20}$;

c) $x^2/8 - y^2/5 = z, \quad \frac{x}{4} = \frac{y-10}{-5} = \frac{z+14}{11}$.

1190. Nájdite rovnicu tetivy elipsoidu $x^2/25 + y^2/16 + z^2/9 = 1$, ktorá leží v rovine $x = 2$ a jej stred je v bode $S = (2, 1, -1)$.

1191. Napíšte rovnicu dotykovej roviny k paraboloidu $z = x^2/4 + y^2/12$, ktorá je rovnobežná s rovinou $x - y + 2z + 2 = 0$.

1192. Nájdite dotykovú rovinu a normálu ku kužeľovej ploche $x^2/3 + y^2/4 - z^2 = 0$ v bode $A = (6, -4, -4)$.

1193. Nájdite dotykové roviny k jednodielnemu hyperboloidu danému rovnicou $x^2/9 + y^2/36 - z^2/4 = 1$, ktoré prechádzajú priamkou:

a) $\frac{x+9}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$; b) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z+2}{-4}$.

4,21. Všeobecná rovnica kvadratickej plochy

Kvadratická rovnica s neznámymi x, y z má všeobecný tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{1}$$

pričom a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ sú čísla a aspoň jedno z čísel $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ nerovná sa nule.

Rovnica (1) v pravouhlom súradnicovom systéme môže byť rovnicou:

1. *kvadratickej plochy* (guľovej plochy, elipsoidu, hyperboloidu, kužeľovej plochy, hyperboloidu, valcovej plochy),
2. *dvojice rovín* alebo *jednej roviny*,
3. *priamky*,
4. *bodu*,
5. *prázdnej množiny*.

Označme:

$$I_4 = D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix}^{*)}, \quad I_3 = D_{44} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13} \\ a_{31}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$S_3 = D_{33} + D_{22} + D_{11} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{24} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{31}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix},$$

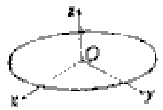
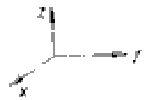
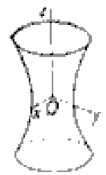
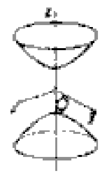
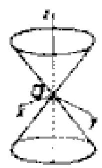
$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{14} \\ a_{41}, & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{24} \\ a_{42}, & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}, & a_{34} \\ a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Stred kvadratickej plochy. Ak kvadratická plocha daná rovnicou (1) má jediný stred súmernosti, nazývame ho *stredom kvadratickej plochy* a kvadratickú plochu nazývame stredovou.

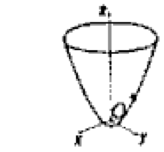
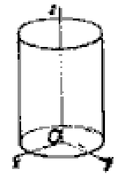
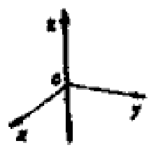
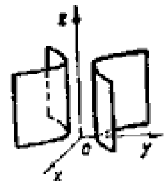
*) Platí $a_{ik} = a_{ki}$.

Tabuľka 6

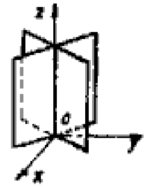
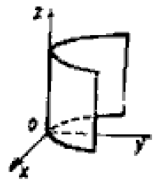
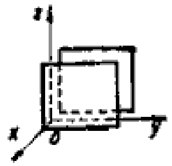
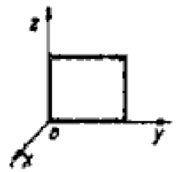
Určenie množiny bodov danej všeobecnou rovnicou (1) v pravouhlom súradnicovom systéme

Por. čís.	Hodnoty invariantov a semiinvariantov		Množina	Znázornenie	Rovnica (1) po transformácii	
1	$I_3 \neq 0$	$I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ $I_4 < 0$	elipsoid (guľová plocha)		$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \dfrac{I_4}{I_3} = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ $(a = b = c)$
2		$I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ $I_4 > 0$	prázdna množina			$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$
3		$I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ $I_4 = 0$	bod			$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$
4		$I_2 \leqq 0$ alebo $I_1 I_2 \leqq 0$ $I_4 > 0$	jednodielny hyperboloid			$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
5		$I_2 \leqq$ alebo $I_1 I_2 \leqq 0$ $I_4 < 0$	dvojdielny hyperboloid			$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$
6		$I_2 \leqq$ alebo $I_1 I_2 \leqq 0$ $I_4 = 0$	kužeľová plocha			$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

Pokračovanie tab. 6

7	$I_3 = 0$, $I_4 \neq 0$	$I_4 < 0$	eliptický paraboloid		$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}\,z = 0$	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$
8		$I_4 > 0$	hyperbolický paraboloid			$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$
9	$I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$, $I_4 = 0$	$I_2 > 0,\ I_1 S_3 < 0$	eliptická valcová plocha		$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{S_3}{I_2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
10		$I_2 > 0,\ I_1 S_3 > 0$	prázdna množina			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$
11		$I_2 > 0,\ S_3 = 0$	priamka			$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
12		$I_2 < 0,\ S_3 \neq 0$	hyperbolická valcová plocha			$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Pokračovanie tab. 6

Por. čís.	Hodnoty invariantov a semiinvariantov		Množina	Znázornenie	Rovnica (1) po transformácii	
13	$I_2 \neq 0$ $I_3 = 0$ $I_4 = 0$	$I_2 < 0,\ S_3 = 0$	dve rôznobežné roviny		$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$
14	$I_3 = 0,\ I_4 = 0$ $I_2 = 0,\ S_3 \neq 0$		parabolická valcová plocha		$\lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{S_3}{I_1}}\, y = 0$	$x^2 - 2py = 0$
15		$S_2 < 0$	dve rovnobežné roviny			$x^2 - a^2 = 0$
16	$I_3 = 0\ \ I_4 = 0$ $I_2 = 0,\ S_3 = 0$	$S_2 > 0$	prázdna množina		$\lambda_1 x^2 + \dfrac{S_3}{I_1} = 0$	$x^2 + a^2 = 0$
17		$S_2 = 0$	jedna rovina			$x^2 = 0$

Pre stred súmernosti množiny určenej rovnicou (1) platí

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pri riešení systému (2) môžu nastať tieto prípady:

a) Systém (2) má jediné riešenie, ak $D_{44} \neq 0$. V tomto prípade rovnica (1) môže byť rovnicou guľovej plochy, elipsoidu, hyperboloidu, kužeľovej plochy, bodu a prázdnej množiny.

b) Systém (2) nemá riešenie; potom rovnica (1) môže byť rovnicou eliptického alebo hyperbolického paraboloidu alebo parabolického valca.

c) Systém (2) má nekonečno mnoho riešení; potom rovnica (1) môže byť rovnicou eliptického alebo hyperbolického valca, alebo ak $D_{44} = 0$ a hodnosť matice prislúchajúcej k determinantu D sa rovná 2 alebo 1, potom ľavú stranu rovnice (1) možno vyjadriť ako súčin dvoch lineárnych činiteľov premenných x, y, z. V tomto prípade rovnica (1) môže byť rovnicou dvoch rôznobežných rovín alebo dvoch rovnobežných rovín, jednej roviny, priamky alebo prázdnej množiny.

Ak systém (2) má jediné riešenie (m, n, p), potom rovnicu (1) možno upraviť posunutím

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + m \\ y &= y' + n \\ z &= z' + p \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

na tvar

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{13}x'z' + a'_{44} = 0, \tag{4}$$

pričom $a'_{44} = a_{14}m + a_{24}n + a_{34}p + a_{44} = \dfrac{D}{D_{44}}$.

Osi kvadratickej plochy. Vhodným otočením súradnicového systému možno previesť rovnicu (1) na tvar

$$\bar{a}_{11}\bar{x}^2 + \bar{a}_{22}\bar{y}^2 + \bar{a}_{33}\bar{z}^2 + 2\bar{a}_{14}\bar{x} + 2\bar{a}_{24}\bar{y} + 2\bar{a}_{34}\bar{z} + \bar{a}_{44} = 0. \tag{5}$$

Smerové čísla l, m, n jednotkových vektorov $\overline{\mathbf{i}}, \overline{\mathbf{j}}, \overline{\mathbf{k}}$ tohto otočenia, ktoré udávajú smer osí kvadratickej plochy, nájdeme zo systému rovníc

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\, l + a_{12}m + a_{13}n &= 0 \\ a_{21}l + (a_{22} - \lambda)\, m + a_{23}n &= 0 \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

kde λ je koreň charakteristickej rovnice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

alebo

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \tag{8}$$

Korene λ_1, λ_2, λ_3 charakteristickej rovnice sú vždy reálne.

V prípade, že ide o rotačnú kvadratickú plochu, smerové čísla rotačnej osi odpovedajú smerovým číslam určeným z rovníc (6) pre jednoduchý koreň rovnice (7).

Rovnice hľadaného otočenia potom sú

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathbf{i} \,.\, \overline{\mathbf{i}x} + \mathbf{i} \,.\, \overline{\mathbf{j}y} + \mathbf{i} \,.\, \overline{\mathbf{k}z} \\ y &= \mathbf{j} \,.\, \overline{\mathbf{i}x} + \mathbf{j} \,.\, \overline{\mathbf{j}y} + \mathbf{j} \,.\, \overline{\mathbf{k}z} \\ z &= \mathbf{k} \,.\, \overline{\mathbf{i}x} + \mathbf{k} \,.\, \overline{\mathbf{j}y} + \mathbf{k} \,.\, \overline{\mathbf{k}z}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Otočením (9) a vhodným posunutím možno vždy previesť rovnicu (1) kvadratickej plochy na jej kánonický tvar.

Kánonické rovnice kvadratických plôch, prípadne rovnice množín určených rovnicou (1) môžeme dostať aj bez uvedeného otočenia a posunutia, a to pomocou čísel D, D_{44}, I_2, I_1 (invariantov), S_3, S_2 (semiinvariantov) a pomocou koreňov charakteristickej rovnice λ_1, λ_2, λ_3 podľa *tab. 6*. Údaje v druhom a treťom stĺpci *tab. 6* sú nutné a postačujúce podmienky pre množinu uvedenú v štvrtom stĺpci.

Dotyková rovina ku kvadratickej ploche danej rovnicou (1) v bode $A = (x_0, y_0, z_0)$ má rovnicu

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})\,x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})\,y + \\ + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})\,z + a_{14}x_0 + a_{24}y_0 + a_{34}z_0 + a_{44} = 0. \qquad (10)$$

Príklad 1. Zjednodušme vhodnými transformáciami rovnicu $6x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xz - 4yz + 4x + 4y + 6z - 27 = 0$ a nájdime množinu danú touto rovnicou.

Riešenie. Hľadajme stred súmernosti danej množiny. Pre stred $S = (m, n, p)$ podľa (2) platí

$$\left.\begin{aligned} 6m \phantom{{}-2n} + 2p + 2 &= 0\\ 4n - 2p + 2 &= 0\\ 2m - 2n + 5p + 3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Keďže

$$D_{44} = \begin{vmatrix} 6, & 0, & 2\\ 0, & 4, & -2\\ 2, & -2, & 5 \end{vmatrix} = 80 \neq 0,$$

má množina stred, ktorý nájdeme riešením (11). Dostaneme $m = 0$, $n = -1$, $p = -1$ a $S = (0, -1, -1)$. Posunutím podľa (3)

$$\begin{aligned} x &= x'\\ y &= y' - 1\\ z &= z' - 1, \end{aligned}$$

prejde rovnica danej množiny na tvar

$$6x'^2 + 4y'^2 + 5z'^2 + 4x'z' - 4y'z' - 32 = 0. \qquad (12)$$

Ďalšie zjednodušenie dosiahneme otočením súradnicového systému okolo bodu $O' = S$. Aby sme určili transformačné rovnice otočenia, zostavme charakteristickú rovnicu

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda, & 0, & 2\\ 0, & 4 - \lambda & -2\\ 2, & -2, & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 66\lambda - 80 = 0.$$

Korene tejto rovnice sú $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$.

Smerové vektory $\{l_1, m_1, n_1\}$, $\{l_2, m_2, n_2\}$, $\{l_3, m_3, n_3\}$ nových súradnicových osí $o_{\bar{x}}$, $o_{\bar{y}}$, $o_{\bar{z}}$ určíme podľa (6) zo systému

$$\left.\begin{aligned} (6 - \lambda)\,l \phantom{{}+(4-\lambda)m} + 2n &= 0\\ (4 - \lambda)\,m - 2n &= 0\\ 2l - 2m + (5 - \lambda)\,n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Ak položíme v systéme (13) $\lambda = \lambda_1 = 2$, dostaneme pre $\{l_1, m_1, n_1\}$:

$$\begin{aligned} 4l_1 \phantom{{}-2m_1} + 2n_1 &= 0\\ 2m_1 - 2n_1 &= 0\\ 2l_1 - 2m_1 + 3n_1 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie tohto systému rovníc je $(k, -2k, -2k)$, kde k je ľubovoľné číslo. Zvoľme k tak, aby vektor $\{l_1, m_1, n_1\}$ bol jednotkový, t. j.

$$m_1^2 + n_1^2 + l_1^2 = 1.$$

Z toho máme

$$k^2 + 4k^2 + 4k^2 = 1,$$

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{3}.$$

Položme $k = 1/3$, dostaneme $\bar{l} = \{1/3, -2/3, -2/3\}$.

Podobne dostaneme pre $\lambda = \lambda_2 = 5$ zo systému (13) systém

$$\begin{aligned} l_2 \phantom{{}-m_2} + 2n_2 &= 0\\ -m_2 - 2n_2 &= 0\\ 2l_2 - 2m_2 \phantom{{}-2n_2} &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie tohto systému je $(2k, 2k, -k)$, kde k je ľubovoľné číslo. Zvoľme k tak, aby vektor $\{l_2, m_2, n_2\}$ bol jednotkový, t. j.

$$4k^2 + 4k^2 + k^2 = 1,$$

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{3}.$$

Položme $k = -1/3$, máme $\bar{j} = \{-2/3, -2/3, 1/3\}$.

Napokon dostaneme pre $\lambda = \lambda_3 = 8$ zo systému (13) systém

$$\begin{aligned} -2l_3 \qquad\quad &+ 2n_3 = 0 \\ -4m_3 &- 2n_3 = 0 \\ -2l_3 - 2m_3 &- 3n_3 = 0. \end{aligned}$$

Riešenie tohto systému je $(2k, -k, 2k)$, kde k je ľubovoľné číslo. Zvoľme k tak, aby vektor $\{l_3, m_3, n_3\}$ bol jednotkový, máme

$$4k^2 + k^2 + 4k^2 = 1,$$

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{3}.$$

Položme $k = -1/3$, dostaneme $\bar{k} = \{-2/3, 1/3, -2/3\}$.

Podľa (9) rovnice otočenia sú

$$x' = \frac{1}{3}\bar{x} - \frac{2}{3}\bar{y} - \frac{2}{3}\bar{z}$$

$$y' = -\frac{2}{3}\bar{x} - \frac{2}{3}\bar{y} + \frac{1}{3}\bar{z}$$

$$z' = -\frac{2}{3}\bar{x} + \frac{1}{3}\bar{y} - \frac{2}{3}\bar{z}.$$

a po dosadení do rovnice (12) a jednoduchých úpravách dostaneme

$$\frac{6}{9}(\bar{x} - 2\bar{y} - 2\bar{z})^2 + \frac{4}{9}(-2\bar{x} - 2\bar{y} + \bar{z})^2 + \frac{5}{9}(-2\bar{x} + \bar{y} - 2\bar{z})^2 +$$

$$+ \frac{4}{9}(\bar{x} - 2\bar{y} - 2\bar{z})(-2\bar{x} + \bar{y} - 2\bar{z}) - \frac{4}{9}(-2\bar{x} - 2\bar{y} + \bar{z})(-2\bar{x} + \bar{y} - 2\bar{z}) - 32 = 0,$$

čiže

$$18\bar{x}^2 + 45\bar{y}^2 + 72\bar{z}^2 - 288 = 0,$$

alebo

$$2\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 + 8\bar{z}^2 - 32 = 0.$$

(Poznamenajme, že poslednú rovnicu sme mohli napísať priamo podľa *tab. 6.*)

Z poslednej rovnice je

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{6,4} + \frac{\bar{z}^2}{4} = 1.$$

Hľadaná množina je trojosový elipsoid so stredom $S = (0, -1, -1)$, dĺžkami polosí $a = 4$, $b = 4\sqrt{2/5}$, $c = 2$. Rovnice osí sú

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-2},$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1},$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Príklad 2. Vhodnými transformáciami zjednodušme rovnicu

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy + 4yz - 4xz + 10x - 10y - 13z + 5 = 0 \tag{14}$$

a nájdime množinu danú touto rovnicou.

Riešenie. Hľadajme stred súmernosti danej množiny. Pre stred $S = (m, n, p)$ podľa (2) platí

$$\left.\begin{aligned} 5m + 4n - 2p + 5 &= 0 \\ 4m + 5n + 2p - 3 &= 0 \\ -2m + 2n + 8p - 13/2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Keďže

$$D_{44} = \begin{vmatrix} 5, & 4, & -2 \\ 4, & 5, & 2 \\ -2, & 2, & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{a} \quad D_{\alpha} = \begin{vmatrix} -5, & 4, & -2 \\ 3, & 5, & 2 \\ 13/2, & 2, & 8 \end{vmatrix} = -161 \neq 0,$$

systém (15) nemá riešenie, t. j. daná množina nemá stred. Hľadajme preto také otočenie, aby z rovnice (14) vypadli členy obsahujúce xy, xz, yz. Napíšme charakteristickú rovnicu

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda, & 4, & -2, \\ 4, & 5 - \lambda, & 2 \\ -2, & 2, & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 81\lambda = 0.$$

Korene tejto rovnice sú $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 0$. Smerové vektory $\{l_1, m_1, n_1\}$, $\{l_2, m_2, n_2\}$, $\{l_3, m_3, n_3\}$ nových súradnicových osí určíme zo systému

$$\left.\begin{aligned} (5 - \lambda)\, l + 4m - 2n &= 0 \\ 4l + (5 - \lambda)\, m + 2n &= 0 \\ -2l + 2m + (8 - \lambda)\, n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Pre $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 9$ dostaneme systém

$$\left.\begin{aligned} -4l + 4m - 2n &= 0 \\ 4l - 4m + 2n &= 0 \\ -2l + 2m - n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Riešenie tohto systému rovníc je $(u - v/2, u, v)$, kde u, v sú ľubovoľné čísla. Voľme čísla u, v tak, aby riešenia odpovedajúce λ_1, λ_2 spĺňali podmienku kolmosti

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Nech $u_1 = 1$, $v_1 = -2$, potom jednotkový vektor $\overline{i} = \{2/3, 1/3, -2/3\}$. Pre u_2, v_2 máme podmienku

$$2\left(u_2 - \frac{v_2}{2}\right) + 1 \, . \, u_2 - 2v_2 = 0,$$

čiže

$$u_2 - v_2 = 0.$$

Zvoľme $u_2 = 2$, potom $v_2 = 2$ a jednotkový vektor $\overline{j} = \{1/3, 2/3, 2/3\}$. Rovnosť $\lambda_1 = \lambda_2$ zodpovedá prípadu rotačnej plochy.

Pre $\lambda_3 = 0$ dostaneme zo (16) systém

$$\begin{aligned} 5l + 4m - 2n &= 0 \\ 4l + 5m + 2n &= 0 \\ -2l + 2m + 8n &= 0. \end{aligned}$$

Jeho riešenie je $(2k, -2k, k)$, kde k je ľubovoľné číslo. Položme $k = -1/3$, potom jednotkový vektor $\overline{\mathbf{k}} = (-2/3, 2/3, -1/3)$. Hľadané otočenie je

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}\bar{x} + \frac{1}{3}\bar{y} - \frac{2}{3}\bar{z} \\ y &= \frac{1}{3}\bar{x} + \frac{2}{3}\bar{y} + \frac{2}{3}\bar{z} \\ z &= -\frac{2}{3}\bar{x} + \frac{2}{3}\bar{y} - \frac{1}{3}\bar{z}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Po dosadení do rovnice (14) a jednoduchých úpravách dostaneme

$$9\bar{x}^2 + 9\bar{y}^2 + 12\bar{x} - 12\bar{y} - 9\bar{z} + 5 = 0,$$

$$9\left(\bar{x}^2 + \frac{4}{3}\bar{x} + \frac{4}{9}\right) + 9\left(\bar{y}^2 - \frac{4}{3}\bar{y} + \frac{4}{9}\right) - 9\bar{z} = -5 + 4 + 4,$$

$$\left(\bar{x} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\bar{y} - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\bar{z} + \frac{1}{3}\right).$$

Posunutím

$$\left.\begin{aligned} X &= \bar{x} + \frac{2}{3} \\ Y &= \bar{y} - \frac{2}{3} \\ Z &= \bar{z} + \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

dostaneme rovnicu

$$X^2 + Y^2 = Z,$$

čo je rovnica rotačného paraboloidu. Jeho vrchol v tomto súradnicovom systéme je $V = (0, 0, 0)$, čiže v predchádzajúcom súradnicovom systéme je $V = (-2/3, 2/3, -1/3)$ a v pôvodnom súradnicovom systéme je $V = (0, 0, 2)$ ako to vyplýva z rovníc (19) a (18). Rotačná os tohto paraboloidu je určená vrcholom V a vektorom $\overline{\mathbf{k}}$ a jej rovnice v pôvodnom súradnicovom systéme sú

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Príklad 3. Nájdime množinu bodov, ktorej rovnica je

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

Riešenie. Vypočítajme I_1, I_2, I_3, I_4:

$$I_1 = 1 + 5 + 1 = 7, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5, & 1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 3 \\ 1, & 5, & 1 \\ 3, & 1, & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0, \qquad I_4 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 3, & -1 \\ 1, & 5, & 1, & 3 \\ 3, & 1, & 1, & 1 \\ -1, & 3, & 1, & 0 \end{vmatrix} = 36 > 0.$$

Keďže $I_1 I_3 < 0$, $I_4 > 0$, daná rovnica je rovnicou jednodielneho hyperboloidu. Charakteristická rovnica podľa (8) je

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 - 36 = 0$$

a jej korene sú $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$. Podľa *tab. 6* kánonická rovnica je

$$3X^2 + 6Y^2 - 2Z^2 + \frac{36}{-36} = 0,$$

čiže

$$\frac{X^2}{(1/\sqrt{3})^2} + \frac{Y^2}{(1/\sqrt{6})^2} - \frac{Z^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1.$$

Súradnice stredu jednodielného hypreboloidu nájdeme podľa (2) riešením systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} m + n + 3p - 1 &= 0 \\ m + 5n + p + 3 &= 0 \\ 3m + n + p + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Jeho riešením je trojica $(-1/3, -2/3, 2/3)$. Stred jednodielneho hyperboloidu je teda $S = (-1/3, -2/3, 2/3)$.

Pre smerový vektor $\{l_1, m_1, n_1\}$ hlavnej osi elipsy, v ktorej pretína rovina $Z = 0$ jednodielny hyperboloid („hrdlo" jednodielneho hyperboloidu), platí podľa (6)

$$\begin{aligned} (1-3)\,l_1 + m_1 + 3\,n_1 &= 0 \\ l_1 + (5-3)\,m_1 + n_1 &= 0 \\ 3l_1 + m_1 + (1-3)\,n_1 &= 0. \end{aligned}$$

Z toho $\{l_1, m_1, n_1\} = \{1, -1, 1\}$. Pre smerový vektor vedľajšej osi $\{l_2, m_2, n_2\}$ tejto elipsy platí podľa (6)

$$\begin{aligned} (1-6)\,l_2 + m_2 + 3n_2 &= 0 \\ l_2 + (5-6)\,m_2 + n_2 &= 0 \\ l_2 + m_2 + (1-6)\,n_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z toho $\{l_2, m_2, n_2\} = \{1, 2, 1\}$. Smerový vektor $\{l_3, m_3, n_3\}$ osi jednodielneho hyperboloidu nájdeme zo systému (6)

$$\begin{aligned} (1+2)\,l_3 + m_3 + 3n_3 &= 0 \\ l_3 + (5+2)\,m_3 + n_3 &= 0 \\ l_3 + m_3 + (1+2)\,n_3 &= 0. \end{aligned}$$

Z toho $\{l_3, m_3, n_3\} = \{1, 0, 1\}$. Rovnice osí jednodielneho hyperboloidu sú

$$\frac{x + 1/3}{1} = \frac{y + 2/3}{-1} = \frac{z - 2/3}{1},$$

$$\frac{x + 1/3}{1} = \frac{y + 2/3}{2} = \frac{z - 2/3}{1},$$

$$(x + 1/3) : (y + 2/3) : (z - 2/3) = 1 : 0 : -1.$$

Príklad 4. Zistime, akú množinu predstavuje rovnica

$$x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 4x - 10y + 2z - 5 = 0.$$

Riešenie. Vypočítajme najprv invarianty a semiinvarianty rovnice (20).

$$I_1 = 1 + 0 + 0 = 1, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & 2 \\ 2, & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 2 \\ 1, & 2, & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad I_4 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & -2 \\ 1, & 0, & 2, & -5 \\ 1, & 2, & 0, & 1 \\ -2, & -5, & 1, & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 1, & 0, & -5 \\ -2, & -5, & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 1, & 0, & 1 \\ -2, & 1, & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & 2, & -5 \\ 2, & 0, & 1 \\ -5, & 1, & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Keďže $I_3 = I_4 = 0$, $I_2 < 0$, $S_3 = 0$, podľa *tab. 6* hľadaná rovnica udáva dvojicu nerovnobežných rovín. Aby sme našli rovnice týchto rovín rozložíme ľavú stranu rovnice (20) na lineárne činitele premenných x, y, z napr. takto: Najprv budeme riešiť rovnicu (20) ako kvadratickú rovnicu vzhľadom na x. Máme

$$x^2 + (2y + 2z - 4)\,x + 4yz - 10y + 2z - 5 = 0.$$

Z toho

$$x_{1,2} = \frac{-(2y + 2z - 4) \pm \sqrt{4y^2 + 4z^2 + 16 + 8yz - 16y - 16z - 16yz + 40y - 8z + 20}}{2}. \tag{21}$$

Diskriminant D tejto kvadratickej rovnice môžeme upraviť takto

$$D = 4y^2 + 4z^2 + 16 + 8yz - 16y - 16z - 16yz + 40y - 8z + 20 =$$
$$= 4[y^2 - 2y(z - 3) + (z - 3)^2] = 4[y - (z - 3)]^2.$$

Dosadením tohto do (21) máme

$$x_{1,2} = \frac{2(-y - z + 2) \pm 2[y - (z - 3)]}{2} = -y - z + 2 \pm (y - z + 3).$$

Z toho

$$x_1 = -2z + 5, \qquad x_2 = -2y - 1.$$

Danú rovnicu (20) môžeme teda upraviť na tvar $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, t. j. v našom prípade $(x + 2z - 5)(x + 2y - 1) = 0$. Z tohto dostaneme, že (20) je rovnicou dvoch rovín daných rovnicami

$$x + 2y - 1 = 0, \qquad x + 2z - 5 = 0.$$

1194. Porovnaním so všeobecnou rovnicou kvadratických plôch nájdite koeficienty $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{44}$, ak rovnica kvadratickej plochy je:

a) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$;
d) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 8x - 22y + 16z + 18 = 0$;
e) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$.

1195. Nájdite množinu bodov, ktorá má rovnicu:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 8z + 40 = 0$;
b) $5x^2 + 5y^2 - 5z^2 + 12y + 16z + 20 = 0$;
c) $x^2 - y^2 - z^2$;
d) $x^2/4 - y^2/4 + z^2/9 = 0$.

1196. Nájdite stred kvadratickej plochy, ak jej rovnica je:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$;
b) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 18z - 14 = 0$;
c) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 - 72x + 32y - 54z - 173 = 0$;
d) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

1197. Nájdite všeobecnú rovnicu kvadratickej plochy, ktorá má stred v bode $S = (x_0, y_0, z_0)$.

1198. Posunutie je dané obrazom $O' = (1, 3, -3)$ bodu O. Nájdite rovnicu množiny danej kvadratickou rovnicou:

a) $4x^2 + y^2 + 5z^2 - 4xy + 4yz - 2xz + 4x - 2y - 10z = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 6xy - 8yz + 10xz - 20y + 11 = 0$, pri tomto posunutí.

1199. Zistite, ako sa zmení rovnica kvadratickej plochy $x^2 - 14y^2 + 10z^2 - 4xy - 24yz + 6xz + 2x + 20y + 8z - 9 = 0$, ak posunieme pravouhlý súradnicový systém tak, aby jeho počiatok bol totožný so stredom kvadratickej plochy.

1200. Zistite, či množiny dané nasledujúcimi rovnicami majú stred a ak majú viac ako jeden stred, nájdite rovnicu množiny stredov:

a) $9x^2 + y^2 + 25z^2 + 6xy - 20yz - 30xz - 2y - 2z = 0$;
b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz + 12x - 8y - 4z - 5 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 2z^2 - 4xy + 6xz - 8y + 10z = 0$;
d) $9x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 6xy + 12yz - 36x + 12y = 0$.

1201. Nájdite vrcholy kvadratických plôch, ktorých rovnice sú:

a) $x^2 + 3y^2 - 6y - z + 1 = 0$;
b) $2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - z + 1 = 0$;
c) $x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;
d) $10x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 12xy + 8xz + 4x + 12y + 8z - 1 = 0$.

1202. Zistite, či rovnica $2x^2 + 4y^2 - z^2 - 8xy + 4x + 4z - 6 = 0$ je rovnicou kužeľovej plochy. Nájdite jej vrchol.

1203. Zistite, pri akej hodnote parametra a rovnica $x^2 + 3y^2 - 2ayz + 2xz - 2x - 8y - 2z - 3 = 0$ je rovnicou kužeľovej plochy.

1204. Nájdite číslo a tak, aby kužeľová plocha s rovnicou $x^2 + 2xy + az^2 = 0$ bola rotačná kužeľová plocha. Nájdite jej os rotácie.

1205. Nájdite parametre a, b tak, aby rovnica $x^2 - y^2 + 3z^2 - (ax + by)^2 - 1 = 0$ bola rovnicou rotačnej valcovej plochy.

1206. Zistite, ktoré z uvedených rovníc sú rovnicami valcovej plochy, kužeľovej plochy alebo dvoch rovín:

a) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy - 2xz + 5yz + 3x - 6y + 5z - 4 = 0$;
b) $x^2 - 4y^2 + 5xz - 3yz = 0$;
c) $x^2 + z^2 - 2x + 6z + 8 = 0$;
d) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 16 = 0$.

1207. Preveďte rovnicu $x^2 - z^2 + 4xy - 4yz + 4x - 6y + 2z + 8 = 0$ na kánonický tvar a napíšte transformačné rovnice.

1208. Vhodnými transformáciami posunutia a otočenia zistite tvar a polohu uvedených množín:

a) $5x^2 + 7y^2 - 6z^2 - 4xz - 4yz + 18x - 6y - 24z + 30 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 6z = 0$;
c) $x^2 + 5y^2 - z^2 + 6xy + 4yz + 6x + 2y + 4z - 8 = 0$.

1209. Zistite druh a polohu útvarov, ktorých rovnice sú:

a) $5x^2 - 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 2x + 10y - 4z + 4 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz + 14x - 14y - 4z + 16 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 2xy - z + 1 = 0$.

1210. Rozkladom na lineárne činitele nájdite množiny dané rovnicami:

a) $x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 5x - 7z - 6 = 0$;
b) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 9 = 0$;
c) $9x^2 + 25y^2 + 121z^2 - 30xy + 66xz - 110yz - 6x + 10y - 22z + 1 = 0$.

1211. Nájdite množinu bodov, ktorej rovnica je:

a) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xz - 4xy - 8yz = 0$;
b) $2x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 21 = 0$.

1212. Zistite, akú množinu bodov predstavujú uvedené rovnice, a napíšte ich kánonický tvar:

a) $x^2 - y^2 + 4xz - 4yz - 3 = 0$;
b) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz + 8yz - 12x - 12y + 6z = 0$;
c) $3x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz + 8x - 4y + 8z = 0$;
d) $5x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$;
e) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$;
f) $x^2 + y^2 - 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$;
g) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0$;
h) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2x + y + z = 0$;
i) $2x^2 - y^2 - z^2 - 4xy + 4xz + 8yz + 4x + 14y - 14z - 28 = 0$;
j) $5x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 6x - 2y - 2z = 0$;
k) $6x^2 + 7y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz - 36 = 0$.

1213. Nájdite priesečníky kvadratickej plochy $2z^2 + 2xy - 2yz - 10x = 0$ s priamkou $x = -t$, $y = 5 + 3t$, $z = 10 + 7t$.

1214. Ukážte, že rovina $2x + y + z + 5 = 0$ pretína kvadratickú plochu $x^2 - 2yz + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$ v dvojici priamok. Nájdite rovnice týchto priamok.

1215. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku kužeľovej ploche $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0$ v bode $A = (0, 0, (2 + \sqrt{13})/3)$.

1216. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku kvadratickej ploche $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$ v bode $A = (0, 2 + \sqrt{2}, 0)$.

1217. Nájdite rovnicu dotykovej roviny ku kvadratickej ploche $4x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy - 4x - 8z + 3 = 0$, ktorá je rovnobežná s rovinou $y + 2z + 2 = 0$.

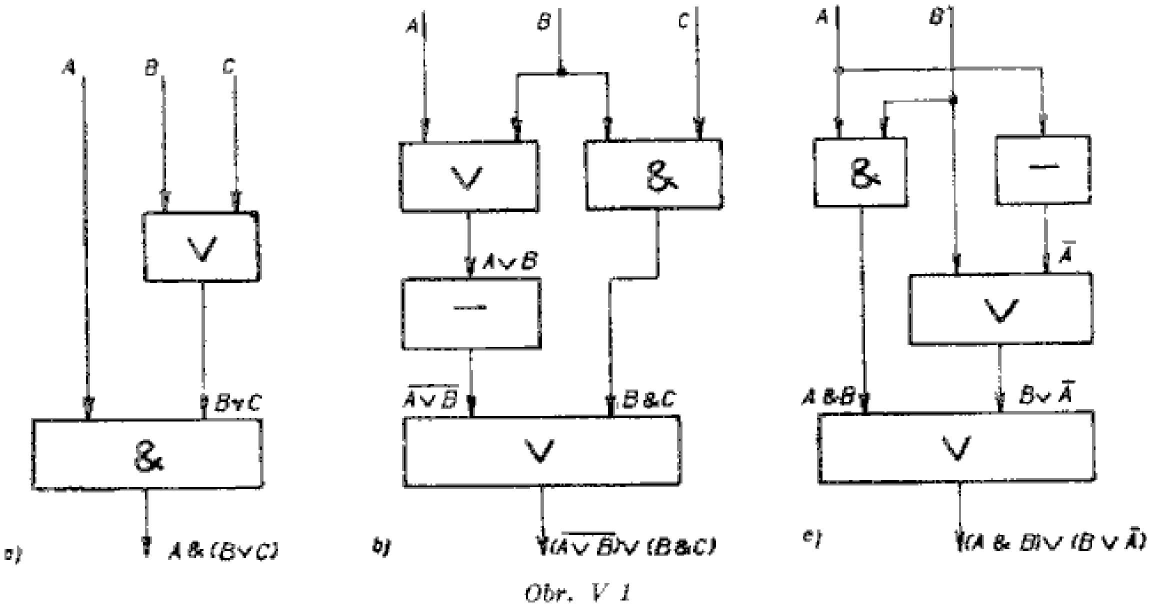
1218. Nájdite rovnicu dotykovej roviny k ploche $2x^2 + y^2 - 5z^2 - 2yz + 6xz - 2x - 4y - z = 0$, ktorá prechádza priamkou $x : y : (z - 1) = 5 : 4 : 0$.

5. VÝSLEDKY

1. Úvod

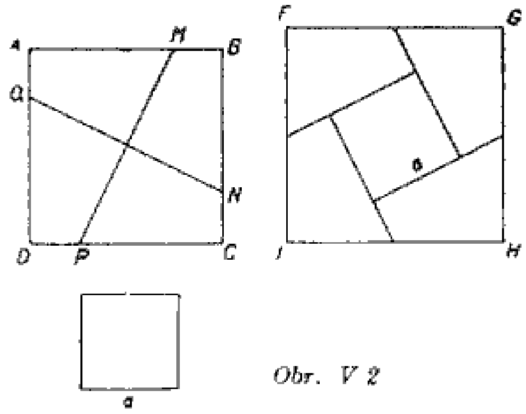
1,1. Elementy matematickej logiky

1. a) Je výrok; b) je výrok; c) nie je výrok; d) nie je výrok; e) nie je výrok; f) je výrok; g) je výrok; h) nie je výrok. **2.** a) Teleso nepadá rovnomerným pohybom. b) Dva plus sedem sa rovná deviatim. c) Všetky reálne čísla sú kladné. d) Spojnica dvoch bodov nie je priamka. e) $3 = 5$; f) $2 \geqq -7$. **3.** a) Neplatí $A \Rightarrow B$; b) $A \Rightarrow B$; ak číslo 12 je deliteľné 4, potom Bratislava má vyše 100 000 obyvateľov; c) $A \Rightarrow B$; ak cicavce potrebujú kyslík na dýchanie, potom každý vnútorný uhol rovnostranného trojuholníka má 60°; d) $A \Rightarrow B$; ak dané číslo a je deliteľné ôsmimi, je deliteľné dvoma; e) $A \Rightarrow B$; ak dané číslo a je kladné a p, q sú dané celé čísla, potom platí $a^{p+q} = a^p a^q$; f) $A \Rightarrow B$; ak voda je ťažký kov, potom chémia je veda o spoločnosti; g) neplatí $A \Rightarrow B$; h) $A \Rightarrow B$; z toho, že daný štvoruholník je obdĺžnik, vyplýva, že uhlopriečky štvoruholníka sú rovnako dlhé; i) $A \Rightarrow B$; ak je Mesiac najväčšia planéta slnečnej sústavy, potom Dunaj je európska rieka. **4.** a) $B \Rightarrow A$; b) $A \Leftrightarrow B$; c) $A \Leftrightarrow B$; d) —; e) —; f) $A \Leftrightarrow B$; g) —; h) —; i) —. **5.** a) —. b) Aby číslo 12 bolo deliteľné 4, je nutné a stačí, aby Bratislava mala vyše 100 000 obyvateľov. c) Cicavce potrebujú kyslík na dýchanie vtedy a len vtedy, keď rovnostranný trojuholník má každý vnútorný uhol rovný 60°. d) Aby číslo a bolo deliteľné 8, je nutné, aby bolo deliteľné 2. Aby číslo a bolo deliteľné 2 stačí, aby bolo deliteľné 8. e) Aby platilo $a^{p+q} = a^p a^q$ stačí, aby bolo a kladné a p, q celé čísla. f) Voda je ťažký kov vtedy a len vtedy, keď chémia je veda o spoločnosti. g) —. h) Aby štvoruholník bol obdĺžnik, je nutné, aby mal uhlopriečky rovnaké. Aby štvoruholník mal uhlopriečky rovnaké, stačí, aby bol obdĺžnik. i) Aby Mesiac bol najväčšou planétou slnečnej sústavy je nutné, aby Dunaj bol európskou riekou. **6.** a) Stačí; b) je nutné a stačí; c) je nutné;

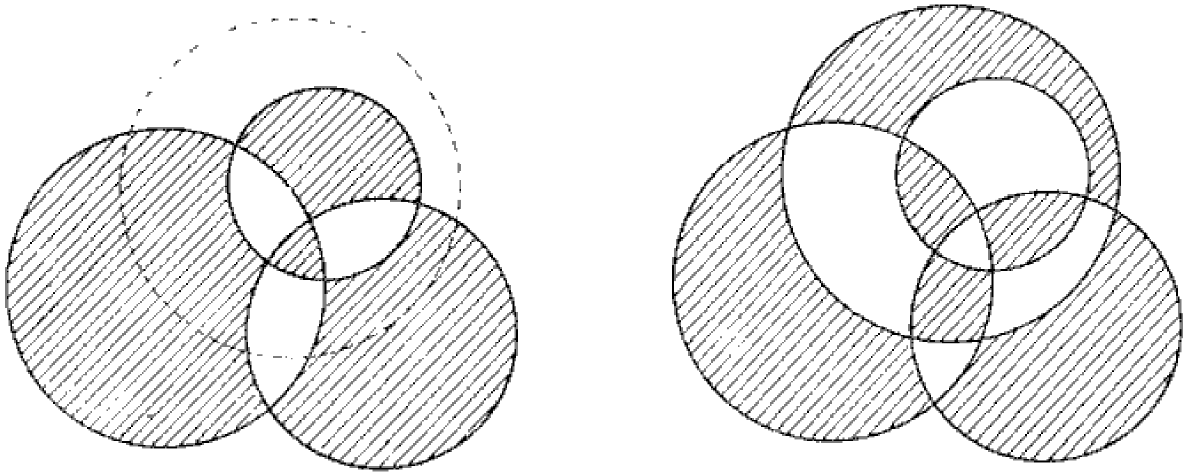


Obr. V 1

d) stačí; **7.** a) Stačí; b) stačí; c) je nutné a stačí. **8.** a) Je nutné; b) je nutné a stačí;*) c) je nutné a stačí; d) je nutné a stačí; e) je nutné a stačí; f) stačí. **11.** a) Vždy nepravdivý výrok. b) —; c) vždy pravdivý výrok; d) vždy pravdivý výrok; e) vždy pravdivý výrok; f) vždy pravdivý výrok; g) vždy pravdivý výrok; h) —; i) —; j) vždy pravdivý výrok; k) vždy pravdivý výrok. **12.** a) Vždy pravdivý výrok; b) vždy pravdivý výrok; c) —; d) vždy pravdivý výrok. **13.** a) Vždy pravdivý výrok; b) vždy pravdivý výrok; c) vždy pravdivý výrok; d) vždy pravdivý výrok.
19. Pozri *obr. V1.*



Obr. V 2



Obr. V 3

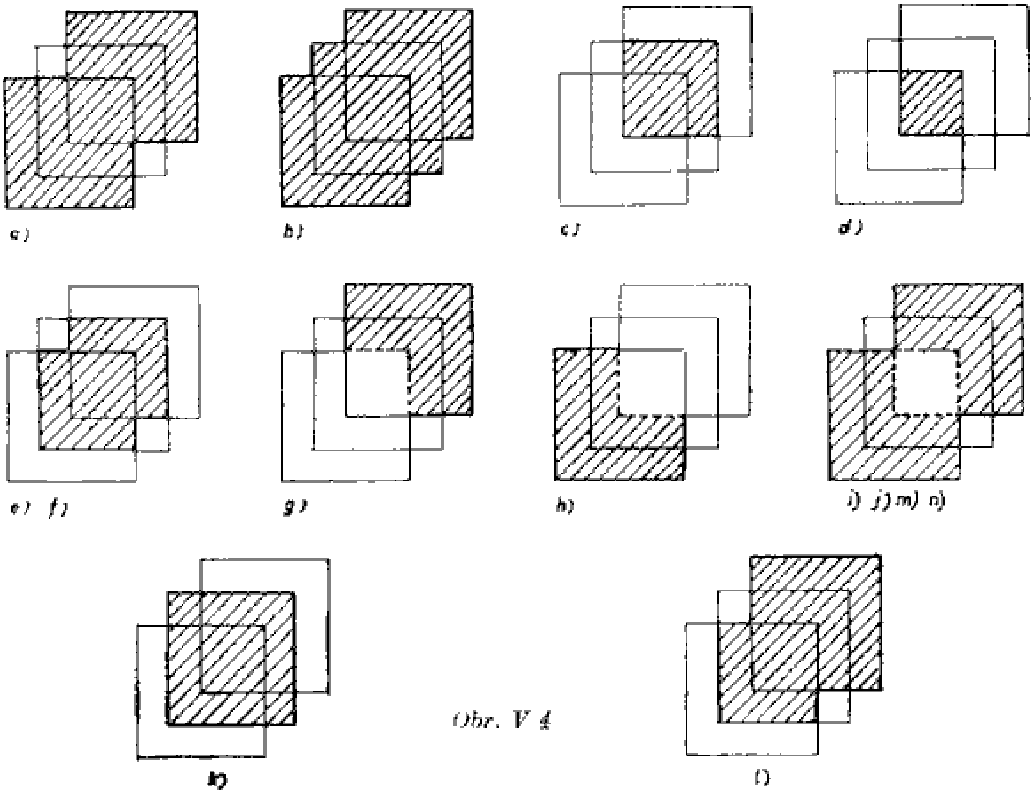
1,2. Základné druhy matematických dôkazov

65. d) Návod. $(n+1)$. kružnicu pretína zvyšných n kružníc v $2n$ bodoch. Počet častí roviny, ktoré vzniknú pridaním $(n+1)$. kružnice, je $2n$. **66.** $(n+1)(n^2-n+6)/6$. **67.** Návod. Z dvoch štvorcov možno zostrojiť nový štvorec nasledujúcou konštrukciou: Ak strany obidvoch štvorcov sú a, b, pričom $a < b$, potom na strany väčšieho štvorca vynesieme úsečky AM, BN, CP, DQ dĺžky $(a+b)/2$. Rozdelíme väčší štvorec úsečkami MP a NQ na štyri časti. Z týchto častí a z menšieho štvorca možno zostrojiť štvorec $FGHI$ (pozri *obr.* V 2). **68.** $a_n = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$. **69.** Návod. Majme n kružníc s požadovaným zafarbením. Uvažujme $(n+1)$. kružnicu a zmeňme farbu každej oblasti vnútri tejto kružnice na opačnú (pozri *obr.* V 3).

*) Štvorec považujeme za osobitný prípad obdĺžnika.

1,3. Pojem množiny, základné operácie s množinami

71. a) Kružnica; b) guľa. **72.** a) Os súmernosti daných bodov; b) rovina súmernosti. **73.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$. **74.** $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 12, 13\}$, $A \cap B = \{4, 9\}$, $A - B = \{1, 7, 12\}$, $B - A = \{2, 6, 13\}$. **75.** $A \cup A = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cap A = \{0, 1, 2, 3\}$, $A - A = \emptyset$. **76.** $A \cup B$ je množina všetkých ľudí žijúcich na celej zemeguli starších nad 20 rokov a Európanov, ktorí nemajú viac ako 20 rokov; $A \cap B$ je množina všetkých Európanov od 20 do 30 rokov; $A - B$



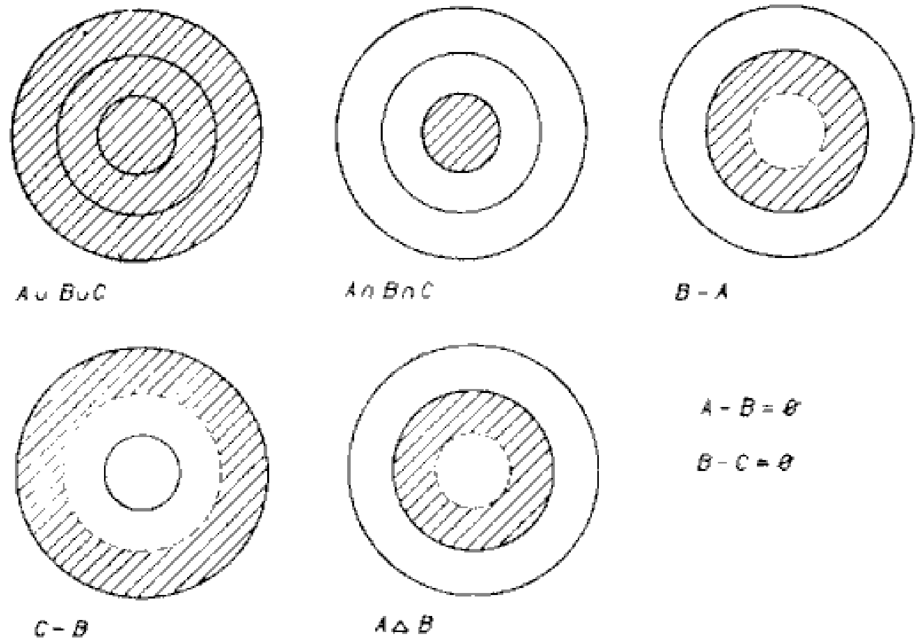
Obr. V 4

je množina všetkých ľudí žijúcich na zemeguli starších nad 20 rokov okrem všetkých Európanov pod 30 rokov; $B - A$ je množina všetkých Európanov, ktorí nemajú nad 20 rokov; $A \triangle B$ je množina všetkých Európanov do 20 rokov a množina všetkých ľudí žijúcich na zemeguli starších nad 20 rokov okrem všetkých Európanov od 20 do 30 rokov. **77.** $\emptyset$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{8\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{6, 8\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 6, 8\}$, $\{4, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$. Ak množina M má n prvkov, počet jej podmnožín je 2^n. **78.** $C \subset A$, $C \subset B$, $A \cap B = C$. **79.** a) Všetky nepárne celé čísla; b) všetky celé čísla. Súčtom množín je množina všetkých celých čísiel a prienikom množina všetkých nepárnych čísiel. **80.** a) $M_1 \cup M_2 = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$, b) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$; c) $M_2 \cap M_3 = \{15\}$; d) $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$; e) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = \{10, 15\}$; f) $(M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3) = \{10, 15\}$; g) $M_2 - M_1 = \{3, 9, 15\}$; h) $M_1 - M_2 = \{2, 4, 8, 10, 14\}$; i) $(M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1) = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$; j) $(M_1 \cup M_2) - (M_1 \cap M_2) = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$; k) $(M_1 \cap M_2) \cup M_3 = \{5, 6, 10, 12, 15\}$; l) $(M_1 \cup M_2) \cap (M_2 \cup M_3) = \{3, 6, 9, 10, 12, 15\}$; m) $M_1 \triangle M_2 = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$; n) $M_2 \triangle M_1 = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$. **81.** Pozri *obr. V 4*. **82.** Pozri *obr. V 5*. **83.** $M - \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \bigcap_{i=1}^{n} (M - M_i)$, $M - \bigcap_{i=1}^{n} M_i = \bigcup_{i=1}^{n} (M - M_i)$.

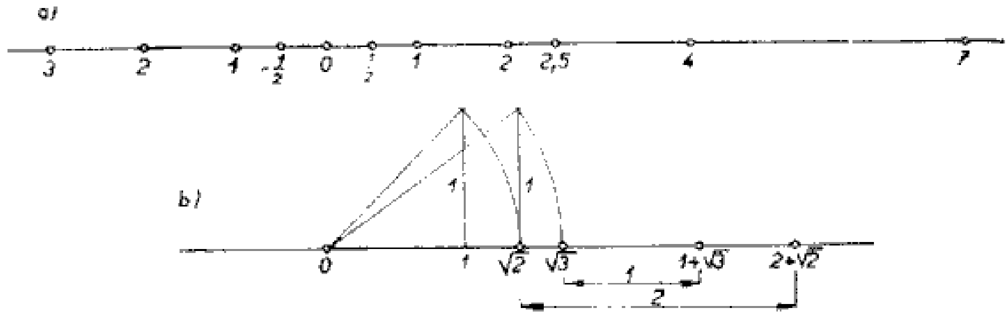
2. Reálne čísla

2.1. Základné pojmy a vlastnosti reálnych čísiel

90. Pozri *obr.* V 6. **91.** a) $\log_2 16$, 13; b) —2, $\log_2 16$, 13, 0; c) —2, —3/5, 2, 7, $\log_2 16$, 13, 0; d) 2/3, $2^{1/2}$, e, π, $2^{\sqrt{2}}$. **92.** a) $\pi < 355/113 < 22/17$; b) $13/15 < \sqrt{7} < 8/3$; c) $49/22 < \sqrt{6} < 5/2$; d) $137/38 < \sqrt{13} < 119/33$. **93.** a) Ak $b > 0$, potom $-2b < b$; ak $b < 0$, potom je $b < -2b$;



Obr. V 5



Obr. V 6

ak $b = 0$, potom je $b = -2b$; b) $b > 0$; c) ak x a y majú rovnaké znamienka, nerovnosť je správna, ak $|y| > 1$; ak a, b majú opačné znamienka, nerovnosť je správna pre $|y| < 1$; d) $x > 4/3$, $x < 4/3$, $x = 4/3$; e) $x > 0$. **95.** a) $2/5 + \alpha/35$, kde $0 < \alpha < 1$ a α je racionálne číslo; b) $-1{,}7 + 0{,}1\alpha$, kde $0 < \alpha < 1$ a α je racionálne číslo. **96.** a) Neplatí; b) neplatí; c) platí. **97.** a) $a > 1$, $b > 1$, alebo $a < 0$, $b < 0$; b) $a > 0$, $b < 1$, alebo $a < 0$, $b > 1$. **98.** a) Ak niektorý sčítanec je záporný; b) ak oba sčítance sú záporné. **99.** Je to možné. Napr. ak $a = p + q\sqrt{n}$, $b = r - q\sqrt{n}$, kde p, q, r sú racionálne čísla a n nie je štvorec racionálneho čísla, potom $a + b$ je racionálne číslo; $a = p + q\sqrt{n}$, $b = r + q\sqrt{n}$, potom je číslo $a - b$ racionálne číslo, pričom

p, q, r, n sú ako predošlé. **102.** Predpokladajte, že $\sqrt{n^2+1} = p/q$, kde p a q sú nesúdeliteľné čísla. **103.** Predpokladajte, že $\sqrt{n} = p/q$, kde p a q sú nesúdeliteľné čísla. **104.** Napr. číslo tvaru $\sqrt{2} + 0{,}3\alpha$, kde α je racionálne číslo, pre ktoré platí: $0 < \alpha < 1$. **106.** Ak $m = r^2s$, $n = t^2s$, kde r, s, t sú prirodzené čísla. **107.** Predpokladajte, že číslo $\sqrt{r_1r_2}$ je racionálne číslo. **108.** Je to možné, ak $n = r^2t$, $n = s^2t$, kde r, s, t sú prirodzené čísla. **110.** Predpokladajte, že $\sqrt{n} = u/v$, kde u, v sú prirodzené čísla a využite rozklad čísiel u, v, n na súčin prvočiniteľov. **111.** Platí pre ľubovoľný konečný počet činiteľov. **112.** Platí pre ľubovoľný konečný počet činiteľov.

2,2. Číselné množiny

114. Uzavretý; zľava uzavretý, sprava otvorený; otvorený; zľava otvorený, sprava uzavretý. **115.** a) $\langle 2, 3)$, $\langle -1, \infty)$; b) $(-4, 1\rangle$, $(-7, 3)$; c) $(-8, 3\rangle$, $(-\infty, 15)$; d) $(3, 10\rangle$, $(-\infty, \infty)$; e) $(-1, 1)$, $\langle -3, 5)$. **116.** a) $2, -3$; b) $5, 0$; c) $1/7, 1/10$; d) $4, -4$; e) $-7, -7$. **117.** a) 0, neexistuje, 0, neexistuje; b) neexistuje, neexistuje, 0, neexistuje; c) neexistuje, neexistuje, 1, 0; d) 1, 0, 1, 0; e) $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$; f) neexistuje, neexistuje, 1, 0. **119.** a) $(1, \infty)$; b) $\langle 2, 5\rangle$; c) $(-3, 2)$; d) $(-\infty, \infty)$; e) $(-\infty, 0)$; f) $\emptyset$; g) $(0, \infty)$; h) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$. **120.** a) M_1 je ohraničená, max M_1 neexistuje, min M_1 = inf M_1 = obvod rovnostranného trojuholníka vpísaného do kruhu s polomerom R, sup $M_1 = 2\pi R$; b) M_2 je ohraničená, max M_2 je obvod rovnostranného trojuholníka opísaného kružnici s polomerom R, min M_2 neexistuje, sup M_2 = max M_2, inf $M_2 = 2\pi R$; c) M_3 je ohraničená, max M_3 = sup $M_3 = \pi(R_1 + R_2)$, min M_3 = inf $M_3 = \pi(R_2 - R_1)$, kde R_1 je polomer K_1, R_2 je polomer K_2, $R_2 > R_1$. **121.** a) $\langle 1/2, 1)$; b) $\langle -1, 1\rangle$; c) $\langle -2, 2\rangle$; d) $(1/\sqrt{2}, 1)$; e) $(0, \pi R^2/2)$; f) $(0, 2R^2)$; g) $\langle -2, 7/4\rangle$. **124.** sup $M = 2/9$. **125.** a) Neexistuje, 1; b) 5, 2; c) 2, -3; d) neexistuje, neexistuje; e) 0, neexistuje; f) neexistuje, neexistuje; g) neexistuje, 0; h) neexistuje, neexistuje. **127.** max M = sup $M = 3/2$, min M neexistuje, inf $M = 1$. **128.** inf $M = -1$, sup $M = 1$, max M a min M neexistuje. **129.** min M = inf $M = 0$, sup M = max $M = 2$.

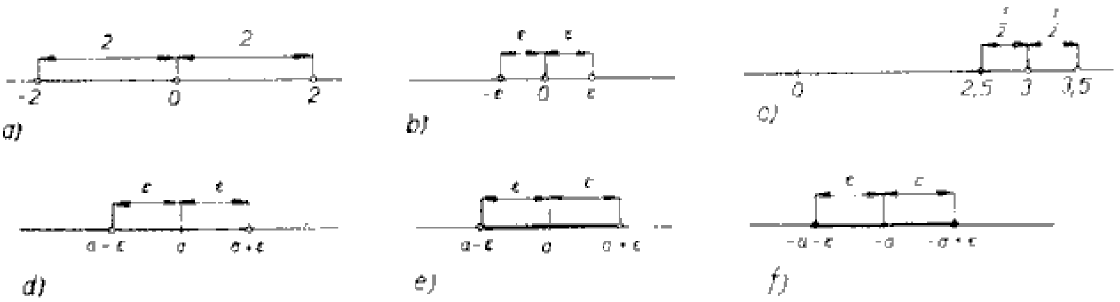
2,3. Nerovnosti

130. a) $a > b$, potom je $a + c > b + c$. Odtiaľ vyplýva tvrdenie; b) nerovnosť $a > b$ vynásobte číslom $1/ab$ a uvažujte, že a, b majú rovnaké alebo opačné znamienka; c) platí $(a - b)^2 \geqq 0$, odtiaľ vyplýva tvrdenie. **131.** a) Platí $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$. Odtiaľ vyplýva tvrdenie; c) dôkaz možno urobiť úplnou indukciou; d) stačí dokázať, že $(a + c)(b + d) \geqq ab + cd + 2\sqrt{abcd}$. **132.** a) $n = 1$ a $n > 4$, kde n je prirodzené číslo; b) pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$; c) $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; d) $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **133.** a) Úplnou indukciou. **134.** a) Ukážte, že pre $S_n = 1/1^2 + \ldots + 1/n^2$ platí $S_n \leqq 2 - 1/n$. Použite potom matematickú indukciu; b) pre $n = 1, 2$ je tvrdenie zrejmé. Od štvrtého člena zameňte čísla $3, 4, \ldots, n$ menším číslom 2. Potom dokážte, že $S_n = 3 - 1/2^{n-1}$; **135.** c) dokážte najskôr, že $S_{k+1} - S_k > 0$; d) vypočítajte najskôr $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ a použite b). a) Platí $\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n}, \ldots, \dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{2n}$. Sčítaním dostaneme hľadanú nerovnosť; b) pre prirodzené čísla k a n platí $\dfrac{1}{(n+k+1)(n+k)} < \dfrac{1}{(n+k)^2} < \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$, alebo $\dfrac{1}{n+k} - \dfrac{1}{n+k+1} < \dfrac{1}{(n+k)^2} < \dfrac{1}{n+k-1} - \dfrac{1}{n+k}$. Ak do poslednej nerovnosti dosadíme za k $1, 2, \ldots, p$, dostaneme hľadanú nerovnosť; c) napíšme daný súčet v tvare $1 + 1/2 + (1/3 + 1/2^2) + \ldots + \left(\dfrac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1}\right)$. Súčet členov v každej zátvorke je väčší ako 1/2. Ak napíšeme súčet v tvare $1 + (1/2 + 1/3) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}\right)$ vidíme, že súčet členov v zátvorkách je menší ako 1. Odtiaľ vyplýva tvrdenie; d) najskôr ukážte, že $S_n = \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n+1}$. **136.** a) Platí $(n!)^2 = 1 \,.\, n \,.\, 2 \,.\, (n-1) \dots (n-1) \,.\, 2 \,.\, n \,.\, 1$. Keďže $k(n - k + 1) - n = (n - k) \,.\, (k - 1) \geqq 0$, platí $k(n - k + 1) \geqq n$. Ak do tejto nerovnosti za k dosadíme $1, 2, \dots, n$ a urobíme súčin, dostaneme $(n!)^2 \geqq n^n$; odtiaľ vyplýva nerovnosť; b) matematickou indukciou; c) platí $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$, pretože $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$, kde k je prirodzené číslo. Ak za k dosadíme $1, 2, \dots, n$ a sčítame, dostaneme hľadanú nerovnosť. **137.** Vyjadrite $\operatorname{cotg} x$ pomocou polovičného uhla $x/2$. Pomocou tohto vzťahu dostanete $1 + \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(x/2) \leqq 0$, pretože $\operatorname{cotg}(x/2) > 0$, ak x je z intervalu $(0, \pi)$. Odtiaľ vyplýva nerovnosť. **138.** Nerovnosť vyplýva z identity $(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2$, ktorú možno priamo dokázať. **139.** a) $(11, \infty)$; b) $(-\infty, -4\rangle$; c) $(-\infty, \infty)$; d) $(-\infty, -5/27)$; e) $\langle 56, \infty)$. **140.** a) $\langle 1, \infty)$; b) $\langle -50, \infty)$; c) $(-\infty, 3/2)$; d) ak $b - a > 0$, $\left(-\infty, \frac{a+b}{b-a}\right)$, ak $b - a < 0$, $\left(\frac{a+b}{b-a}, \infty\right)$. **141.** a) 1, 2, 3, 4; b) pre všetky záporné čísla väčšie ako -7. **142.** a) $2 < k < 3$; b) $2 < k < 3$. **143.** a) $(7/3, \infty)$; b) $(-\infty, 3/2)$; c) $(1/2, \infty)$; d) $(8/3, \infty)$. **144.** a) $\langle -35, 29\rangle$; b) $\langle 7, 23\rangle$; c) $(-21, -11\rangle$; d) $(1, 7\rangle$; e) $(1/3, 3/5)$. **145.** a) $x^3 > 8$; b) $11x^2 + 4x - 41 > 70$; c) $-35 < 3x^2 + 5x - 15 < 53$; d) $-11 < 5x^2 - 16 < 64$; e) $5 < x^2 - 2x + 10 < 17$. **146.** a) $(-\infty, 15/2)$; b) $(1, 3)$; c) $(-\infty, -2)$; d) $\langle 0, 2)$. **147.** a) $(3/10, 4/7)$; b) $(-1, -3/5)$; c) $(-1, 1\rangle$; d) $\langle 3/8, 5)$; e) $(-5/3, 4/3)$; f) $(-1, 1)$. **148.** a) Platí; b) neplatí; c) neplatí. **149.** a) $-1 \leqq x \leqq 5$; b) $0 \leqq x < 2$; c) $1 < x \leqq 2$; d) $-3 < x < \infty$; e) $9/2 < x < \infty$. **150.** a) $4 < x < 12$; b) $26/5 \leqq x < 7$; c) $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$; d) $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup (2, \infty)$; e) $(-9, -6) \cup (-3, \infty)$. **151.** a) Pre všetky reálne čísla; pre žiadne reálne číslo; pre žiadne reálne číslo; b) $(-\infty, 1/2\rangle \cup \langle 3/2, \infty)$; c) $(0, 1)$. **152.** a) $(-\infty, -3) \cup (8, \infty)$ b); $(-7 - \sqrt{73}, -7 + \sqrt{73})$; f) $(-\infty, -1/2) \cup (2, \infty)$; d) $(-3/2, -2/3)$; e) $(-\infty, 1\rangle \cup \langle 13/2, \infty)$; f) $\emptyset$. **153.** a) $(1/2, 1)$; b) $\emptyset$; c) $(-\infty, -46) \cup (121/5, \infty)$. d) $\left(-\infty, \frac{-41 - \sqrt{361}}{10}\right) \cup \left(\frac{-41 + \sqrt{361}}{10}, \infty\right)$; e) $\emptyset$; f) $\langle 2, 18\rangle$; **154.** a) $|k| \geqq 1/2$; bα) $|k| \geqq 8\sqrt{3}$, bβ) $|k| < 8\sqrt{3}$; c) $(25/4, \infty)$. **155.** a) $(-7, 3)$; b) $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$; c) $\emptyset$. **156.** a) $\left\langle -4, \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}, 1\right)$; b) $(-\infty, 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}, \infty)$; c) $(-\infty, -3/2\rangle \cup \langle 2, \infty)$. **157.** a) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; b) $(2 - \sqrt{3}, 1) \cup (3, 2 + \sqrt{3})$; c) $(1, 2\rangle \cup (4, \infty)$; d) $(-2\sqrt{2}, -2) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$; e) $(-2, 16/7\rangle \cup (3, 4) \cup \langle 8, \infty)$; f) $(-\infty, -3) \cup (-1/3, \infty)$. **158.** a) $(-1, 1)$, $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; b) $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$; 0; $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$; c) $(-1, 0) \cup (1, \infty)$. **159.** a) $(0, 2) \cup (5, \infty)$; b) $(-1, 2) \cup (3, 6)$; c) $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$; d) $(-\infty, -5\sqrt{2}) \cup (-6, 0) \cup (6, 5\sqrt{2}) \cup (8, \infty)$; e) $(-\infty, -1) \cup (-1/2, 0)$. **160.** 14, 25, 36, 47, 58. **161.** $n \geqq 8$, kde n je prirodzené číslo. **162.** 4/9, 5/11. **163.** $a > (\sqrt{21} - 1)/2$. **164.** N á v o d. Plocha $P = (s/2 - b)\, b$, kde s je obvod a b strana rovnobežníka. Upravte vzorec pre plochu na rozdiel dvoch štvorcov a zistite, kedy je plocha najväčšia. **165.** Z podmienok úlohy zostavte nerovnosť $\frac{x}{v + v_1} + \frac{x}{v - v_1} \leqq S$, kde x

je vzdialenosť kúpaliska, v rýchlosť lode, v_1 rýchlosť prúdu Dunaja a S čas plavby. Pre náš prípad je $x \leqq 17{,}55$ km. **166.** Podľa podmienok úlohy dostaneme nerovnosť $\frac{0{,}01pm}{m+x} \geqq$ $\geqq 0{,}01p_1$ odkiaľ je $x \leqq \frac{m(p-p_1)}{p_1}$, kde m je váha daného roztoku, p percentuálny obsah liehu v danom roztoku, p_1 percentuálny obsah liehu vo výslednom roztoku a x množstvo pridanej vody v gramoch, $x \leqq 1000$ g. **167.** Úloha vedie k riešeniu systému nerovností: $20 \cdot 20 \cdot 0{,}09 +$ $+ 40 \cdot 15 + 80x \geqq 20 \cdot 30 \cdot 0{,}09 + (40 + x) \cdot 30$, $20 \cdot 20 \cdot 0{,}09 + 40 \cdot 15 + 80x \leqq 20 \cdot 35 \cdot$ $0{,}09 + (40 + x)\,35$. Po vyriešení dostaneme $13{,}08l \leqq x \leqq 17{,}018l$, kde x je množstvo vody 80 °C teplej, ktoré treba doliať. **168.** Použite Cauchyho—Buňakovského nerovnosť, ktorá je uvedená v úlohe **188.** **169.** Riešenie úlohy je ekvivalentné úlohe: Ako sa zmení hodnota nepravého zlomku, ktorého čitateľ a menovateľ sú kladné čísla, ak k čitateľovi a menovateľovi zlomku pripočítame to isté kladné číslo. Odtiaľ vyplýva: zväčšením plochy podlahy a plochy okien o ten istý počet m² sa byt po hygienickej stránke zhorší.

2,4. Absolútna hodnota reálneho čísla

170. a) $5, 3, \pi, \pi - 1, 2/3, 5/8, -1 + 2\sqrt{2}, 8 - 2\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{3}, 0$; b) $8/3 - \sqrt{2}$. **171.** $p \geqq 0$; $p, 0$; $p < 0$; $0, p$. **172.** Použite definície pre minimum a maximum dvojice reálnych čísel. **173.** a) $|a + b| \leqq 6$; b) $|a + b| \leqq 4$; c) $|a + b| < 6$. **174.** a) $x \geqq 6$; b) $x \leqq 3$ alebo $x \geqq 6$; c) $x \geqq 4$. **175.** a) $x \leqq 2$, alebo $x \geqq 4$; b) pre ľubovoľné hodnoty x; c) $2 \leqq x < 5$; d) pre ľubovoľné hodnoty x; e) $2 < x \leqq 3$; f) $2 \leqq x < 3$. **176.** a) $(-\infty, 1\rangle$; b) $\langle -4, 2/3\rangle$. **177.** a) $-6 < x < -2$; b) $(-\infty, -8\rangle \cup \langle 2, \infty)$. **178.** *Obr. V7.* **179.** a) $|x| < 5$; b) $|x| = 3$; c) $|x + 2| \leqq$ $\leqq 3$; d) $|x - 6| > 3$; e) $|x + 3| = 2$. **180.** a) $\varrho(-3, 1) = 4$; b) $\varrho(0, 4) = 4$; c) $\varrho(2, 5) = 3$;



Obr. V 7

d) $\varrho(3, -4) = 7$. **181.** a) $1 < \varrho(x, a) \leqq 3)$; *b)* $3 \leqq \varrho(x, a) \leqq 8$; c) $0 < \varrho(x, a) < 7/2$. **182.** a) $-1 <$ $< x < 3$; b) $(-5, -3\rangle \cup \langle -1, 1)$; c) $(-\infty, -7) \cup (13, \infty)$; d) $\langle 3, 7\rangle$; e) pre žiadne x. **183.** a) $|x| \leqq 5$; b) $|x - 13/2| \leqq 5/2$; c) $|x + 5| < 3$; $|x - 3| < 5$. **184.** a) Pravdivý; b) nepravdivý; c) pravdivý; d) nepravdivý. **185.** a) $-2 \leqq x \leqq 2$; b) $-3 < x < 3$; c) $1 \leqq x \leqq 5$; d) $(2, 3) \cup (5, 6)$; e) $\langle -6, -5\rangle \cup \langle -1, 0\rangle$. **186.** a) $(-\infty, -6\rangle \cup \langle 3, \infty)$; b) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$; c) $(-\infty, \infty)$; d) pre žiadne x; e) $(-\infty, -10/3)$; f) $(-1/5, 1)$; g) $\langle 0, 3\rangle$; h) $\langle -6, -11/3\rangle$; i) $(-\infty,$ $-1/2\rangle \cup (-1/3, \infty)$; *j)* $(-3, 4)$; k) $(-\infty, -3) \cup (12, \infty)$; l) $(-\infty, -5) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$; m) $(-\infty, -24/7) \cup \langle -18/17, \infty)$; n) $(-\infty, -5/3\rangle \cup \langle 1/7, 3/2) \cup (3/2, \infty)$. **187.** a) $x = 4$; b) $x = 1$; c) $x = -23/8$, $x = -19/6$; d) $x = 3$, $x = 2$. **188.** a) $(4, \infty)$; *b)* $(-\infty, 4/3)$; c) $\emptyset$; d) $\emptyset$; e) $(-2/3, 1/4) \cup (1/4, 3)$. **189.** a) $(-\infty, \infty)$; b) pre všetky reálne čísla x okrem čísiel: $-4, 2, 3$; c) $(-\infty, -6) \cup (-6, -7/2\rangle \cup \langle -2/7, 2\rangle$; d) $\left(-\infty, \frac{1 - 3\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left(-2, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup (1/2, 3)$; e) $(-\infty, \infty)$. **190.** a) $\emptyset$; b) $(-\infty, \infty)$; c) $\emptyset$. **191.** $(0,3)$.

2.5. Základy kombinatoriky

192. a) 84; b) 84; c) 4/9!; d) 2/3; e) —6580; f) 1/8; g) 499 500. **193.** a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{12}{4}$; c) $\binom{10}{5}$; **194.** a) $(n-1)!\,(n+1)$; b) $(n+2)!$; c) $n(n+1)$; d) $2n(2n+1)$; e) $(n+1)(n+2)\ldots 2n$; f) $(n-1)\,n$; g) $n/(n+1)!$; h) $1/(n+2)!$; i) 0. **195.** a) $\binom{m+1}{7}$; b) $\binom{m+1}{9}$; c) $\binom{9}{8}$; d) $\binom{m+2}{m-1}$; e) $\binom{8}{5}$; f) $\binom{14}{7}$. **196.** a) 5; b) 14 3; c) 7; d) 9; e) 10. **197.** a) 2; b) 4; c) 7; d) 8; e) 4; f) $x = 6$, $y = 3$. **198.** 5. **199.** 48. **200.** 96, 42, 24. **201.** a) 60; b) 20; c) 325. **202.** 20; 34 442, 34 424, 34 244, 32 444, 23 444, 24 344, 24 443, 24 434. **203.** a) 72; b) 576. **204.** 30 240. **205.** 73 660. **206.** 6^5. **207.** 3^n. **208.** 120. **209.** 360. **210.** 28. **211.** $\binom{n}{3}$. **212.** 872 536 050. **213.** 246 480. **214.** 55. **215.** 13 983 816. **216.** a) $x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$; b) $x^7 - 7x^6a + 21x^5a^2 - 35x^4a^3 + 35x^3a^4 - 21x^2a^5 + 7xa^6 - a^7$; c) $a^{11} + 11a^{10}b^{1/2} + 55a^9b + 165a^8b^{3/2} + 330a^7b^2 + 462a^6b^{5/2} + 462a^5b^3 + 330a^4b^{7/2} + 165a^3b^4 + 55a^2b^{9/2} + 11ab^5 + b^{11/2}$; d) $\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{5}{k} m^{\frac{5-k}{2}} . n^k$; e) $\sum_{k=0}^{5}\binom{6}{k} a^{\frac{6-k}{2}} . b^{\frac{k}{2}}$; f) $2^9\sum_{k=0}^{9}(-1)^k 2^k\binom{9}{k} x^{(3-k)/6}$; g) $\sum_{k=0}^{5}\binom{6}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^{3-k}$; h) $\sum_{k=0}^{5}[1+(-1)^k] . \binom{6}{k}(a^2-1)^{\frac{6-k}{2}} . a^k$. **217.** a) 1,4258; b) 1,126 69; c) 31,522 87; d) 0,964 58. **218.** a) $3003x^5y^{10}$; b) $55 . 3^{10}$; c) 672; d) $448x^2$; e) $1287a^{16}b^{15}$; f) $a_{20} = -\binom{40}{19}\,i$, $a_{21} = \binom{40}{20}$, $a_{22} = \binom{40}{21}\,i$, $a_{23} = -\binom{40}{22}$; g) 36 288; h) 1458. **219.** a) $36x^7y^2$; b) $84b^6a^3$; c) $125\,970a^7$; d) $18\,564x^4b^{-6}$. **220.** a) $\binom{17}{8}$; b) 35; c) $\binom{12}{6}\,y^{-3}$; d) neexistuje. **221.** a) 1/8; b) 1/2, —1/2; c) 1. **222.** a) 35; b) 9; c) 5. **223.** a) 495; b) $84x$. **224.** a) $10x^2$; b) 32, 2160, 15 120, 22 680, 7290, 243; c) 1, 2730, 25 740, 3640; d) 625, 7000, 7000, 1120, 16. **225.** 2^6. **226.** 64. **227.** Návod. Ukážte najskôr, že členy rozvoja $(p + q)^n$ spočiatku rastú a potom klesajú. Odtiaľ dostaneme: a) Ak $q(n + 1) > 1$, potom prvý člen rozvoja bude najväčším členom rozvoja podľa klesajúcich mocnín p. b) Ak $n < q(n + 1)$, potom najväčší člen rozvoja bude posledný člen. c) Ak $q(n + 1)$ nie je celé číslo a ν je najväčšie celé číslo, pre ktoré platí $\nu < q(n + 1) < \nu + 1$, potom index najväčšieho člena je $\nu + 1$. Ak $q(n + 1)$ je celé číslo, pričom $1 \leq q(n + 1) \leq n$, potom sú dva členy najväčšie a ich indexy sú $q(n + 1)$, $q(n + 1) + 1$. **228.** a) $n2^{n-1}$; b) $(n + 2)\,2^{n-1}$; c) $1 + (n - 2)\,2^{n-1}$; d) $(n + 1)\,2^n$; e) $1 + (n - 2)\,2^{n-1}$; f) 0; g) 0; h) 0, alebo $(-1)^{n/2}\binom{\frac{n}{2}}{1}$; i) $\frac{2^{n+1} - 1}{n + 1}$; j) $\frac{1 + n\,2^{n+1}}{(n + 1)(n + 2)}$

3. Základy lineárnej algebry

3.1. n-tice a operácie s nimi

229. a) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$; b) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$; c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$; d) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$; e) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$; **230.** a) $x = 1$, $y = -2$, $z = -15$; b) $x = 0$, $y = 1$, $z = -1/2$, c) $x = -1$, $y = 7$, $z = 2$. **231.** a) (1, 5), (7, —9); b) (4, —2, 4), (—4, 4, 0); c) (—7, 1, —5, 9), (—9, 9, 9, —11); d) (4, 7, 3, 2, 6), (—2, —7, 5, 2, 4). **232.** a) (—9, 3, 6); b) (—6, 15); c) (4, 8, 1, 6); d) (0, 0, 0, 0); e) (3, 4, 2, 8). **233.** a) (0, 2, 6); b) nemá zmysel; c) (—17/30, 19/21, —23/72); d) (—1, —3, 10, —3). **234.** a) (—2, —3, —5); b) (1/2, 1/2, 0); c) (—5/3, —1/3, 5/3); d) (—2, 1/2, 1). **235.** 1a) (38, 4, 9); 1b) (0, 16, 9, 25); 2a) (—9/70, 31/5, —363/70); 2b) (—613/70, —33/7, 109/7, —8/7). **236.** a) (—4/5, —1/5, —6, —4/5); b) (2/3, —11/3, 28/3, —2); c) (—240/13, 0, —720/13, 600/13). **237.** a) (—40, —62, —22); b) (131, 64, 29, —38); c) (—10, —3, $-2\sqrt{3}$, $-2\sqrt{2}$); d) (—17/24, 13/12, 5/8, —1/24); e) (—0,3; —0,17; 0). **238.** $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$. **239.** a) Nezávislé, $\mathbf{d} = \mathbf{a}/2 + \mathbf{b}/2$; b) závislé; c) závislé, $\mathbf{d} = -3\mathbf{a} + 3{,}5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$. **240.** a) Závislé; b) nezávislé; c) závislé; d) závislé; e) závislé. **241.** a) Nezávislé; b) závislé, $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{o}$; c) nezávislé; d) závislé, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{o}$; e) nezávislé; f) nezávislé. **247.** Použite dôkaz matematickou indukciou. **249.** a) λ ľubovoľné; b) ľubovoľné; c) $\lambda = 13$; d) $\lambda \neq 2$; e) pre žiadne λ. **250.** a) $\lambda = 7$; b) pre každé λ; c) pre žiadne λ. **251.** a) Ukážte najskôr, že n-tice $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ sú lineárne nezávislé a každá z nich je lineárnou kombináciou n-tíc $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s$, potom platí $r \leq s$. **252.** $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$. **253.** Okrem trojíc $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ a $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ ľubovoľné tri trojice tvoria bázu. **254.** $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; $\mathbf{a}, \mathbf{d}$; $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; $\mathbf{b}, \mathbf{d}$. **255.** $\mathbf{a}, \mathbf{d}$; $\mathbf{b}, \mathbf{d}$; $\mathbf{c}, \mathbf{d}$. **256.** Vtedy a len vtedy, ak bázu tvorí celý systém n-tíc alebo n-tice, ktoré netvoria bázu sú nulové n-tice. **257.** a) Báza je $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$; $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$; b) báza je $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$; $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; c) báza je $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$; $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d}$.

3,2. Determinanty

258. a) —13; b) 44; c) —11; d) —6; e) —1; f) $-4ab$; g) $\cos 2x$; h) $\sin (x + y)$; i) 0; j) $ab - c^2 - d^2$; k) $6 - 4\sqrt{2}$; l) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; m) 0. **259.** a) 0; b) 0; c) —58; d) —144; e) 98; f) 16; g) 6; h) 1; i) 1. **260.** a) $(a - b)(b - c)(c - d)$; b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; c) $2y^3 - (a + b + c)\, y^2 + abc$; d) $\sin (x - z) + \sin (z - y) + \sin (y - x)$; e) $1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2 \cos x \,.\, \cos y \,.\, \cos z$; f) —2; g) $-63 - 16i$. **261.** a) 5; b) 12; c) 3; d) 12; e) $\frac{n(n-1)}{2}$; f) $\frac{n(n+1)}{2}$. Permutácie a), c) sú nepárne, b), d) sú párne. Permutácie e), f) sú párne vtedy a len vtedy, ak jedno z čísiel n, $n - 1$, resp. $n + 1$, n je deliteľné štyrmi. **262.** a) $k - 1$; b) $n - k$. **263.** Hľadaná permutácia je $n, n - 1, n - 2, \dots, 3, 2, 1$; počet inverzií $\frac{n(n-1)}{2}$. **264.** a) +; b) nie je členom determinantu; c) —; d) —; e) +. **265.** a) $i = 2$, $k = 3$; b) $i = 2$, $k = 4$; c) $i = 1$, $k = 2$. **266.** $x^4 - 3x^2$. **267.** a) $n!$; b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; c) $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. **269.** a) Odčítajte od tretieho stĺpca prvý stĺpec; b) pripočítajte 5násobok druhého riadku vynásobený 5 k prvému riadku. **270.** b) K tretiemu stĺpcu pripočítajte druhý stĺpec vynásobený číslom $ab + bc + ca$ a odčítajte prvý stĺpec vynásobený číslom abc; c) k tretiemu stĺpcu pripočítajte druhý stĺpec vynásobený číslom $a + b + c$ a odčítajte prvý stĺpec vynásobený $ab + bc + ca$. **271.** $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$. **272.** a) 0; b) $(b - a)(c - a)(c - b)$; c) 0; d) 0. **273.** a) rozviňte podľa prvkov prvého stĺpca; b) odčítajte tretí stĺpec od prvého a druhého stĺpca, vytknite z prvého stĺpca $x - z$ a z druhého $y - z$ a rozviňte podľa prvkov prvého riadku; c) z prvého stĺpca vytknite číslo a a determinant napíšte ako súčet dvoch determinantov; d) pripočítajte k druhému riadku prvý riadok a rozviňte podľa prvkov druhého riadku; e) pozri prípad b). **274.** a) $\begin{vmatrix} 3, & a + b, & 5 \\ 2, & m + n, & 2 \\ 4, & p + q, & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3, & 2, & 1 \\ 7, & 4, & -5 \\ 8, & 1, & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3, & 4, & 15 \\ 3, & 3, & 1 \\ 4, & 1, & 7 \end{vmatrix}$. **275** Determinant sa vynásobí číslom $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **276.** Determinant sa nezmení. **277.** Determinant sa nezmení. **279.** —20, a) $\begin{vmatrix} 1, & 2, & 6 \\ 2, & -2, & -1 \\ 6, & -8, & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1, & -4, & 7 \\ 2, & -1, & 1 \\ 6, & -4, & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1, & 3, & 6 \\ 2, & 0, & 1 \\ 4, & -2, & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 11, & 3, & 7 \\ 3, & 0, & 1 \\ 6, & -2, & 2 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1, & 3, & 7 \\ -10, & 4, & -3 \\ 6, & -2, & 2 \end{vmatrix}$. **280.** a) $16a + 33b + 28c - 45d$; b) $-124a + 46b - 20c + 218d$; c) $-3a - b - 2c + d$. **281.** a) $abcd$; b) $abcd$; c) $abcde$. **282.** a) -18792000; b) -25728000; c) -48; d) -570; e) -1224; f) 0; g) 10; h) 288; i) 36; j) 100. **283.** Riešením rovnice sú čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$. **284.** a) $x(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)(e-x)$ $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} - \frac{1}{c-x} + \frac{1}{d-x} + \frac{1}{e-x}\right)$; b) $(n-1)!$; c) -6. **285.** $[a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$. **287.** a) $x^n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1}$, prvky mimo hlavnej diagonály napíšte v tvare $a_i = 0 + a_i$; b) $(n-1)!$; c) $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} \cdot 2(n-2)!$. **288.** a) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$; b) $(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$; c) $-3(x^2-1)(x^2-4)$. **290.** 1. Návod: Použite rovnosť $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ a odčítajte od každého stĺpca predchádzajúci stĺpec a potom od každého riadku prechádzajúci riadok.

3,3. Matice

292. a) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$; b) $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$; c) $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$; d) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. **293.** a) $x = -2/5$, $y = 1$; b) $x = 1/4$, $y = 1/2$, $z = 5/3$, $u = 2$. **294.** a) $\begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 1, & 2 \\ 2, & 1 \\ 3, & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3, & 0, & 3 \\ 5, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 2 \end{pmatrix}$; c) $(1, 2, 3, 1, 4)$. **295.** $x = 25/21$, $y = -34/19$.

296. a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7, & 2 \\ 12, & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -2, & -6 \\ -6, & -13 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8, & 2, & 0 \\ 9, & 3, & -2 \\ 4, & 5, & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 15, & 1, & 5 \\ 20, & 0, & 6 \\ 13, & 7, & 8 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & -1, & 2 \\ 1, & 1, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ -2, & 2, & -2, & 2 \\ 2, & -2, & 2, & -2 \end{pmatrix}$. **297.** a) $\begin{pmatrix} 7, & 0 \\ 7, & -7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -7, & 0 \\ 21, & 7 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1, & -3 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 5, & 10, & 9 \\ 6, & 10, & 9 \\ 4, & 5, & 5 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} a+b+c, & a^2+b^2+c^2, & 2ac+b^2 \\ a+b+c, & 2ac+b^2, & a^2+b^2+c^2 \\ 3, & a+b+c, & a+b+c \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 21, & 21, & 21 \\ 16, & 16, & 16 \\ 31, & 31, & 31 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 8, & 6, & 4, & 2 \\ 5, & 0, & -5, & -10 \\ 7, & 7, & 7, & 7 \\ 10, & 9, & 8, & 7 \end{pmatrix}$;

298 a) (8); b) $\begin{pmatrix} 3, & 6, & 3 \\ 2, & 4, & 2 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 7, & 15 \\ 7, & 20 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 42, & 43, & 21 \\ 33, & 32, & 15 \\ 18, & 20, & 10 \end{pmatrix}$. **300.** a) $\begin{pmatrix} -5, & 15 \\ -10, & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 7, & 4 \\ 6, & 7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 409, & 615 \\ 410, & 614 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 8, & 10, & 15 \\ 7, & 11, & 15 \\ 7, & 8, & 13 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1, & n \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} \cos nx, & -\sin nx \\ \sin nx, & \cos nx \end{pmatrix}$; g $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, pre n párne, $\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 3, & -2 \end{pmatrix}$, pre n nepárne; h) $\begin{pmatrix} x_1^k, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & x_2^k, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & x_3^k, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & x_n^k \end{pmatrix}$; **301.** $\begin{pmatrix} 3197, & -1266 \\ 7385, & -922 \end{pmatrix}$.

302. $\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$. **303.** 45. **305.** a) $5\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -21, & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 21, & -1 \\ -7, & -21 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 33, & 27 \\ 21, & 23 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -61, & -10 \\ -21, & -14 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} -40, & -11 \\ -28, & -35 \end{pmatrix}$; b) $5\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4, & 7, & 21 \\ 4, & 13, & 2 \\ 9, & 2, & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 14, & -4, & -3 \\ 9, & -2, & -8 \\ 8, & -3, & -12 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 12, & 8, & 9 \\ 15, & 4, & 6 \\ 22, & 11, & 6 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -7, & 13, & 21 \\ -6, & 7, & 22 \\ -7, & 11, & 28 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 7, & 12, & 15 \\ 3, & 6, & 13 \\ 0, & 10, & 14 \end{pmatrix}$. **306.** a) $\begin{pmatrix} a, & 3b \\ 2b, & a + 3b \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} a, & b, & 0 \\ 3c - 3a, & c - 3b & 0 \\ d, & c, & c \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 0, & a, & b, & c \\ 0, & 0, & a, & b \\ 0, & 0, & 0, & a \end{pmatrix}$,

kde a, b, c sú ľubovoľné čísla. **307.** c) použite dôkaz matematickou indukciou. **308.** a) $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & -a \end{pmatrix}$ pričom $a^2 + bc = 0$; b) $\mathbf{E}$, $-\mathbf{E}$, alebo $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & -a \end{pmatrix}$, pričom $a^2 + bc = 1$; c) nech $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Hľadané matice sú $\begin{pmatrix} \varepsilon_k, & 0 \\ 0, & \varepsilon_m \end{pmatrix}$, kde $k, m = 0, 1, 2$; $\begin{pmatrix} \varepsilon_k, & b \\ 0, & \varepsilon_m \end{pmatrix}$, kde $k \neq m = 0, 1, 2$; $\begin{pmatrix} \varepsilon_k, & 0 \\ c, & \varepsilon_m \end{pmatrix}$, kde $k \neq m = 0, 1, 2$ a $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$, pričom $a + d = -\varepsilon_k^2$, $ad - bc = \varepsilon_k$, $k = 0, 1, 2$ a a, b, c, d sú ľubovoľné čísla. **313.** a) $\begin{pmatrix} -1, & 1 \\ 1, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d, & -b \\ -c, & a \end{pmatrix}$, kde $ad - bc \neq 0$; c) $\begin{pmatrix} \cos x, & \sin x \\ -\sin x, & \cos x \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -3, & 1, & 0 \\ 9, & -3, & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & 2 \\ 3, & 0, & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\frac{1}{25} \begin{pmatrix} -2 - 9i, & 1 + 2i, & 3 + i \\ 10, & 5 + 5i, & -15 \\ -6, & 2 - 3i, & 9 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3, & 0, & 1, & 0 \\ -2, & 2, & -2, & 1 \\ 0, & 2, & -3, & 2 \\ -1, & 1, & -2, & 1 \end{pmatrix}$;

i) $\frac{1}{n - 1} \begin{pmatrix} 2 - n, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 2 - n, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 1, & 2 - n, & \ldots, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & 1, & \ldots, & 2 - n \end{pmatrix}$; **314.** a) $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$; b) nemá riešenie;

c) $\begin{pmatrix} -7, & 10 \\ 10, & 14 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 18, & -7 \\ -20, & 18 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 - 3a, & 2 - 3b, & 1 - 3c \\ 2 + a, & 1 + b, & 2 + c \\ 1 + 5a, & 2 + 5b, & 3 + 5c \end{pmatrix}$, kde a, b, c sú ľubovoľné čísla;

f) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -19, & 12, & 5 \\ 5, & -3, & -1 \\ -6, & 3, & 3 \end{pmatrix}$. **316.** a) 2; b) 2; c) 3.

317. a) 3; b) 2; c) 4; d) 5. **318.** a) 1; b) 1; c) 2; d) 3; e) 2; f) 2; g) 3; h) 5. **319.** a) pre $x = 3$ je $h(\mathbf{A}) = 2$, pre $x \neq 3$ je $h(\mathbf{A}) = 3$; b) pre $x = 2$ je $h(\mathbf{A}) = 2$, pre $x \neq 2$ je $h(\mathbf{A}) = 3$. **320.** a) Pre $x = y - 2$, kde x, y sú ľubovoľné čísla, je $h(\mathbf{A}) = 2$; b) pre $x = -2y - 2$, kde x, y sú ľubovoľné čísla, je $h(\mathbf{A}) = 3$. **321.** a) Alebo sa hodnosť matice nezmení, alebo sa zväčší o jednotku; b) alebo sa hodnosť matice nezmení, alebo sa zväčší o 1, alebo sa zväčší o 2. **323.** a) i-tý a j-tý riadok súčinu **AB** sa navzájom vymenia; b) k i-tému riadku súčinu **AB** sa pripočíta j-tý riadok vynásobený číslom c; c) i-tý a j-tý stĺpec súčinu **AB** sa navzájom vymenia; d) k i-tému stĺpcu súčinu s **AB** sa pripočíta j-tý stĺpec vynásobený číslom c.

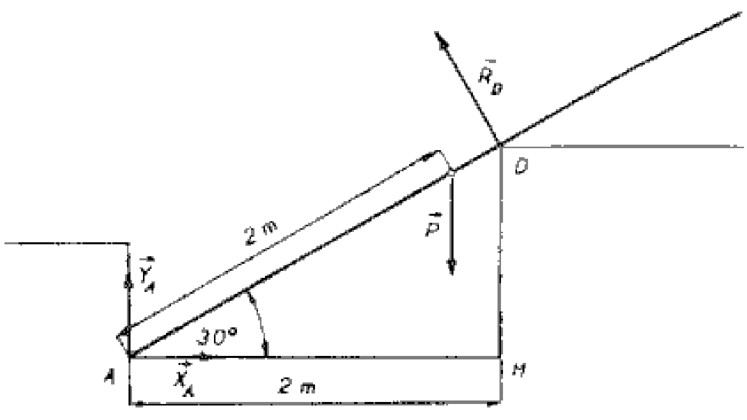
3,4. Systémy lineárnych rovníc

324. a) $(7, -1)$; b) $(-1, -2, -1)$; c) $(0, 0, 0, 0)$, $(1, -1, -2, 1)$. **327.** $p = 1$, $q = -1$, $r = 3$. **329.** a) $(3, 12)$; b) $(4 - 2a, a)$, kde a je ľubovoľné číslo; c) nemá riešenie; d) ak $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, potom má systém jediné riešenie $[(c_1b_2 - c_2b_1)/D, (a_1c_2 - a_2c_1)/D]$; ak $D = 0$ a $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$, potom riešením je dvojica $(b_1t, -a_1t + c_1/b_1)$ pre $b \neq 0$ alebo $(b_1t + c_1/a_1, -a_1t)$; $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$, potom riešenie je (t, s), kde t, s sú ľubovoľné čísla; ak $D = 0$ a platí $a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$ a aspoň jedno z čísiel a_1, b_1, c_1 je rôzne od nuly, potom systém nemá riešenie; ak $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ a aspoň jedno z čísiel c_1, c_2 je rôzne od nuly, potom systém nemá riešenie; **330.** a) $(1, 2, -1)$; b) $(8, 12, 10)$; c) $(11/2, 7, 3, 7/2)$; d) $(-2, -4, -6, -8)$. **331.** a) Nemá riešenie. b) $(0, 0, 0, 0)$; c) nemá riešenie; d) $(2, 3, 5)$; e) $(1/2, 3/8, 1/4, 5/4)$; f) $(1, 2, 1, 3)$; h) $(3, 0, -2, 0, 1)$; i) $x_1 = [n(n + 1)]/[2(n - 1)] - 1$, $x_k = x_{k-1} - 1$, pre $k > 1$. Návod. Sčítajte všetky rovnice dovedna a súčet vydeľte $(n - 1)$. Od takto získanej rovnice postupne odčítajte ostatné rovnice systému. **332.** a) Nemá riešenie; b) $(3 + 2a, a)$, kde a je ľubovoľné číslo; c) $(1, 2)$; d) nemá riešenie. **333.** a) $(-18a + 1, 2a + 3, 11a - 2)$, kde a je ľubovoľné číslo; b) $(1, 2, 3)$; c) nemá riešenie; d) $(1 - 2a, a, 0)$, kde a je ľubovoľné číslo. **334.** a) $(a, b, 22a - 33b - 11, -16a + 24b + 8)$, kde a, b sú ľubovoľné čísla; b) $(a + 3b + 1/2, 19a + 11b - 1, 23b - 2, 23a)$, kde a, b sú ľubovoľné čísla; c) $(8a - 2, 2 - 13a, 3 - 6a, 7a - 1)$, kde a je ľubovoľné číslo; d) $(3a, 3b + 1, 1 - 3a - 3b, 1, 2a + 2b + 1)$, kde a, b sú ľubovoľné čísla; e) $(3, 0, -5, 11)$; f) nemá riešenie. **335.** a) $(3, 2, 1)$; b) $(1, 1, 1, 1)$; c) $(a + 5, 2/3, -a - 1, 2a - 1/3)$, kde a je ľubovoľné číslo; d) $(-7a - 5b - 7c - 1/2, 12c, 4b, 1 - 4a, 8a)$; e) nemá riešenie; f) $(1, 2, -4, -3)$. **336.** a) $(a - 2, 2a/3, -a/2)$, pre $a = 0$ riešenie je $(-2, 0, 0)$, pre $a = 1$ je $(-1, 2/3, -1/2)$ a pre $a = -2$ riešenie je $(-4, -4/3, 1)$; b) pre $a = -2$ systém nemá riešenie; pre $a = 1$ má systém nekonečne mnoho riešení $(1 - b - c, b, c)$, kde b, c sú ľubovoľné čísla; pre $(a + 2)(a - 1) \neq 0$ má jediné riešenie $[1/(a + 2), 1/(a + 2), 1/(a + 2)]$; c) pre $a \neq 0$ systém nemá riešenie, pre $a = 0$ má nekonečne mnoho riešení $(5b + 13c - 3/2, 7b + 19c - 7/2, -2b, -2c)$; d) pre $a = -3$ systém nemá riešenie; pre $a = 1$ má systém nekonečne mnoho riešení $(1 - b - c - d, b, c, d)$, kde b, d a c sú ľubovoľné čísla; pre $(a + 3)(a - 1) \neq 0$ má jediné riešenie $[1/(a + 3), 1/(a + 3), 1/(a + 3), 1/(a + 3)]$; e) pre $a = 1$ systém nemá riešenie; pre $a \neq 1$ je riešením $(1 - 9b - 7c, 2b - 2c, 8b, 8c)$, kde b je ľubovoľné číslo a $8c = 5/(a - 1)$. **337.** a) Pre $2a - 3b$ systém nemá riešenie; pre $2a \neq 3b$ má riešenie $(-7/D, (3a - b)/D)$, kde $D = 2a - 3b$; b) pre $ab(a - b) \neq 0$ má systém jediné riešenie $[(b + 1)/a, (a + 1)/b]$; pre $a = 0$, $b = -1$ je riešením $(c, -1)$, pre $a = -1$, $b = 0$, je riešením $(-1, c)$; pre $a = b \neq 0$ je riešením (c, c) a pre $a = b = 0$ je riešením (c, d), pričom c, d sú ľubovoľné čísla. Pre $a = 0$, $b(b + 1) \neq 0$ alebo $b = 0$, $a(a + 1) \neq 0$ systém nemá riešenie; c) pre $a^2 - b^2 \neq 0$ má systém riešenie (b, a); pre $a = b \neq 0$ je riešením $(2a - c, c)$, pre $a = -b \neq 0$ je riešením $(-2a + c, c)$; pre $a = b = 0$ je riešením (c, d), pričom c, d sú ľubovoľné čísla; d) pre $a = -2$, $b = -3$ nemá riešenie; pre $a = -2$, $b \neq -3$ je riešením $(1 + 2c - d, c, d)$, kde c je ľubovoľné číslo a $d = 5/(b + 3)$; pre $a \neq -2$ je riešením $([(6 - 2a) - (6 - ab)c]/(3a + 6), [5 - (b + 3)c]/(3a + 6), c)$, pričom c je ľubovoľné číslo. **338.** a) Pre $b = 2$, alebo $a = b$ systém nemá riešenie; pre $D = (a - b) . (b - 2) \neq 0$ má riešenie $[(4 - 2b)/D, 3(a - b)/D, (3a - b - 4)/D]$; b) pre $b = 0$ alebo $a = 1$, $b \neq 1/2$ systém nemá riešenie; pre $a = 1$, $b = 1/2$ má riešenie $(2 - c, 2, c)$, kde c je ľubovoľné číslo; pre $D = (a - 1)b \neq 0$ má riešenie $[(2b - 1)/D, (a - 1)/D, (1 -$

$-2ab-4b)/D]$. **339.** a) Pre $b=-1$, $c\neq-3$ systém nemá riešenie; pre $b=-1$, $c=-3$, $a=2$ má riešenie $(11-d,\ d,\ -8)$; pre $b=-1$, $c=-3$, $a\neq 2$ má riešenie $[(8+d)/(a-2),\ d-3-(8+d)/(a-2),\ d]$, kde d je ľubovoľné číslo; pre $D=-(b+1)\neq 0$ je riešením $[-(c+3)/D,\ 3c-2-(a-3)(c+3)/D,\ 2c-2-(a-2)(c+3)/D]$; b) ak platí $a\neq b\neq c$ má systém jediné riešenie $\left(\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)},\ \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)},\ \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}\right)$.
Ak $d\neq a=c\neq b\neq d$, alebo $d\neq b=c\neq a\neq d$, alebo $a=b=c\neq d$, potom systém nemá riešenie. Ak $a=c=d\neq b$ je riešením $(1-p,\ 0,\ p)$; ak $a=c\neq b=d$ je riešením $(-p,\ 1,\ p)$, ak $a=d\neq b=c$, potom je riešením $(1,\ -p,\ p)$; ak $a\neq b=c=d$, je riešením $(0,\ 1-p,\ p)$. Ak $a=b=c=d$, je riešením $(1-p-q,\ p,\ q)$, kde p, q sú ľubovoľné čísla; c) ak je $D=abc-a-b-c+2\neq 0$, systém má jediné riešenie

$$\left(\frac{abc-2bc+b+c-a}{D},\ \frac{abc-2ac+a+c-b}{D},\ \frac{abc-2ab+a+b-c}{D}\right).$$

Ak je $D=0$ a iba jedno z čísiel a, b, c je rôzne od 1, potom riešenie závisí od jedného parametra p, napríklad pre $a\neq b=c=1$, je riešením $(1,\ -p,\ p)$, kde p je ľubovoľné číslo. Ak $a=b=c=1$, potom je riešením $(1-p-q,\ p,\ q)$, kde p q sú ľubovoľné čísla. Ak $D=0$ a $(a-1)(b-1)(c-1)\neq 0$, potom systém nemá riešenie; d) ak $D=(a-1)(a+2)=0$, systém nemá riešenie. Ak $D\neq 0$, systém má jediné riešenie $((1+2a-a^2)/D,\ (2a-3)/D,\ (a^3-a^2-2a+1)/D)$.



Obr. V 8

340. a) $(0,\ 0)$; b) $(3a,\ -2a)$; c) $(2a,\ 4a,\ a)$; d) $(16a,\ 13a,\ 18a)$; e) $(10a,\ 17a,\ 14a)$, kde a je ľubovoľné číslo. **341.** a) $(13a,\ 2a,\ 7a)$; b) $(0,\ 0,\ 0)$; c) $(2+a,\ 2-a,\ 3+a,\ a)$; d) $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$; e) $(8a-7b,\ -6a+5b,\ a,\ b)$. **342.** a) $(1+a+b,\ 2-a-b,\ 3+a-b,\ a,\ b)$; b) $[a,\ b,\ c,\ (-9a+3b-10c)/11,\ (-3a+b+4c)/11]$; c) $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$; d) $(a,\ c,\ a-b,\ a-c,\ a,\ b)$. **344.** a) $(13a,\ -28a,\ -19a)$; b) $(10a,\ -16a,\ -a,\ a)$; c) $(77a,\ 28a,\ -113a,\ 13a)$. **345.** a) Systém má nenulové riešenie pre ľubovoľnú hodnotu parametra a, riešenie je $(10t,\ (-a+4)t,\ (8-3a)t)$; b) systém má nenulové riešenie pre $ab=-3$, riešenie je $(t,\ bt)$; systém má nenulové riešenie iba pre $a=0$, $a=1$. Riešenia sú $(3t,\ 2t,\ t)$ a $(t,\ t,\ t)$; d) systém má nenulové riešenie iba pre $a=3/7$, riešenie je $(7t,\ 21t,\ 39t)$. **346.** a) $ad-bc=0$, alebo $ad-bc=e$; b) iba pre $a=b=c=d=0$; c) alebo aspoň dve z čísiel a, b, c, d, e sa rovnajú -1, alebo ani jedno z nich sa nerovná -1, ale potom musí platiť $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}+\frac{e}{e+1}=1$.

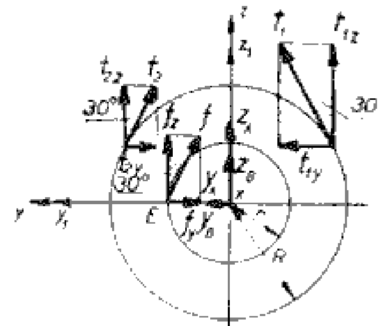
347. 1793. **348.** 43 cm, 65 cm, 54 cm. **349.** 9 cm, 12 cm, 15 cm. Ak je zväčšenie rozmerov kvádra s_1, s_2, s_3 a zväčšenie povrchov kvádra m_1, m_2, m_3, potom pre rozmery kvádra platí

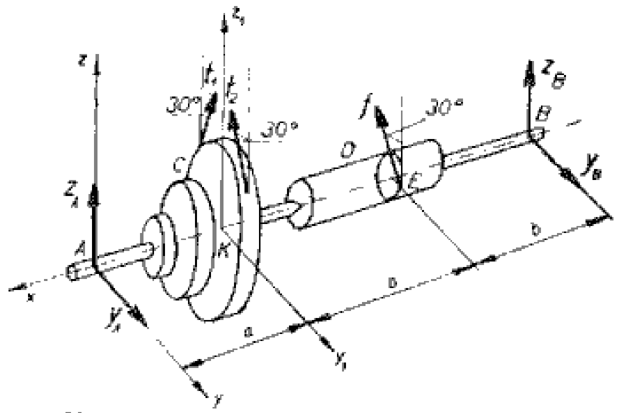
$$a = \frac{1}{4}\left(-\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} + \frac{m_3}{s_3}\right), \quad b = \frac{1}{4}\left(\frac{m_1}{s_1} - \frac{m_2}{s_2} + \frac{m_3}{s_3}\right), \quad c = \frac{1}{4}\left(\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} - \frac{m_3}{s_3}\right).$$

350. 500 mužov, 1000 žien, 4000 detí. **351.** 27 g vodíka, 432 g síry a 864 g kyslíka. **352.** 5,4 kg, 45,6 kg, 40 kg, 120 kg. **353.** a) Nech $Q = RR_1 + RR_2 + R_1R_2$, potom riešenie je $J_1 = UR_2/Q$, $J_2 = UR_1/Q$, $I = U(R_1 + R_2)/Q$, t. j. $J_1 = 3/2075$ A $\doteq 1{,}45$ mA, $J_2 = 1/2075$ A $\doteq 0{,}48$ mA, $I = 4/2075$ A $\doteq 1{,}93$ mA; b) $J_1 = 2$ A, $J_2 = 7$ A, $J_3 = 3$ A, $J_4 = 6$ A, $J_5 = -4$ A, $J_6 = 9$ A; c) $J_1 \doteq 1{,}26$ A, $J_2 \doteq -2{,}26$ A, $J_3 \doteq -1{,}89$ A, $J_4 \doteq 5{,}41$ A, $J_5 \doteq 4{,}15$ A, $J_6 \doteq 3{,}52$ A. **354.** $i_{BD} =$

$$U(R_2R_4 - R_1R_3)/[RR_5(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + R_5(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + \\ + (R_1R_4(R_2 + R_3) + R_2R_3(R_1 + R_4)].$$

355. $R_D = 3P/4 = 45$ kp, $X_A = 3P/8 = 22{,}5$ kp, $Y_A = 0{,}35$ P $= 21$ kp *(obr. V8)*. **356.** $F \doteq 46{,}3$ kp, $Y_A \doteq 0{,}9$ kp, $Y_B \doteq 12{,}2$ kp, $Z_A \doteq -41{,}3$ kp, $Z_B = -51{,}0$ kp *(obr. V9)*.





Obr. V 9

4. Základy vektorovej algebry a analytickej geometrie v rovine a v priestore

4,1. Súradnicové systémy v rovine

357. $\varrho(A, B) = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\varrho(B, C) = 3\sqrt{3}$, $\varrho(A, C) = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$. **358.** a) $A_1 = (-5)$, b) $A_2 = (-3)$, c) $A_3 = (9)$, $\varrho(A, A_1) = 10$, $\varrho(A, A_2) = 8$, $\varrho(A, A_3) = 4$. **359.** $B_2 = (-8)$ alebo $B = (2)$, $C = (-6)$ alebo $C = (0)$, $D = (-6, 5)$ alebo $D = (0, 5)$, $E = (-11)$ alebo $E = (5)$. **360.** $A_x = (3, 0)$, $A_y = (0, 5)$, $B_x = (0, 0)$, $B_y = (0, 2)$, $C_x = (-3, 0)$, $C_y = (0, 1)$, $D_x = (-2, 0)$, $D_y = (0, -3)$, $E_x = (6, 0)$, $E_y = (0, -2)$, $F_x = (4, 0)$, $F_y = (0, 0)$, $G_x = (0, 0)$, $G_y = (0, -3)$, $H_x = (-5, 0)$, $H_y = (0, 0)$. **362.** a) $A = (-a/2, 0)$, $B = (a/2, 0)$, $C = (0, a\sqrt{3}/2)$ alebo $A = (-a/2, 0)$, $B = (a/2, 0)$, $C = (0, -a\sqrt{3}/2)$; b) $A = (-a/2, -a/2)$ $B = (a/2, -a/2)$, $C = (a/2, a/2)$, $D = (-a/2, a/2)$; c) $A = (-6, 0)$, $B = (-3, -3\sqrt{3})$, $C = (3, -3\sqrt{3})$, $D = (6, 0)$, $E = (3, 3\sqrt{3})$, $F = (-3, 3\sqrt{3})$; d) $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1 + \sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2)$, $D = (1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $E = (1, 1)$, $F = (0, 1)$, $G = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ $H = (-\sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2)$. **363.** $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1/5, 1)$, $D = (0, 1)$, $P = (1/6, 5/6)$, $Q = (0, 5/4)$. **364.** a) $M_1 = (-x_0, -y_0)$; b) $M_2 = (x_0, -y_0)$; c) $M_3 = (-x_0, y_0)$, d) $M_4 = (y_0, x_0)$. **365.** Body A, B sú súmerné podľa osi y, body A, C podľa osi x, body A, D podľa počiatku, body B, C podľa počiatku, body B, D podľa osi x, body C, D podľa osi y. **366.** a) $A' = (3, -1)$, $B' = (4, -7)$, $C' = (1, -2)$;

b) $A' = (-3, 1)$, $B' = (-4, 7)$, $C' = (-1, 2)$; c) $A' = (-3, -1)$, $B' = (-4, -7)$, $C' = (-1, -2)$; d) $A' = (1, 3)$, $B' = (7, 4)$, $C' = (2, 1)$; e) $A' = (-1, -3)$, $B' = (-7, -4)$, $C' = (-2, -1)$. **368.** a) $A' = (1, 7\pi/4)$, $B' = (5, 3\pi/2)$, $C' = (4, 7\pi/6)$, $D' = (0, 0)$; b) $A' = (1, 5\pi/4)$, $D = (5, 3\pi/2)$, $C = (4, 11\pi/6)$, $D = (0, 0)$. **369.** a) $y = 0$; b) $x = 0$; c) $y = -x$; d) $y = 2$; e) $x = 2$; f) $y = 3$, $-2 \leq x \leq 3$; g) $x = 0$, $-1 \leq y \leq 2$. **370.** a) $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$; $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$; $x + y = 2$, $0 \leq x \leq 2$; b) $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 2$; c) $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$. **371.** a) $\varphi = 0$; b) $\varrho \leq 3$, $\varphi = \pi/6$; c) $\varrho < \infty$, $\varphi = \pi/6$; d) $\varphi = \pi/6$ a $\varphi = 7\pi/6$; e) $\varrho = 2$, $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$; f) $\varrho = 4$; g) $\varrho \leq 4$. **372.** a) $K_1 : \varrho \leq 2$, $K_2 : \varrho \leq 4 \cos \varphi$, pričom $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$; b) $\varrho = 2$, $\varrho = 4 \cos \varphi$ pričom $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$; c) $K_1 \cap K_2 : \varrho \leq 2$, $|\varphi| \leq \pi/3$ a $\varrho \leq 4 \cos \varphi$, $\pi/3 \leq |\varphi| \leq \pi/2$, $K_1 \cup K_2 : \varrho \leq 2$ a $2 \leq \varrho \leq 4 \cos \varphi$, $|\varphi| \leq \pi/3$, $K_2 - K_1 : 2 \leq \varrho \leq 4 \cos \varphi$, $|\varphi| \leq \pi/3$. **373.** 1. $\pi/4 \leq \varrho \leq 3\pi/4$, $2 \leq \varphi \leq 3$, 2. $\pi/3 \leq \varrho \leq 3\pi/4$, $3 - 2\pi \leq \varphi \leq 2$.

4,2. Súradnicové systémy v priestore

379. a) $A_1 = (3, 5, 0)$ $B_1 = (-1, 3, 0)$, $C_1 = (2, -5, 0)$, $D_1 = (0, 0, 0)$; b) $A_2 = (3, 0, 6)$, $B_2 = (-1, 0, 2)$, $C_2 = (2, 0, 0)$, $D_2 = (0, 0, -3)$; c) $A_3 = (0, 5, 6)$, $B_3 = (0, 3, 2)$, $C_3 = (0, -5, 0)$, $D_3 = (0, 0, -3)$; d) $A_x = (3, 0, 0)$, $B_x = (-1, 0, 0)$, $C_x = (2, 0, 0)$, $D_x = (0, 0, 0)$; e) $A_y = (0, 5, 0)$, $B_y = (0, 3, 0)$, $C_y = (0, -5, 0)$, $D_y = (0, 0, 0)$; f) $A_z = (0, 0, 6)$, $B_z = (0, 0, 2)$, $C_z = (0, 0, 0)$, $D_z = (0, 0, -3)$. **380.** a) R_{yz}; b) R_{xz}; c) R_{yx}; d) na osi o_z; e) na osi o_x; f) na osi o_y. **381.** a) $D' = (a, b, -c)$; b) $D' = (a, -b, c)$; c) $D' = (-a, b, c)$; d) $D' = (a, -b, -c)$; e) $D' = (-a, b, -c)$; f) $D' = (-a, -b, c)$; g) $D' = (-a, -b, -c)$. **382.** a) $A' = (2, -1, -1)$, $B' = (5, 5, -4)$, $C' = (3, 2, 1)$; b) $A' = (-2, -1, 1)$, $B' = (-5, 5, 4)$, $C' = (-3, 2, -1)$; c) $A' = (2, 1, 1)$, $B' = (5, -5, 4)$, $C' = (3, -2, -1)$; d) $A' = (2, 1, -1)$, $B' = (5, -5, -4)$, $C' = (3, -2, 1)$; e) $A' = (-2, -1, -1)$, $B' = (-5, 5, -4)$, $C' = (-3, 2, 1)$; f) $A' = (-2, 1, 1)$, $B' = (-5, -5, 4)$, $C' = (-3, -2, -1)$; g) $A' = (-2, 1, -1)$, $B' = (-5, -5, -4)$, $C' = (-3, -2, 1)$. **383.** $C = (3, 3, -3)$, $E = (-3, -3, 3)$, $F = (3, -3, 3)$, $H = (-3, 3, 3)$. **384.** a) $A = (0, 0, 0)$, $B = (a, 0, 0)$, $C = (a, a, 0)$, $D = (0, a, 0)$, $E = (0, 0, a)$, $F = (a, 0, a)$, $G = (a, a, a)$, $H = (0, a, a)$; b) $V_1 = A$, $V_2 = F$, $V_3 = C$, $V_4 = H$, alebo $V_1 = E$, $V_2 = D$, $V_3 = B$, $V_4 = G$; c) $V_1 = (a/2, 0, a/2)$, $V_2 = (a, a/2, a/2)$, $V_3 = (a/2, a, a/2)$, $V_4 = (0, a/2, a/2)$, $V_5 = (a/2, a/2, a)$, $V_6 = (a/2, a/2, 0)$. **385.** a) $S = (4, 4, 4)$; b) $S = (4, 4, -4)$; c) $S = (-4, -4, -4)$. **387.** a) $A' = (3, 7\pi/4, -1)$, $B' = (4, 5\pi/4, 2)$, $C' = (1, 3\pi/2, -3)$; b) $A' = (3, 5\pi/4, 1)$, $B' = (4, 7\pi/4, -2)$, $C' = (1, 3\pi/2, 3)$; c) $A' = (3, 5\pi/4, -1)$, $B' = (4, 7\pi/4, 2)$, $C' = (1, 3\pi/2, -3)$; d) $A' = (3, \pi/4, -1)$, $B' = (4, 3\pi/4, 2)$, $C' = (1, \pi/2, -3)$. **388.** $A = (0, 0, 0)$, $B = (a, 0, 0)$, $C = (a\sqrt{2}, \pi/4, 0)$, $D = (a, \pi/2, 0)/E = (0, 0, a)$, $D = (a, 0, a)$, $G = (a\sqrt{2}, \pi/4, a)$, $H = (a, \pi/2, a)$ alebo $A' = A$, $B' = B$, $C' = (a\sqrt{2}, 7\pi/4, 0)$, $D' = (a, 3\pi/2, 0)$, $E' = E$, $F' = F$, $G' = (a\sqrt{2}, 7\pi/4, a)$, $H = (a, 3\pi/2; a)$. **390.** a) $A' = (1, 0, 0)$, $B' = (1, \pi/2, \pi/4)$, $C' = (3, \pi/4, -\pi/4)$, $D' = (5, \pi/4, -\pi/6)$; b) $A' = (1, \pi, 0)$, $B' = (1, 3\pi/2, \pi/4)$, $C' = (3, 5\pi/4, -\pi/4)$, $D' = (5, 5\pi/4, -\pi/6)$; c) $A' = (1, 0, 0)$, $B' = (1, 3\pi/2, \pi/4)$, $C' = (3, 7\pi/4, -\pi/4)$, $D' = (5, 7\pi/4, -\pi/6)$; d) $A' = (1, 0, 0)$, $B' = (1, 3\pi/2, -\pi/4)$, $C' = (3, 7\pi/4, \pi/4)$, $D' = (5, 7\pi/4, \pi/6)$. **391.** $A = (a\sqrt{2}, 0, 0)$, $B = (a, \pi/4, 0)$, $C = (0, 0, 0)$, $D = (a, 7\pi/4, 0)$, $E = (a\sqrt{3}, 0, \operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $F = (a\sqrt{2}, \pi/4, \pi/4)$, $G = (a, 0, \pi/2)$, $H = (a\sqrt{2}, 7\pi/4, \pi/4)$ alebo $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$, $D' = D$, $E' = (a\sqrt{3}, 0, -\operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $F' = (a\sqrt{2}, \pi/4, -\pi/4)$, $G' = (a, 0, -\pi/2)$, $H' = (a\sqrt{2}, 7\pi/4, -\pi/4)$; b) $A = (a\sqrt{3}/2, 0, \operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $B' = (a\sqrt{3}/2, \pi/2, \operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $C = (a\sqrt{3}/2, \pi, \operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $D = (a\sqrt{3}/2, 3\pi/2, \operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $E = (a\sqrt{3}/2, 0, -\operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $F = (a\sqrt{3}/2, \pi/2, -\operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $G = (a\sqrt{3}/2, \pi, -\operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$, $H = (a\sqrt{3}/2, 3\pi/2, -\operatorname{arctg}\sqrt{2}/2)$. **392.** a) $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$; b) $y = z = 0$, $x = z = 0$, $x = y = 0$; c) $x = -2$,

$y = 3$, $z = 5$; d) rovnobežka s $o_x : y = 3$, $z = 5$; rovnobežka s $o_y : x = -2$, $z = 5$; rovnobežka s o_z: $x = -2$, $y = 3$; e) $x = y = z$. **393.** a) $D = (1, 2, 3)$, $F = (4, 5, 6)$, $G = (1, 5, 6)$, $H = (1, 2, 6)$; b) $x = 1$, $x = 4$, $y = 2$, $y = 5$, $z = 3$, $z = 6$; c) $1 \leqq x \leqq 4$, $3 \leqq z \leqq 6$, $y = 5$; $2 \leqq y \leqq 5$, $3 \leqq z \leqq 5$, $x = 1$; d) $y = 5$, $z = 6$; $x = 4$, $z = 3$; $x = 1$, $y = 2$; e) $x = 4$, $y = 2$; $3 \leqq z \leqq 6$; $x = 1$, $z = 6$, $2 \leqq y \leqq 5$; f) $1 \leqq x \leqq 4$, $2 \leqq y \leqq 5$, $3 \leqq z \leqq 6$. **396.** a) $u = 0$; b) $\varphi = u = 0$; c) $\varrho = \varphi = 0$; d) $\varphi = 0$ alebo $\varphi = \pi$; e) $\varphi = 2$ alebo $\varphi = \pi - 2$; f) $\varrho = 6$; g) $\varrho = 4$, $0 \leqq u \leqq 10$; h) $\varrho = 4$, $\varphi = 1$; i) $\varrho = 7$, $u = 0$; j) $\varrho = 4$, $u = 8$. **398.** a) $\vartheta = 0$; b) $\varphi = \vartheta = 0$; c) $r = 3$; d) $r \leqq 3$; e) $\vartheta = 5\pi/12$; f) $\varphi = 0$ alebo $\varphi = \pi$; g) $\varphi = 2$ alebo $\varphi = \pi - 2$; h) $\varphi = 1$, $\vartheta = -1$ alebo $\varphi = \pi + 1$, $\vartheta = 1$; i) $r = 5\sqrt{2}$, $\vartheta = \pi/4$; j) $r = 2$, $\vartheta = 0$.

4,3. Vzdialenosť dvoch bodov v rovine a v priestore

400. a) $2\sqrt{2}$; b) 5; c) $5\sqrt{5}$; d) 6; e) 13/2. **401.** $18 + 8\sqrt{2}$. **402.** $\varrho(A, B) = 5$, $\varrho(B, C) = 10$, $\varrho(C, D) = \sqrt{5}$, $\varrho(D, E) = 13$, $\varrho(E, A) = \sqrt{109}$, $\varrho(A, C) = 5$, $\varrho(A, D) = 2\sqrt{2}$, $\varrho(B, D) = \sqrt{61}$, $\varrho(B, E) = 5\sqrt{2}$, $\varrho(C, E) = \sqrt{218}$. **403.** a) Pravouhlý rovnoramenný; b) pravouhlý; c) rovnostranný; d) pravouhlý. **405.** a) 68; b) 34. **406.** 80. **407.** $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$. **408.** (0, 4) alebo (0, 10). **409.** $(0, 3 + \sqrt{5})$ alebo $(0, 3 - \sqrt{5})$. **410.** 7 alebo -3. **411.** Ak pravý uhol je pri vrchole P, potom $P = (-8, 0)$ alebo $P = (-3, 0)$. Ak pravý uhol je pri vrchole N, potom $N = (-4/3, 0)$; ak pravý uhol je pri vrchole M, potom $M = (-29/3, 0)$. **412.** a) $C = (-4, 7)$, $D = (-5, 0)$; b) $C = (-2, 8)$, $D = (1, 4)$ alebo $C = (-10, 2)$, $D = (-7, 2)$. **413.** $S = (7 - 2\sqrt{6}, 7 - 2\sqrt{6})$, $r = 7 - 2\sqrt{6}$ alebo $S = (7 + 2\sqrt{6}, 7 + 2\sqrt{6})$, $r = 7 + 2\sqrt{6}$. **414.** $S = (-10, 10)$ alebo $S = (-10, -2)$. **415.** $M = (10, -5)$. **416.** a) $S = (2{,}1; 0{,}9)$, $r = \sqrt{442}/10$; b) $S = (4, 2)$, $r = 10$, c) $S = (-5, -1)$, $r = 5$. **417.** $\varrho(M_1, M_2) = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$. a) $\sqrt{7}$; b) $a = 2\sqrt{13}$, $b = 3\sqrt{5}$, $c = \sqrt{73 - 24\sqrt{3}}$. **418.** a) $153 - 36\sqrt{3}$; b) $26 + 12\sqrt{2}$. **419.** $\sqrt{35}$, 6, 14, 25. **420.** a) 7; b) $\sqrt{10}$; c) 9. **421.** $3 + 2\sqrt{5} + \sqrt{29}$. **422.** $\varrho(A, B) = \sqrt{11}$, $\varrho(A, C) = 7$, $\varrho(A, D) = \sqrt{94}$, $\varrho(B, C) = 7\sqrt{2}$, $\varrho(B, D) = 13$, $\varrho(C, D) = 5$. **423.** a) Pravouhlý; b) rovnoramenný; c) ani pravouhlý ani rovnoramenný; d) pravouhlý. **424.** a) Jeden uhol tupý; b) všetky uhly ostré; c) všetky uhly ostré. **425.** $(-4 + 6\sqrt{2}, 0, 0)$ alebo $(-4 - 6\sqrt{2}, 0, 0)$. **426.** (0, 2, 0). **427.** Ak $\varrho(A, C) = \varrho(B, C)$, potom $C = (0, 0, 14/9)$; ak $\varrho(A, B) = \varrho(B, C)$, potom $C = (0, 0, -2 + 4\sqrt{7})$ alebo $(0, 0, -2 - 4\sqrt{7})$; ak $\varrho(A, B) = \varrho(A, C)$, potom $C = (0, 0, 7 + \sqrt{129})$ alebo $C = (0, 0, 7 - \sqrt{129})$. **428.** $\sqrt{37}$, $2\sqrt{58}$, $\sqrt{197}$. **429.** a) $(-19/13, 0, -21/13)$; b) $(0, 1, -2)$. **430.** (83/17, 67/17, 73/17). **431.** $S = (1, 3, 7)$, $r = 3$. **432.** $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $B = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ $C = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $V = (0, 0, 0)$.

4,4. Obsah mnohouholníka a objem štvorstena

433. a) 15; b) 9; c) 20; d) 34,5; e) 30. **434.** 20. **435.** $v_a = 5$, $v_b = 5\sqrt{2}/2$, $v_c = 5$. **436.** 1,4. **438.** a) Ležia; b) ležia; c) neležia. **439.** a) $C = (2, 5, 0)$ alebo $C = (5, 5; 0)$; b) $C = (0, 20)$ alebo $C = (0, 4)$; c) $C = (11, 3)$ alebo $C = (96/10, 72/10)$ alebo $C = (-3, 3)$ alebo $C = (-16/10, -12/10)$. **440.** $P = 0{,}5\,|\varrho_1\varrho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)|$. **441.** a) 5; b) $-3 + 12\sqrt{3}$. **442.** a) 9; b) 6; c) 17/2; d) 23/2. **443.** 15,5 ha. **444.** $C = (0, -5)$, $D = (1, 6)$ alebo $C = (24, -5)$, $D = (25, -6)$; b) $C = (2, -7)$, $D = (-1, -3)$ alebo $C = (2, 13/3)$, $D = (-1, 25/3)$. **445.** a) 14; b) 22, 5. **446.** a) Ležia; b) neležia; c) ležia. **447.** $a \neq -7$ alebo $b \neq 1{,}5$. **448.** $v_a = 25/\sqrt{106}$, $v_b = 5$, $v_c = 25/\sqrt{41}$. **449.** 3. **450.** 11. **451.** $D = (0, 9, 0)$ alebo $D = (0, -6, 0)$. **453.** a) Neležia; b) ležia.

4,5. Pojem vektora a základné operácie s vektormi*)

455. a) Bod; b) bod; c) bod; d) bod; e) vektor; f) vektor; g) vektor; h) bod. **457.** a) $3\mathbf{b}$; b) $-2\beta\mathbf{b}$; c) $\mathbf{o}$; d) $\mathbf{a}\cos(\alpha+\beta)$; e) $-2\beta\mathbf{a}+2\alpha\mathbf{b}$. **458.** a) $\mathbf{x}=3\mathbf{c}-\mathbf{a}-2\mathbf{b}$; b) $\mathbf{x}=\frac{1}{4}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$; c) $\mathbf{x}=-\frac{10}{3}\mathbf{a}+\frac{32}{9}\mathbf{b}$; d) nemá riešenie; e) $\mathbf{x}=\frac{2}{3}\mathbf{b}-\frac{1}{3}\mathbf{a}$; f) $\mathbf{x}=\frac{6}{5}\mathbf{a}-\frac{4}{5}\mathbf{b}$; g) $\mathbf{x}=(A-B)+\mathbf{a}$; h) $\mathbf{x}=(B-A)-2\mathbf{a}-\mathbf{b}$; i) $\mathbf{x}=\frac{1}{3}(A-B)$; j) $\mathbf{x}=\frac{2}{3}(B-A)-2\mathbf{a}$; k) nemá riešenie. **460.** $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$. **465.** Ťažisko n-uholníka, $T=B+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A_i-B)$, kde B je ľubovoľný bod roviny. **467.** $\mathbf{c}=-\mathbf{a}-\mathbf{b}$, **468.** $\mathbf{a}=\frac{1}{2}(-\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $\mathbf{b}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $\mathbf{c}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w})$. **469.** a) $|\mathbf{r}|=\sqrt{38}$, $\cos\alpha=3/\sqrt{38}$, $\cos\beta=2/\sqrt{38}$, $\cos\gamma=5/\sqrt{38}$; b) $|\mathbf{r}|=\sqrt{29}$, $\cos\alpha=2/\sqrt{29}$, $\cos\beta=3/\sqrt{29}$, $\cos\gamma=4/\sqrt{29}$. **470.** a) $\cos\alpha=-2/3$, $\cos\beta=1/3$, $\cos\gamma=2/3$; b) $\cos\alpha=2/\sqrt{22}$, $\cos\beta=-3/\sqrt{22}$, $\cos\gamma=3/\sqrt{22}$. **471.** a) $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\sqrt{3}/3$, alebo $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\sqrt{3}/3$; b) $\cos\alpha=-1/2$, $\cos\beta=\sqrt{3}/2$, $\cos\gamma=0$ alebo $\cos\alpha=-1/2$, $\cos\beta=-\sqrt{3}/2$, $\cos\gamma=0$. **472.** 45° alebo 135°. **473.** $x=y=2\sqrt{6}/3$, $z=4\sqrt{6}/3$ alebo $x=y=-4\sqrt{6}/3$. **474.** a) $\mathbf{a}=\{-3,-1\}$, $|\mathbf{a}|=\sqrt{10}$, $\alpha\doteq 161°34'$, $\beta\doteq 108°26'$, $\mathbf{a}^\circ=\{-3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}\}$, $\mathbf{b}=\{-8, 4\}$, $|\mathbf{b}|=4\sqrt{5}$, $\alpha\doteq 153°26'$, $\beta=63°26'$, $\mathbf{b}^\circ=\{-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\}$; b) $\mathbf{a}=\{4, 2, 0\}$, $|\mathbf{a}|=2\sqrt{5}$, $\alpha\doteq 26°34'$, $\beta\doteq 63°26'$, $\gamma=90°$, $\mathbf{a}^\circ=\{2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0\}$, $\mathbf{b}=\{5,-2,-9\}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{110}$, $\alpha\doteq 61°32'$, $\beta\doteq 101°$, $\gamma\doteq 149°20'$, $\mathbf{b}^\circ=\{5/\sqrt{110}, -2/\sqrt{110}, -9/\sqrt{110}\}$. **475.** a) $X=(3, 1, 4)$; b) $Y=(1, 5, -2)$; c) $\cos\alpha=1/\sqrt{14}$, $\cos\beta=-2/\sqrt{14}$, $\cos\gamma=3/\sqrt{14}$. **476.** $M=(2+4/\sqrt{3},\ 2+4/\sqrt{3},\ 2+4/\sqrt{3})$ alebo $M=(2-4/\sqrt{3},\ 2-4/\sqrt{3},\ 2-4/\sqrt{3})$. **477.** a) Nemá riešenie; b) $X=(4+5\sqrt{2}/2, 11/2, 3/2)$ alebo $X=(4-5\sqrt{2}/2, 11/2, 3/2)$; c) nemá riešenie. **478.** a) $\{-11, 12\}$; b) nemá zmysel; c) $\{0, -3, 18\}$; d) $\{-137/7, -173/7, 233/7\}$. **479.** a) Nemá zmysel; b) $(5, 11, 4)$; c) $\{-10, 12-, 8\}$; d) $\{-3, -2, 4\}$; e) $\{11, 18, -5\}$. **480.** a) $(5, 1, 7)$; b) $(5, -1, 4)$; c) $(13, 14, -24)$. **481.** $\sqrt{97}$. **482.** $D=(5, 0, 5)$. **483.** $B=(7, 7)$. **484.** $\sqrt{5}$. **485.** a) $|\mathbf{a}|=\sqrt{29}$, $\cos\alpha=3/\sqrt{29}$, $\cos\beta=2/\sqrt{29}$, $\cos\gamma=4/\sqrt{29}$; b) $|\mathbf{a}|=\sqrt{5}$, $\cos\alpha=2/\sqrt{5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1/\sqrt{5}$; c) $|\mathbf{a}|=2\sqrt{3}$, $\cos\alpha=1/\sqrt{3}$, $\cos\beta=1/\sqrt{3}$, $\cos\gamma=-1/\sqrt{3}$; d) $|\mathbf{a}|=\sqrt{2}$, $\cos\alpha=1/\sqrt{2}$, $\cos\beta=1/\sqrt{2}$, $\cos\gamma=0$. **486.** a) $\mathbf{c}=82\mathbf{a}+59\mathbf{b}$; b) $\mathbf{c}=10\mathbf{a}-3\mathbf{b}$. **487.** a) $\mathbf{d}=(34\mathbf{a}+\mathbf{b})/25$; b) $\mathbf{d}=3\mathbf{a}$. **488.** a) $\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$; b) $\mathbf{d}=4\mathbf{a}-\mathbf{c}$; c) $\mathbf{d}=-2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+5\mathbf{c}$. **489.** $m=5/8$, $n=-33/32$. **490.** $11\mathbf{a}-7\mathbf{b}$, $10\mathbf{a}-7\mathbf{b}$, $11\mathbf{a}-8\mathbf{b}$, $32\mathbf{a}-22\mathbf{b}$. **491.** $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sú kolineárne, $\mathbf{b}=-2\mathbf{c}$. **492.** a) $m=-1$, $n=4$; b) $m=-2$, $n=-2{,}5$ alebo $m=0{,}4$, $n=0{,}5$. **493.** $N=(6, -5, 13)$. **494.** $x=4$. **495.** $|\mathbf{F}|=15$, $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=1/3$, $\cos\gamma=2/3$. **496.** $\cos\alpha=7/11$, $\cos\beta=6/11$, $\cos\gamma=6/11$ alebo $\cos\alpha=7/11$, $\cos\beta=6/11$, $\cos\gamma=-6/11$; $B=(9, 7, 1)$ alebo $B=(9, 7, -11)$. **497.** 7,07 kp, výslednica zviera s osami o_x a o_y uhly $\alpha\doteq 8°08'$, $\beta\doteq 98°08'$. 498. 5 kp, ak jednotlivé sily pôsobia v rovinách R_{xy}, R_{yz}, R_{xz}, potom výslednica zviera so súradnicovými osami uhly $\alpha\doteq 55°33'$, $\beta\doteq 64°54'$, $\gamma=45°$.

*) Kvôli jednoduchosti, keď nemôže vzniknúť omyl, budeme niekedy o umiestnení vektora $\mathbf{a}$ hovoriť ako o vektore $\mathbf{a}$.

4.6. Skalárny a vektorový súčin dvoch vektorov, zmiešaný súčin troch vektorov

499. a) 10; b) 16, 25, c) 21; d) —76; e) 304. **500.** a) $\sqrt{58 + 21\sqrt{2}}$, $\sqrt{58 - 21\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{21}$, $\sqrt{61}$; c) 5, 5. **501.** a) —12; b) 11. **502.** a) 22; b) 20. **503.** a) —34, $\sqrt{53}$, 5, —34/5 $\sqrt{53}$, 10, 146, —2652; b) 0, 10, 15, 0, 325, 325, 0; c) 33, $\sqrt{26}$, $\sqrt{89}$, 33/$\sqrt{2314}$, 181, 49, 3795, d) 24, $\sqrt{45}$, $\sqrt{45}$, 8/15, 138, 42, 2160. **504.** 60°. **505.** a) Sú súhlasne rovnobežné alebo aspoň jeden z nich je rovný 0; b) nesúhlasne rovnobežné a $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$ alebo $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$; c) nesúhlasne rovnobežné alebo $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$; d) súhlasne rovnobežné a $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}|$ alebo $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. **507.** —3/2. **508.** 115°41′36″. **509.** a) 2; b) 8 alebo 2. **510.** $\varphi \doteq 41°48'39''$; b) $\varphi \doteq 94°04'27''$. **511.** a) $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 45°$, trojuholník je pravouhlý a rovnoramenný; b) $\alpha \doteq 63°36'43''$, $\beta \doteq 86°27'08''$, $\gamma \doteq 29°56'09''$; c) $\alpha \doteq 104°10'36''$, $\beta = \gamma \doteq 37°54'42''$, trojuholník je rovnoramenný. **512.** 90°. **513.** Štvoruholník je štvorec. **514.** {3/2, —3, 13}. **515.** a) {—2, 2, 2}; b) {26/15, —101/15, —61/15}. **516.** a) 5 $\sqrt{2}$/2; b) 5/2; c) —5/2. **517.** —4/7. **518.** a) 15/$\sqrt{14}$; b) —1,5 + 3 $\sqrt{2}$; c) —5 $\sqrt{3}$; d) 45/$\sqrt{59}$. **519.** a) 86/13; b) 43/$\sqrt{21}$; c) 821/$\sqrt{273}$. **520.** 4 kpm, 73°23′54′. **521.** a) 3 $\sqrt{3}$; b) 32; c) 6. **522.** a) 3; b) 15; c) $\boldsymbol{o}$. **523.** a) 4; b) 0; c) 0; d) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. **524.** 9. **525.** {0, 3, 3}. **526.** a) $\boldsymbol{c}^0 = (\boldsymbol{j} \times 2\boldsymbol{k})/\sqrt{5}$; b) $\sqrt{20/21}$. **527.** a) $2\boldsymbol{i}$; b) $3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$; c) $\boldsymbol{o}$; d) $6\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$. **528.** a) $\sqrt{38}$/2; b) $\sqrt{833}$. **529.** a) $\boldsymbol{x}$ = {—6, 12, —39} b) $\boldsymbol{x}$ = {1, —2, 13/2}. **530.** a) {6, —135, —12}, {—252, 96, —42}, 75, 75; b) {—10, 11, —3}, {—15, —9, 7}, —25, —25. **534.** a) {8, —7, —10}, $\sqrt{213}$, {16, —14, —20}, {13, —38, 37}, {28, 82, —35}; b) {35, —16, 6} $\sqrt{1517}$, {70, —32, 12}, {8, —47, —172}, {—146, —280, 105}. **535.** a) D = {2, —6, 9}, $|D|$ = = 11 kpm, $\cos\alpha = 2/11$, $\cos\beta = -6/11$, $\cos\gamma = 9/11$; b) D = {4, —22, 1}, $|D| \doteq$ 22,38 kpm, $\cos\alpha = 4/\sqrt{501}$, $\cos\beta = -22/\sqrt{501}$, $\cos\gamma = 1/\sqrt{501}$. **536.** D = {48, —44, 56}, $|D| \doteq$ 85,79 kpm, $\cos\alpha = 12/\sqrt{461}$, $\cos\beta = -11/\sqrt{461}$, $\cos\gamma = 11/\sqrt{461}$. **537.** a) 12 alebo —12; b) 70. **538.** 31, —31. **539.** a) —31, —31; b) 31, 31. **540.** a) Pravotočivá; b) ľavotočivá; c) ľavotočivá; d) komplanárna; e) ľavotočivá; f) ľavotočivá. **541.** a) $\boldsymbol{b}_1$ = {1, 0, 0}, $\boldsymbol{b}_2$ = {0, 1, 0}, $\boldsymbol{b}_3$ = {0, —1, 1}; b) $\boldsymbol{b}_1$ = {—3/47, 13/47, —1/47}, $\boldsymbol{b}_2$ = {12/47, —5/47, 4/47}, $\boldsymbol{b}_3$ = {5/47, —6/47, 19/94}. **543.** 32 $\sqrt{2}$. **544.** V = 41/6 v = 41/$\sqrt{1457}$. **545.** Aspoň jeden z vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ musí byť nulový, alebo vektor $\boldsymbol{b}$ rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{c}$, alebo vektor $\boldsymbol{a}$ kolmý na vektor $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$. **547.** a) Rovnosť platí, keď aspoň jeden vektor je nulový, alebo vektor $\boldsymbol{b}$ je rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{c}$, alebo vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sú komplanárne alebo vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sú navzájom kolmé; nerovnosť platí, keď vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ nie sú navzájom kolmé; b) rovnosť platí ako v prípade a), avšak, ak vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sú navzájom kolmé, musia tvoriť pravotočivý systém; c) ak vektor $\boldsymbol{a}$ je kolmý na vektor $\boldsymbol{b}$ a vektor $\boldsymbol{b}$ je kolmý na vektor $\boldsymbol{c}$, alebo jeden z vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ je nulový, alebo vektor $\boldsymbol{a}$ rovná sa vektoru $\boldsymbol{c}$.

4.7. Priamka v rovine

550. a) 9; b) 11/13; c) —3. **551.** a) 0; b) 2; c) —1; d) 8. **552.** a) 6; b) 1/2; c) —4; d) —3/2. **553.** $C = (5)$, $D = (13)$. **554.** $A = (-5)$, $B = (4)$. **555.** a) $C = (5/2, 0)$; $C = (13/5, 13/5)$; c) $C = (-2/3, 5/3)$; d) $C = (11, 5)$. **556.** a) $S = (1, -2)$; b) $A = (10, -8)$; c) $B = (-1, 0)$. **557.** $B = (9, 2)$. **558.** a) $C = (5, -8)$, $D = (2, -12)$; b) $D = (-2, 7)$. **559.** a) $A = (-2, -6)$, $B = (8, 2)$, $C = (-6, 10)$; b) $S_1 = (15/2, 3)$, $S_2 = (11/2, 7/2)$, $S_3 = (5, 1/2)$. **560.** a) —1, —1, 2; b) 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}$, 4, $\frac{3}{4}$. **561.** $A = (31, -25)$, $B = (42, -34)$. **562.** —3/2. **563.** $C = (15/4, 1/2)$ $D = (9/2, 2)$, $E = (21/4, 7/2)$; $C = (18/5, 1/5)$, $D = (21/5, 7/5)$, $E = (24/5, 13/5)$, $F = (27/5, 19/5)$ **564.** a) $A = (4, -2)$, $B = (1, 7)$; b) $A = (17/3, -7)$, $B = (-8/3, 8)$. **565.** $B = (-1, 9/4)$. **566.** $D_1 =$ $= (2, -4)$, $D_2 = (-6, -10)$. **567.** $C = (13, 7)$, $D = (11/2, 1)$. **568.** $P = (11/2, -4)$, $\lambda(B, D, P) =$ $= 1/3$. **569.** a) $D = (9, -17)$; b) $D = (10, 6)$. **570.** $t_A = \sqrt{74}$, $t_B = \sqrt{17}$, $t_C = \sqrt{65}$, $T = (2/3, -4/3)$. **571.** $C = (0, 2)$, $T = (-1, 0)$. **572.** $T = (26/5, 17/5)$. **573.** $T = (49/20, 9/20)$. **574.** a) $T = (3/2, 1)$;

b) $T = (5, 1)$. **Návod**. Pri výpočte použite vzorec pre určenie súradníc ťažiska sústavy n hmotných bodov

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

kde m_i, $i = 1, \ldots, n$, sú hmoty bodov. **576.** $T = (35/4, 21/4)$. **577.** $T = (15/2, 15/2)$. **578.** a) $x = t$, $y = t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; b) $x = -3 + 7t$, $y = 2 + t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; c) $x = -5 - 3t$, $y = -3 + 4t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ **579.** a) Úsečka, $A = (3, -7)$, $B = (-17, 113)$; b) polpriamka; c) polpriamka d) úsečka, $A = (-18, -1)$, $B = (-3, -1)$; e) polpriamka; f) úsečka, $A = (0, 6)$, $B = (1, 4)$; g) úsečka, $A = (3, 2)$, $B = (2, 5/2)$. **580.** $x = 2t$, $y = 4 + 3t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; $x = 2 + 3t$, $y = 7 - 6t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; $x = 5t$, $y = 4 - 3t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; $x = 7t/2$, $y = 4$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; $x = 2 + t/2$, $y = 7 - 9t/2$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; $x = 5 - 4t$, $y = 1 + 9t/2$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. **581.** $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 4t$, $t \in \langle 0, \infty)$; $x = 5 - 4t$, $y = -3 + 9t$, $t \in \langle 0, \infty\rangle$. **582.** a) $x = 2 - t$, $y = -1 + 10t$*); b) $x = 4 - 2t$, $y = -3 + 2t$; c) $x = 4 - 3t$, $y = -3 + 12t$, $t \in \langle 0, \infty)$; d) $x = 4 - 2t$, $y = -3 + 2t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. **583.** $y_A = -3/2$, $y_B = -2$, $y_C = 1$, $y_D = -5/2$. **584.** $x_A = 2$, $x_B = 7/2$, $x_C = -2$, $x_D = 1/2$, $x_E = 13/2$, $x_F = -1$. **585.** a) A, B ležia na priamke; C, D neležia na priamke; b) A, B ležia na priamke; C, D neležia na priamke; c) A, B neležia na priamke; C, D ležia na priamke. **586.** a, b, d nie sú smerovými vektormi danej priamky; c je smerovým vektorom danej priamky. **587.** a) $5x - 4y + 1 = 0$; b) $2x + 3y - 4 = 0$; c) $x + y - 1 = 0$; d) $x - y = 0$; e) $3x - 5y + 11 = 0$. **588.** a) $\sqrt{3}x - 3y + 9 = 0$; b) $x - y - 10 = 0$; c) $x + y - 2 = 0$; d) $2x - y - 3 = 0$; e) $x + 3y = 0$; f) $3x + y - 1 = 0$; g) $4x - 3y - 12 = 0$; h) $2x + y + 2 = 0$; **589.** a) $x/10 + y/4 - 1 = 0$; b) $x/(-7/3) + y/(-7/4) - 1 = 0$; c) $x/(-2/5) + y/(1/6) - 1 = 0$; d) neexistuje; e) neexistuje. **590.** a) P $(23/3, 0)$, $Q = (0, 23/2)$; b) $P = (-7/2, 0)$, $Q = (0, 2)$; c) os o_x nepretína, $Q = (0, 2)$; d) $P = (-1, 0)$, os o_y nepretína. **591.** a) $k = 3/4$, $p = -10/3$, $q = 5/2$, $y = 3x/4 + 10/4$, $x/(-10/3) + y/(10/4) = 1$; b) $k = -2$, $p = 7/2$, $q = 7$, $y = -2x + 7$, $x/(7/2) + y/7 = 1$; c) nemá smernicu, $p = 2$; d) $k = -4/3$, $p = 1/4$, $q = 1/3$, $y = -4x/3 + 1/3$, $x/(1/4) + y/(1/3) = 1$; e) $k = 3/2$, $y = 3x/2$; f) $k = 6/5$, $y = 6x/5$. **592.** a) $p = -1$, $q = 1$; b) $p = -4$, $q = -4$; c) $p = (-8 + \sqrt{3})/\sqrt{3}$, $q = 8 - \sqrt{3}$; d) $p = -5\sqrt{3} + 3$, $q = 5 + \sqrt{3}$. **593.** a) $k = 7/4$, $p = 6/7$, $q = -5/4$; b) $k = 5/11$, $p = -26/5$, $q = 16/11$; c) $k = 3/2$, $p = 1/3$, $q = -1/2$. **594.** $b = 30$. **595.** $P = (2, 0)$, $Q = (0, -7/2)$; b) $P = (-2, 0)$, $Q = (0, 3)$. **596.** a) $y = 1$; b) $x = 4$; c) $-x + 6y - 8 = 0$; d) $x - y + 3 = 0$. **597.** a) $k = -2$, $-5y + 33 = 0$; b) $k_1 = 3$, $k_2 = -3$, $5x + 8 = 0$, $-x + 56 = 0$; c) $k_1 = 5/3$, $k_2 = 1$, $11x/3 - 56y/9 = 0$, $3x - 8y = 0$. **598.** a) Nie je, $-2x/\sqrt{13} + 3y/\sqrt{13} - 5/\sqrt{13} = 0$; b) je; c) nie je, $-5x/\sqrt{74} + 7y/\sqrt{74} - 10/\sqrt{74} = 0$; d) nie je, $2x/\sqrt{5} - y/\sqrt{5} - 1/\sqrt{5} = 0$; e) nie je, $13x + 12y/13 + 1 = 0$; f) je; g) nie je; h) nie je, $x - 7/2 = 0$. **599.** a) $3x/5 - 4y/5 - 4 = 0$; b) $-2x/\sqrt{5} + y/\sqrt{5} - 3/\sqrt{5} = 0$; c) $15x/17 - 8y/17 - 60/17 = 0$; d) $3x/\sqrt{10} - y/\sqrt{10} - 7/\sqrt{10} = 0$; e) $-x/\sqrt{5} - 2y/\sqrt{5} - 4/\sqrt{5} = 0$. **600.** a) $y = -2x/3 + 4$, $x/6 + y/4 = 1$, $2x/\sqrt{13} + 3y/\sqrt{13} - 12 = 0$, $x = t$, $y = 4 - 2t/3$; b) $3x - y - 7 = 0$, $x/(7/3) + y/(-7) = 1$, $3x/\sqrt{10} - y/\sqrt{10} - 7/\sqrt{10} = 0$, $x = t$, $y = -7 + 3t$; c) $x = 2$, $y = t$; d) $4x + 3y - 12 = 0$, $y = -4x/3 + 4$, $4x/5 + 3y/5 - 12 = 0$, $x = t$, $y = 4 - 4t/3$; e) $3x - 4y + 50 = 0$, $x/(-50/3) + y/(50/4) = 1$; $y = 3x/4 + 50/4$; $x = t$, $y = 50/4 + 3t/4$; f) $x + 2y - 11 = 0$, $x/11 + y/(11/2) = 1$; $x/\sqrt{5} + 2y/\sqrt{5} - 11/\sqrt{5} = 0$, $y = -x/2 + 11/2$. **601.** a) $C_1 = (3, 6)$, alebo $C_2 = (53/7, -22/7)$; b) $C = (-1, -9)$, alebo $B = (2, 0)$. **602.** $x = 5t$, $y = 1 + 3t$; $x = 7t$, $y = 1 - t$; $x = 5 + 7t$, $y = 4 - t$; $x = 7 + 5t$, $y = 3t$, pričom $t \in \langle 0, 1\rangle$. **603.** $x - 2y - 12 = 0$. **604.** $-11x + y + 41 = 0$, $x + y - 7 = 0$. **605.** a) $x + y - 9 = 0$;

*) V ďalšom, ak nebude pri parametrických rovniciach uvedený interval pre t, budeme tým rozumieť rovnice priamky.

b) $7x + 6y - 42 = 0$. **606.** $x + y - 11 = 0$, $10x + 12y - 120 = 0$. **607.** $5x + y - 14 = 0$, $x - 5y - 8 = 0$. **608.** $\varrho \cos(\varphi - \alpha) = p$. **609.** a) $\varrho(\sin\varphi - 3\cos\varphi) = 2$; b) $\varrho(2\cos\varphi - 3\sin\varphi) = 3$; c) $\varrho(\cos\varphi + \sqrt{15}\sin\varphi) = -8$; d) $\varrho(\cos\varphi - 2\sin\varphi) = 2$. **610.** $\varrho\cos(\varphi - \alpha) = \varrho_1\cos(\varphi_1 - \alpha)$. **611.** $\varrho\sin(\beta - \varphi) = \varrho_0\sin(\beta - \varphi_0)$. **612.** $\varrho\sin(\varphi - \varphi_1)\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \varrho_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\varphi - \varphi_1)}$. **613.** a) $\varrho\sin(\pi/4 - \varphi) = 4$; b) $2\varrho\cos(\varphi - 135°) = -3\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{29 - 10\sqrt{3}}\,\varrho\sin(\varphi - 30°) = 5\sqrt{\varrho^2 + 4 - 4\cos(\varphi - 30°)}$; d) $\varrho\sin(150° - \varphi) = 2\sqrt{3}$. **614.** a) 6; b) 2; c) $4\sqrt{3}$.

4,8. Vzájomná poloha bodov a priamok v rovine

615. $p_1 \parallel p_2$, $p_1 \perp p_4$, $p_2 \perp p_4$. **616.** a) $4x - 11y - 93 = 0$; b) $x = 4 - 2t$, $y = -7 + 9t$; c) $4x + 3y + 5 = 0$; d) $x = 4$; e) $y = -7$; f) $x + 7y + 45 = 0$. **617.** a) $x = 2 + 4t$, $y = 5 + 3t$; b) $5x - 8y + 30 = 0$; c) $x = 2 + 2t$, $y = 5 + 3t$. **618.** a) $5x - 2y - 14 = 0$, $x + 4y - 16 = 0$, $7x + 6y + 42 = 0$; b) $7x - y - 31 = 0$, $x - 7y + 23 = 0$, $x + y + 7 = 0$. **619.** a) $8x + 20y - 13 = 0$; b) $2x + 10y + 3 = 0$; c) $6x + 10y - 9 = 0$. **620.** a) $x + y - 4 = 0$; b) $2x - y - 10 = 0$. **621.** a) $x - 2y + 3 = 0$, $2x - y - 5 = 0$, $x + y - 8 = 0$; b) $3x - 2y - 2 = 0$, $x - 5y - 5 = 0$, $2x + 3y + 3 = 0$. **622.** a) $7x - 11y + 5 = 0$, $11x + 7y - 65 = 0$; b) $x = 4 - 3t$, $y = 3 + 5t$; $x = 4 + 5t$, $y = 3 + 3t$; c) $x = 4 - 3t$, $y = 3 + 2t$; $x = 4 + 2t$, $y = 3 + 3t$; d) $x + 2y - 10 = 0$, $2x - y - 5 = 0$. **623.** a) $\varphi = 45°$; b) $\varphi = \pi/2$; c) $\operatorname{tg}\varphi = (a^2 - b^2)/2ab$; d) $\operatorname{tg}\varphi = 3/4$, $\varphi \doteq 48°30'$; e) $\varphi = \pi/4$; f) $\cos\varphi = 8/5\sqrt{17}$. **624.** a) $\alpha = \pi/2$, $\beta = \gamma = \pi/4$; b) $\alpha = \pi/2$, $\beta \doteq 26°33'54''$, $\gamma \doteq 63°26'6''$. **625.** a) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x + 3y - 7 = 0$, $3x - 4y - 24 = 0$, $4x + 3y + 32 = 0$, $7x - y - 31 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$; b) $3x - 4y + 13 = 0$, $4x + 3y - 16 = 0$, $3x - 4y - 12 = 0$, $4x + 3y - 41 = 0$, $x + 7y - 29 = 0$, $7x - y - 28 = 0$; c) $2x + y + 7 = 0$, $x - 2y - 14 = 0$, $2x + y - 23 = 0$, $x + 3y - 9 = 0$, $3x - y - 7 = 0$. **626.** Úloha má tri riešenia: $3x + 2y - 15 = 0$, $x + 5y - 5 = 0$, alebo $3x + 2y - 15 = 0$, $5x - y - 25 = 0$, alebo $x + 5y - 5 = 0$, $5x - y - 25 = 0$. **627.** $5x - 4y - 7 = 0$, $4x - 5y - 8 = 0$. **628.** $4x + 2y + 19 = 0$. **629.** $4x - y - 12 = 0$, $x + 3y - 29 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$. **630.** a) Pretína, $P = (3, 5)$; b) pretína, $P = (61/23, 122/23)$; c) nepretína. **631.** a) $P = (0, 26/3)$, os o_x nepretína; b) $P = (-5, 0)$, $Q = (0, 5/2)$; c) $P = (7, 0)$, os o_y nepretína. **632.** Nepretína. **633.** a) $0 < -a < b$, $b \neq -2a$; b) $a = -7/6$, $b = 3/4$. **634.** a) Nepretínajú sa; b) pretínajú sa; c) nepretínajú sa. **635.** a) Rôznobežky; b) splývajú; c) splývajú; d) rovnobežky; e) rôznobežky; f) rovnobežky. **636.** a) $A = (-5, -2)$, $B = (3, 2)$, $C = (1, 0)$; b) $A = (4, 2)$, $B = (3, 1)$, $C = (5, 8)$. **637.** a) $A = (9, 0)$, $B = (1, -4)$, $C = (-3, 4)$; b) $C = (4, 5)$. **638.** a) $P = (5, 6)$; b) $(2, -1/11)$; c) $P = (-2, 2)$. **639.** a) $a = -5/2$, $a \neq -5/2$, $a = 18/5$, $a = 5/2$, $b = -8$; b) $|a| = 2\sqrt{3}$, $|b| \neq 4\sqrt{3}$; $|a| \neq 2\sqrt{3}$; $a = 0$, splývajú, keď $a = 2\sqrt{3}$, $b = -4\sqrt{3}$, alebo $a = -2\sqrt{3}$, $b = 4\sqrt{3}$; c) $3b = -2a$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $-3b \neq 2a$; $a = 6/b$, $b \neq 0$; splývať nemôžu. **640.** a) $a = 1 - 2b$, $a = 2b$, $b \neq 0$, $b \neq 1/2$; b) $a = 2b$, $b \neq 0$, $b \neq 1/2$, $c \neq 1 - 2b$; c) $a \neq 2b$, $b \neq 0$. **641.** a) $A' = (83/25, 119/25)$; b) $A' = (-1/2, 3/2)$; c) $A' = (5, 1)$. **642.** a) $Q = (-227/41, 116/41)$; b) $Q = (-231/65, -648/65)$. **643.** a) $4x + 3y - 24 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $3x + 2y - 22 = 0$, $V = (18, -16)$; b) $3x - y + 6 = 0$, $5x - y + 4 = 0$, $x + 4y - 37 = 0$, $V = (1, 9)$; c) $5x - y + 3 = 0$, $22x + 33y - 35 = 0$, $17x + 34y - 38 = 0$, $V = (-16/17, 27/17)$. **644.** a) $119x - 37y + 410 = 0$, $x + 2y + 15 = 0$, $435x - 505y + 1403 = 0$; b) $2x - y + 2 = 0$, $3x - 4y - 23 = 0$, $58x - 87y - 667 = 0$; c) $13x + y - 6 = 0$, $2x - 3y - 23 = 0$. **645.** a) $5x + 3y + 12 = 0$, $3x + 8y + 1 = 0$, $1804x + 741y + 5114 = 0$; b) $3x + y + 7 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$, $y = -4$; c) $x - 7y - 43 = 0$, $9x + 8y - 32 = 0$, $272x - 129y + 516 = 0$. **646.** $7x + 2y - 86 = 0$, $44x + 33y + 688 = 0$, $65x + 39y + 430 = 0$. **647.** $A = (-1, 6)$, $B = (44/7, -94/7)$, $C = (16, -28)$, $D = (163/7, -332/7)$. **648.** $B = (7/4, 2)$, $D = (1/4, 1)$. **649.** a) $2x - 3y - 12 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$, $B = (30/13, -32/13)$, $C = (7/13,$

22, 13). $D = (-2/13, 16/13)$; b) $89x + 46y - 135 = 0$, $22x - 33y - 45 = 0$, $A = (17/23, 42/23)$, $B = (12/11, -7/11)$, $C = (6525/3289, 135/3289)$, $D = (-2/13, 16/13)$. **650.** a) 3; b) 2/3; c) 7/2; d) $4/\sqrt{5}$; e) 8; f) 100/17. **651.** $42/\sqrt{65}$, $42/\sqrt{29}$, $21/\sqrt{29}$. **652.** 7/2. **653.** a) $33/2\,\sqrt{13}$; b) $\sqrt{5}$; c) $22/\sqrt{5}$; d) $7/\sqrt{17}$. **654.** a) $(-1 + \sqrt{21}/6)\,x - y - 9 - \sqrt{21} = 0$, $(-1 - \sqrt{21}/6)\,x - y + 9 + \sqrt{21} = 0$; b) $4x - 3y - 15 = 0$; c) neexistujú. **655.** a) $7x + 3y + 15 = 0$, $3x - 7y - 93 = 0$; b) $8x + 7y - 19 = 0$, $16x + 3y + 17 = 0$. **656.** a) $8x + 6y - 29 = 0$; b) $8x + 6y - 89 = 0$. **657.** a) $y = 72x/21$; b) $y = 26x/21$. **658.** a) $M = (11/8, 17/8)$; b) $M = (81/22, -2/11)$. **659.** $P = (-34/21, -12/7)$. **660.** a) $15x - 24y + 54 = 0$; b) $4x - 3y + 11 = 0$, $24x - 7y + 55 = 0$. **662.** $A = (6, -3)$, $B = (5, 4)$. **663.** a) 2/5; b) 1204/65; **664.** 289/130. **665.** a) $3x + 4y - 13 = 0$, $4x - 3y - 9 = 0$, $4x - 3y + 16 = 0$, $3x - 4y - 38 = 0$, alebo $3x + 4y - 13 = 0$, $4x - 3y - 9 = 0$, $4x - 3y - 16 = 0$, $3x + 4y + 12 = 0$; b) $4x + 3y - 11 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$ alebo $4x + 3y - 11 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y - 29 = 0$; c) $5x - 12y + 10 = 0$, $5x - 12y + 49 = 0$, $12x + 5y - 27 = 0$, $12x - 5y - 27 = 0$, $12x + 15y + 12 = 0$, alebo $5x - 12y + 10 = 0$, $5x - 12y + 49 = 0$, $12x + 5y - 66 = 0$. **666.** a) $8x - 12y + 25 = 0$; b) $x - 2y - 9 = 0$. **667.** a) $4x - 4y + 13 = 0$, $2x + 2y + 7 = 0$; b) $42x + 154y - 123 = 0$, $198x - 54y + 163 = 0$; c) $9x - y - 45 = 0$, $x + 9y - 65 = 0$. **668.** $4x - 4y + 70 = 0$, $3x - 3y + 40 = 0$. **669.** a) Nepatrí; b) nepatrí; c) patrí, ak $c = -15$; d) patrí, ak $b = 12$. **670.** a) Patria; b) patria. **671.** a) $y = 2$; b) $3x - y = 13$; c) $x + y - 7 = 0$. **672.** a) $3x + y - 5 = 0$; b) $y = 2$; c) $2x + 3y - 8 = 0$. **673.** a) $2x - y + 3 = 0$; b) $35x + 42y - 245 = 0$; c) $49x + 28y - 189 = 0$; d) $7x - 35y + 168 = 0$. **674.** a) $\lambda = -27/5$, $x + y + 14 = 0$; b) $\lambda = -3$, $5x - 7y - 14 = 0$; c) $\lambda = -4$, $4x - 3y - 20 = 0$. **675.** a) $x + 4y - 45 = 0$, $5x + 4y + 191 = 0$, $x + 2y + 7 = 0$; b) $19x + 19y + 11 = 0$, $7x + 2y + 12 = 0$, $5x + 15y - 13 = 0$. **676.** $4x - 3y - 11 = 0$. **678.** $x + y = 0$, $y = 4$. **679.** Body B, C, D ležia v záporných polrovinách vzhľadom na priamky. Bod A leží v kladných polrovinách vzhľadom na priamky. Bod E leží medzi priamkami. **680.** a) Vypuklý; b) nie je vypuklý. **681.** A leží, B, C neleží vnútri trojuholníka **682.** $t \in \langle -1, -1/2 \rangle$. **683.** a) Pretína; b) nepretína. **684.** $4x + y - 8 = 0$. **685.** 4. **686.** a) Vo vedľajších; b) v jednom uhle; c) vo vedľajších. **687.** $\beta \doteq 150°27'40''$. **688.** a) $323x - 119y + 461 = 0$; b) $14x + 14y - 15 = 0$. **689.** a) Záporná polrovina vzhľadom na priamku $x + 2y - 2 = 0$; b) kladná polrovina vzhľadom na priamku $x + 2y - 2 = 0$; c) kladná polrovina vzhľadom na priamku $x - y - 1 = 0$; d) všetky body roviny, pre súradnice ktorých súčasne platí $x + y - 2 > 0$, $x - y + 2 > 0$, alebo $x + y - 2 < 0$, $x - y + 2 < 0$. **693.** $A = (-3, 3)$, $B = (-7, 5)$, $C = (3/2, -3/2)$. **694.** a) $-x + 3y + 6 \leqq 0$, $x + 2y - 3 \geqq 0$; b) $2x + y + 9 \geqq 0$, $-x + 3y + 6 \geqq 0$, $x + 2y - 3 \geqq 0$; c) $2x + y + 9 \leqq 0$, $x + 2y - 3 \geqq 0$; d) $2x + y + 9 \leqq 0$, $-x + 3y + 6 \geqq 0$, $x + 2y - 3 \leqq 0$; e) $2x + y + 9 \leqq 0$, $-x + 3y + 6 \leqq 0$; f) $2x + y + 9 \geqq 0$, $-x + 3y + 6 \leqq 0$, $x + 2y - 3 \leqq 0$; g) $2x + y + 9 \geqq 0$, $-x + 3y + 6 \geqq 0$, $x + 2y - 3 \leqq 0$. **695.** $x - 3y - 3 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$. **696.** $33x + 9y - 13 = 0$, $99x + 27y - 689 = 0$, $3x - 11y + 13 = 0$, $21x - 77y + 559 = 0$. **697.** $206x - 3y - 767 = 0$, $106x + 237y - 1027 = 0$. **698.** $2(x_2 - x_1)\,x + 2(y_2 - y_1)\,y + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$. **699.** $y = v/3$, $y = cv/(2c + 2)$, kde c je základňa a v výška; b) rovnobežka so základňou vo vzdialenosti $vc/(c + v)$, kde c je dĺžka základne a v dĺžka výšky trojuholníka na základňu c. **700.** Úsečka AB, kde A, B sú priesečníky osí priľahlých uhlov k tretej strane s protiľahlými stranami. **701.** Úsečka S_1S_2, kde S_1 je stred AB, S_2 je stred výšky spustenej z vrcholu C. **702.** $x + y = 1$. **703.** Dve priamky. **704.** Daný rovnostranný trojuholník.

4,9. Zobrazenie a transformácia roviny

705. a) $A' = (-2, 8)$, $B' = (4, 13)$, $C' = (7, 9)$, $D = (0, 9)$, $E = (6, 10)$; b) $A' = (16/3, 0)$, $B' = (10/3, -5/3)$, $C' = (7/3, -1/3)$, $D = (2, 5)$, $E = (-16, 2)$; c) $A' = (5, 1; -0,7)$, $B' = (140/29, -31/29)$, $C' = (83/17, -33/34)$, $D = (4,8; -0,6)$, $E = (4,86; -0,98)$. **706.** a) Úsečka

$A'B'$, $A' = (-1, -1)$, $B' = (-3, 3)$, $g[f(X)] = f[g(X)]$ pre všetky body roviny; b) bod $C = (1, 0)$, $g[f(X)] \neq f[g(X)]$ pre všetky body roviny. **707.** a) Ak obraz bodu $X = (x, y)$ je $f(X) = (x', y')$, bod $A_0 = (x_0, y_0)$ je päta kolmice spustenej z bodu $A = (x_A, y_A)$ na priamku N, transformačné rovnice sú

$$f(X) = A + \frac{(A_0 - A)^2}{(A_0 - A) \cdot (X - A)} (X - A),$$

alebo

$$x' = x_A + \frac{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2}{(x_0 - x_A)(x - x_A) + (y_0 - y_A)(y - y_A)} (x - x_A),$$

$$y' = y_A + \frac{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)}{(x_0 - x_A)(x - x_A) + (y_0 - y_A)(y - y_A)} (y - y_A);$$

b)
$$f(X) = X - \frac{(X - A_0)(A - A_0)}{\boldsymbol{a}(A - A_0)} \boldsymbol{a},$$

alebo

$$x' = x - \frac{(x - x_0)(x_A - x_0) + (y - y_0)(y_A - y_0)}{(x_{A'} - x_A)(x_A - x_0) + (y_{A'} - y_A)(y_A - y_0)} (x_{A'} - x_A)$$

$$y' = y - \frac{(x - x_0)(x_A - x_0) + (y - y_0)(y_A - y_0)}{(x_{A'} - x_A)(x_A - x_0) + (y_{A'} - y_A)(y_A - y_0)} (y_{A'} - y_A),$$

kde X, A, A', $f(X)$ majú rovnaký význam ako v a); c) $f(X) = A$, alebo $x = x_A$, $y = y_A$; d) $f(X) = S - (S - X)$, alebo $x' = 2x_s - x$, $y' = 2y_s - y$; e) ak $\boldsymbol{a}^\circ = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ je smerový vektor priamky p a bod A je bod priamky p, transformačné rovnice sú $f(X) = A + (A - X) + \boldsymbol{a}^\circ[2(X - A) \cdot \boldsymbol{a}^\circ]$, alebo $x' = 2x_A - x + (x - x_A)\, 2 \cos^2 \alpha + (y - y_A) \sin 2\alpha$, $y' = 2y_A - y + (x - x_A) \sin 2\alpha + (y - y_A)\, 2 \sin^2 \alpha$;

f)
$$f(X) = S + \frac{X - S}{|X - S|^2}, \qquad \text{alebo} \qquad x' = x_S + \frac{x - x_S}{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2},$$

$$y' = y_s + \frac{y - y_s}{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2};$$

g) $f(X) = A + k(X - A)$, alebo $x' = kx + x_A(1 - k)$, $y' = ky + y_A(1 - k)$. **708.** Zobrazenia z úlohy 707d, e, f, g, sú jednojednoznačné a súčasne sú to aj regulárne transformácie; d) ak $Y = f(X)$, potom $f_{-1}(Y) = S + (S - Y)$; e) $f_{-1}(Y) = A + (A - Y) + \boldsymbol{a}^\circ[2(Y - A)\, \boldsymbol{a}^\circ]$, kde $Y = f(X)$; f) $f_{-1}(Y) = S + (Y - S)/|Y - S|^2$, kde $Y = f(X)$; g) $f_{-1}(Y) = A + (1/k)(Y - A)$, kde $Y = f(X)$. **709.** a) $O' = (6, 2)$, $A' = (14, 6)$, $B' = (16, 8)$; b) $C = (-1/4, 5/4)$, $M = (-2, 0)$; c) $5x' - 7y' + 4 = 0$; d) $x + 2 = 0$; e) $x' - 3y' = 0$, $x' + y' - 8 = 0$; f) $3x - y + 6 = 0$, $x + y + 2 = 0$. **710.** $x' = x/3 + y/3 - 1$, $y' = 2x/3 - y/3 + 7/3$, $O' = (-1/3, 7/3)$, $2x' - y' + 3 = 0$, $x' + y' - 2 = 0$. **711.** $x' = 6x + 4y - 4$, $y' = -2x + 6y + 2$; $x = 3x'/22 - y'/11 + 8/11$, $y = x'/22 + 3y'/22 - 1/11$. **712.** $A = (34/11, -28/11)$. **713.** $x + y - 6 = 0$. **714.** $\{t, t\}$ alebo $\{-2t, t\}$, kde t je ľubovoľné reálne číslo. **715.** a) Kosodĺžnik s vrcholmi $A' = (-2, 16)$, $B' = (4, 19)$ $C' = (7, 10)$, $D' = (1, 7)$; kosodĺžnik s vrcholmi $A' = (1, 0)$, $B' = (11, 5)$, $C' = (2, -3)$, $D' = (12, 2)$; b) obdĺžnik s vrcholmi $A' = (-9, 3)$, $B' = (-9, 12)$, $C' = (-3, 12)$, $D' = (-3, 3)$; obdĺžnik s vrcholmi $A' = (1, 0)$, $B' = (1, 15)$, $C' = (3, 0)$, $D' = (3, 15)$; c) štvorec s vrcholmi $A' = (-1, -6)$, $B' = (2/13, -114/13)$, $C' = (38/13, -99/13)$, $D' = (23/13, -63/13)$; obdĺžnik s vrcholmi $A' = (42/13, -41/13)$, $B' = (67/13, -101/13)$, $C' = (54/13, -76/13)$, $D' = (79/13, -96/13)$. **716.** a) $A' = (9, -2)$, $B' = (0, 5)$; b) $A' = (2, 2)$, $B' = (-7, 9)$; c) $A' = (9, -11)$, $B' = (0, -4)$; d) $A' = (3, -6)$, $B' = (-6, 1)$. **717.** $O' = (-8, 9)$, $M = (8, -9)$. **718.** $\overrightarrow{O} = (6, -7)$. **719.** a) $x' = x + 5$, $y' = y$; b) $x' = x$, $y' = y - 3$; c) $x' = x + 5$, $y' = y - 3$. **720.** a) $A' = (4, 6)$, $B' = (6, 2)$, $C' = (1, 1)$; b) $A' = (-1, -2)$, $B' = (1, -6)$, $C' = (-4, -7)$; c) $A' = (8, 16)$, $B' = (10, 12)$, $C' = (5, 11)$; d) $A' = (4, -1)$, $B' = (6, -5)$, $C' = (1, -6)$.

721. a) Priamka $(2\sqrt{3} - 3)\,x' + (2 + 3\sqrt{3})\,y' + 20 = 0$; b) úsečka $x' = -(3 + \sqrt{3})/2 - (2 - \sqrt{3})\,t/2$, $y' = (3\sqrt{3} - 1)/2 + (2\sqrt{3} + 1)\,t/2$, $0 \leqq t \leqq 1$; c) $x'^2 + y'^2 = 9$; d) $x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' - y'^2 - 18 = 0$; e) obdĺžnik s vrcholmi $A' = (-3, -1)$, $B' = (-3/2 - \sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2 - 1)$, $C' = (-3/2 - 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2 - 2)$, $D' = (-2\sqrt{3}, -2)$. **722.** a) $x' = -y$, $y' = x$; b) $x' = y$, $y' = -x$. **723.** a) $A' = (-5\sqrt{2}/2, 9\sqrt{2}/2)$, $B' = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $C' = (\sqrt{2}/2, 9\sqrt{2}/2)$; b) $A' = (9\sqrt{2}/2, 5\sqrt{2}/2)$, $B' = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $C' = (9\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$; c) $A' = (-2, -7)$, $B' = (-3, -1)$, $C' = (-5, -4)$; d) $A' = (-4{,}809\ \ldots, 5{,}476\ \ldots)$, $B' = (0{,}784\ \ldots, 3{,}065\ \ldots)$, $C' = (-0{,}657\ \ldots, 6{,}374\ \ldots)$. **724.** $A = (-3\sqrt{3}/2, -15/2)$, $C = (-3, -\sqrt{3})$. **725.** a) π; b) $\pi/4$; c) $\cos\alpha = 21/29$, $\sin\alpha = 20/29$, $\alpha \doteq 43°36'$; d) $\cos\alpha = -3/5$, $\sin\alpha = 4/5$, $\alpha \doteq 126°52'$ alebo $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = -4/5$, $\alpha \doteq -53°08'$; e) $\pi/4$. **726.** a) Posunutie, bod O má obraz $O' = (3, -3)$, bod $M = (-3, 3)$ má obraz $M' = (0, 0)$; b) zhodnosť zložená z otočenia pravouhlého súradnicového systému okolo počiatku o uhol $5\pi/6$ a z posunutia určeného obrazom bodu O, $O' = (-2, -1)$. Geometricky táto zhodnosť vyjadruje otočenie roviny o uhol $5\pi/6$ okolo bodu $M = (-1 + \sqrt{3}/2, \sqrt{3} - 1/2)$; c) zhodnosť zložená z otočenia pravouhlého súradnicového systému okolo počiatku o uhol, pre ktorý platí $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = 4/5$, $\alpha \doteq 53°08'$, zo súmernosti podľa osi x' a z posunutia, pričom je $O' = (3, 6)$. Geometricky táto zhodnosť vyjadruje súmernosť podľa priamky $2x + 4y - 15 = 0$. **727.** a) $x' = x/2 - y\sqrt{3}/2 - 3$, $y' = x\sqrt{3}/2 + y/2 + 3$, $P' = (-2 + 3\sqrt{3}/2, 3/2 + \sqrt{3})$ alebo $x' = x/2 + y\sqrt{3}/2 - 3$, $y' = x\sqrt{3}/2 - y/2 + 3$, $P' = (-2 - 3\sqrt{3}/2, 9/2 + \sqrt{3})$; b) $x' = 12x/13 + 5y/13 + 3$, $y' = -5x/13 + 12y/13 - 4$, $P' = (48/13, -98/13)$ alebo $x' = 12x/13 - 5y/13 + 3$, $y' = -5x/13 - 12y/13 - 4$, $P' = (6, -2)$; c) $x' = (x + y)/\sqrt{2} + 2$, $y' = (y - x)/\sqrt{2} + 3$, $P' = (2 - \sqrt{2}/2, 3 - 5\sqrt{2}/2)$ alebo $x' = (x - y)/\sqrt{2} + 2$, $y' = -(x + y)/\sqrt{2} + 3$, $P' = (2 + 5\sqrt{2}/2, 3 + \sqrt{2}/2)$. **728.** $a = 2/3$, $b = 5/6$ alebo $a = 2/3$, $b = -5/6$. **729.** Štyri zhodnosti: 1. $x' = (2x - y)/\sqrt{5} + 1$, $y' = (x + 2y)/\sqrt{5} - 2$, $N = (5/2 + \sqrt{5}, \sqrt{5}/2)$; 2. $x' = (y - 2x)/\sqrt{5} + 1$, $y' = -(x + 2y)/\sqrt{5} - 2$, $N = (5/2 - \sqrt{5}, -\sqrt{5}/2)$; 3. $x' = (2x + y)/\sqrt{5} + 1$, $y' = (x - 2y)/\sqrt{5} - 2$, bod N neexistuje; 4. $x' = -(2x + y)/\sqrt{5} + 1$, $y' = (2y - x)/\sqrt{5} - 2$, bod N neexistuje. **730.** $x' = x/2 + y\sqrt{3}/2 + 1/2$, $y' = x\sqrt{3}/2 - y/2 + 1/2$ alebo $x' = -x/2 + y\sqrt{3}/2 + 1/2$, $y' = -x\sqrt{3}/2 - y/2 + 1/2$. **731.** $11x - 2y - 7 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$. **732.** $x' - y' + 7 = 0$, $x' + y' + 3 = 0$. **733.** $(3\sqrt{3} + 1)\,x' + (3 - \sqrt{3})\,y' - 42 - 2\sqrt{3} = 0$, $(3\sqrt{3} - 1)\,x' - (3 + \sqrt{3})\,y' + 42 - 2\sqrt{3} = 0$. **734.** $[a\cos(2\pi k/n) - b\sin(2\pi k/n)]\,(x - u) + [a\sin(2\pi k/n) + b\cos(2\pi k/n)]\,(y - v) + au + bv + c = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. **735.** a) $A = (0, 3)$, $B = (1, 0)$, $C = (1{,}082\ \ldots, 1{,}682\ \ldots)$, $D = (\pi\cos 2, \pi\sin 2)$, $E = (0, -2)$, $F = (-3\sqrt{3}, 3)$; b) $A = (4, \pi/2)$, $B = (2, \pi)$, $C = (2, \pi/3)$, $D = (2, 7\pi/4)$, $E = (\sqrt{1 + \pi^2}, \arcsin(\pi/\sqrt{1 + \pi^2}))$, $F = (4\sqrt{3}/3, 5\pi/6)$, $G = (6, 5\pi/3)$. **736.** $A = (3, 0)$, $B = (1, 3\pi/2)$, $C = (2, \pi/2)$, $D = (2, 7\pi/4)$, $E = (2, 5\pi/6)$, $F = (9/2, 3 + 5\sqrt{3}/2)$, $G = (2 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})$. **737.** $A = (0, 2)$, $B = (1, 0)$, $C = (-5, 0)$, $D = (3\sqrt{3}/2, 3/2)$.

4,10. Kružnica

738. a) $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 22 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 21 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$; d) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = (47/13)^2$; e) $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$; f) $x^2 + y^2 - 12x + 12y + 47 = 0$. **739.** a) $x^2 + y^2 + 8x = 0$; b) $x^2 + y^2 - 6y = 0$; c) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, alebo $x^2 + y^2 - 20x - 20y + 100 = 0$; d) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$; e) $9x^2 + 9y^2 - 48y - 21 = 0$; f) $4x^2 + 4y^2 - 20x - 24 = 0$. **740.** $x^2 + y^2 - 12x - 3y + 7 = 0$. **741.** $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. **742.** $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$. **743.** $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 5 = 0$. **744.** $x^2 + y^2 - 5x - 2y = 0$. **745.** a) $x^2 + y^2 + (2 - 42/\sqrt{10})\,x + (-2 + 14/\sqrt{10})\,y + 2 - 56/\sqrt{10} = 0$, $x^2 + y^2 + (2 + 42/\sqrt{10})\,x - (2 + 14/\sqrt{10})\,y + 2 + 56/\sqrt{10} = 0$; b) $5x^2 + 5y^2 - 17x - y - 26 = 0$. **746.** $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$. **747.** a) $(x - 68/27)^2 +$

$+ (y + 34/9)^2 - 1 = 0$; b) $(x + 1/2)^2 + (y - 2)^2 = 1$. **748.** a) $(x + 1{,}6)^2 + (y - 3{,}2)^2 = 0{,}4$, $(x + 0{,}4)^2 + (y - 2{,}8)^2 = 0{,}4$; b) $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 44{,}1$, $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 4{,}9$; c) $x^2 + (y - 4)^2 = 0{,}4$, $(x + 12/17)^2 + (y - 62/17)^2 = 16/2890$, $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 0{,}1$, $(x + 2/3)^2 + (y - 10/3)^2 = 2/45$; d) $x^2 + (y - 2)^2 = 1{,}6$, $(x - 48/25)^2 + (y - 46/25)^2 = 2312/125$. **749.** $x^2 + y^2 = 25$. **750.** a) Je rovnicou kružnice, $S = (1, 0)$, $r = \sqrt{11}$; b) je rovnicou kružnice, $S = (5/2, -2)$, $r = \sqrt{41}/2$; c) je rovnicou kružnice, $S = (-5/4, -3/4,)$ $r = 3\sqrt{2}/4$; d) je rovnicou kružnice, $S = (2, -4)$, $r = \sqrt{35}$; e) je rovnicou kružnice, $S = (-1, 0)$, $r = 1$; f) nie je rovnicou kružnice. **751.** Množina všetkých bodov (x, y) kružnice so stredom $S = (0, 0)$ a s polomerom $r = 7$, pre ktoré platí $y \leqq 0$; b) množina všetkých bodov (x, y) kružnice so stredom $S = (0, 0)$ a s polomerom $r = 5$, pre ktoré platí $x \geqq 0$; c) množina všetkých bodov (x, y) kružnice $(x - 2)^2 + y^2 = 16$, pre ktoré platí $x \leqq 2$; d) množina všetkých bodov (x, y) kružnice so stredom $S = (-3, 3)$ a s polomerom $r = 7$, pre ktoré platí $y \geqq 3$; e) množina všetkých bodov (x, y) kružnice so stredom $S = (1, -2)$ a s polomerom $r = 5$, pre ktoré platí $x < 3/2$; f) všetky body (x, y) kružnice so stredom $S = (1, 0)$ a s polomerom $r = 1$, pre súradnice ktorých platí $x + y \geqq 0$; g) množina všetkých bodov kruhu so stredom $S = (0, 2)$ a s polomerom $r = 2$; h) všetky body roviny. **752.** A, B, C ležia vnútri kružnice; C, E, F ležia na kružnici a D leží zvonku kružnice. **753.** a) $11x + 5y + 13 = 0$; b) $5x - 8x - 7 = 0$; c) $-3x - 5y + 12 = 0$. **754.** a) $4x + 3y - 20 = 0$; b) $2x + y - 10 = 0$. **755.** a) $\sqrt{89} - 4$; b) $\sqrt{117} - 7$. **756.** a) $A = (5, 4)$, $B = (-1/5, -32/5)$; b) $A = (4, 0)$. **757.** $x^2 + y^2 + 14x - 15y + 59 = 0$. **758.** $5x - 3y - 13 = 0$. **759.** $\varrho(S_1, p) = \sqrt{53}/53$, $\varrho(S_2, p) = 2862/53$. **760.** 10. **761.** a) $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$. **762.** a) $r = 3$, $S = (3, 0)$; b) $r = 3/2$, $S = (3/2, \pi/2)$; c) $r = 2$, $S = (2, \pi/4)$; d) $r = 4$, $S = (4, 5\pi/6)$. **763.** a) $\varrho = 4 \cos \varphi$; b) $\varrho = -6 \cos \varphi$; c) $\varrho = 8 \sin \varphi$. **764.** a) $x^2 + y^2 - 6x = 0$; b) $x^2 + y^2 - x + y = 0$. **765.** a) $\varrho = \cos \varphi$; b) $\varrho = 4 \sin \varphi$; c) $\varrho = \cos \varphi + \sin \varphi$. **766.** $x^2 + y^2 - 18x - 6y + 74 = 0$. **767.** $3x^2 + 3y^2 + 4x - 4y - 32 = 0$. **768.** $(x + 4/3)^2 + (y - 2/3)^2 - 8/9 = 0$. **769.** Apolloniova kružnica.

$$\textbf{770.}\ x^2 + y^2 - \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} x - \frac{2\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} y - \frac{k + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)}{n} = 0,$$

kde x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú súradnice bodov. **771.** $x^2 + y^2 - 3x = 0$. **772.** $x^2 + y^2 - 32x + 192 = 0$. **773.** Kružnica, ktorej priemerom je spoločná základňa, okrem koncových bodov základne. **774.** Kružnica, ktorej tetiva je základňa a dotyčnicami sú ramená trojuholníka. **775.** Kružnica. **776.** Kružnica so stredom v strede druhej strany s polomerom rovným polovici tretej strany. **777.** Kružnica opísaná trojuholníku ABC.

4,11. Elipsa

778. a) $x^2/49 + y^2/16 - 1 = 0$; b) $x^2/185 + y^2/121 - 1 = 0$; c) $x^2/1156 + y^2/900 - 1 = 0$; d) $x^2/100 + y^2/36 - 1 = 0$; e) $x^2/169 + y^2/144 - 1 = 0$; f) $x^2/80 + y^2/16 - 1 = 0$, $x^2/20 + y^2/16 - 1 = 0$; g) $x^2/81 + 16y^2/567 - 1 = 0$. **779.** a) $x^2/81 + y^2/25 - 1 = 0$; b) $x^2/576 + y^2/625 - 1 = 0$; c) $x^2/4900 + y^2/5476 - 1 = 0$; d) $x^2/225 + y^2/1521 - 1 = 0$; e) $x^2/81 + y^2/1681 - 1 = 0$; f) $x^2/144 + 361y^2/31\,248 - 1 = 0$. **780.** a) $9x^2 + 25y^2 - 18x - 250y + 409 = 0$; b) $(x - 6)^2/169 + (y + 3)^2/25 - 1 = 0$; c) $(x + 1)^2/5 + (y - 2)^2/3 - 1 = 0$; d) $(x - 2)^2/16 + (y - 1)^2/12 - 1 = 0$; e) $(x - 1)^2/25 + (y - 3)^2/16 - 1 = 0$. **781.** a) $(x - 5)^2/24 + (y + 1)^2/49 - 1 = 0$; b) $(x - 1)^2/64 + (y - 3)^2/150 - 1 = 0$; c) $(x - 5)^2/16 + (y - 1)^2/25 - 1 = 0$; d) $(x - 4)^2/7 + (y - 2)^2/16 - 1 = 0$; e) $(x + 1)^2/16 + (y - 7)^2/25 - 1 = 0$. **782.** a) $x^2/12 + y^2/39 - 1 = 0$; b) $x^2/225 + y^2/144 - 1 = 0$; c) $x^2/225 + y^2/144 -$

$-1 = 0$; d) $3x^2/52 + 4y^2/65 - 1 = 0$, $16x^2/325 + 3y^2/65 - 1 = 0$; e) $7x^2/32 + 3y^2/24 - 1 = 0$, $7x^2/32 + y^2/8 - 1 = 0$. **783.** a) $(x - 6)^2/36 + (y + 4)^2/16 - 1 = 0$; b) $(x + 4)^2/16 + (y - 5)^2/25 - 1 = 0$. **784.** a) $a = 2$, $b = 1$, $F_1 = (\sqrt{3}, 0)$, $F_2 = (-\sqrt{3}, 0)$, $e = \sqrt{3}/2$, $x = 4/\sqrt{3}$, $x = -4/\sqrt{3}$; b) $a = 5, b = 3, F_1 = (4, 0), F_2 = (-4, 0), \varepsilon = 4/5, x = 25/4, x = -25/4$; c) $a = 2$, $b = \sqrt{3}, F_1 = (1, 0), F_2 = (-1, 0), \varepsilon = 1/2, x = 4, x = -4$; d) $a = 1/\sqrt{2}, b = 1/3, F_1 = (\sqrt{7}/3\sqrt{2}, 0), F_2 = (-\sqrt{7}/3\sqrt{2}, 0), \varepsilon = \sqrt{7}/3, x = 3/\sqrt{14}, x = -3\sqrt{14}$; e) $a = 4, b = 5/2, F_1 = (0, \sqrt{39}/2)$, $F_2 = (0, -\sqrt{39}/2), \varepsilon = \sqrt{39}/8, x = 32/\sqrt{39}, x = -32/\sqrt{39}$. **785.** a) Je rovnicou elipsy, $S = (-2, 3)$, $F_1 = (-2, (3 + 3)\sqrt{43})/5)$, $F_2 = (-2, 3 - 3\sqrt{43})/5)$, $\varepsilon = 3/5$, $V_1 = (-2, -4\sqrt{43}/5, 3)$, $V_2 = (-2 + 4\sqrt{43}/5, 3)$, $V_3 = (-2, 3 + \sqrt{43})$, $V_4 = (-2, 3 - \sqrt{43})$, $y = 3 + 5\sqrt{43}/3$, $y = 3 - 5\sqrt{43}/3$, $x = -2 + (4\sqrt{43}\cos t)/5$, $y = 3 + \sqrt{43}\sin t$; b) nie je rovnicou elipsy; c) je rovnicou elipsy, $S = (8, 1)$, $F_1 = (8 + \sqrt{15}, 1)$, $F_2 = (8 - \sqrt{15}, 1)$, $\varepsilon = \sqrt{15}/4$, $V_1 = (4, 1)$, $V_2 = (12, 1)$, $V_3 = (8, 2)$, $V_4 = (8, 0)$, $x = 8 + 16/\sqrt{15}$, $x = 8 - 16/\sqrt{15}$, $x = 8 + 4\cos t$, $y = 1 + \sin t$; d) je rovnicou elipsy, $S = (1, -3)$, $F_1 = (2, -3)$, $F_2 = (0, -3)$, $\varepsilon = 1/\sqrt{3}$, $V_1 = (1 + \sqrt{3}, -3)$, $V_2 = (1 - \sqrt{3}, -3)$, $V_3 = (1, -3 + \sqrt{2})$, $V_4 = (1, -3 - \sqrt{2})$, $x = 4$, $x = -2$, $x = 1 + \sqrt{3}\cos t$, $y = -3 + \sqrt{3}\sin t$. **786.** a) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$; b) $(x - 2)^2/9 + (y - 1)^2/16 - 1 = 0$; **787.** a) $\varrho = 1/(2 - 3\cos\varphi)$, $\varrho = 9/(5 - 4\cos\varphi)$, $\varrho = 3/(2 - \cos\varphi)$, $\varrho = 2/(9\sqrt{2} - 3\sqrt{14}\cos\varphi)$, $\varrho = 25/(16 - 2\sqrt{39}\cos\varphi)$; b) $\varrho = 1/(2 + \sqrt{3}\cos\varphi)$, $\varrho = 9/(5 + 4\cos\varphi)$, $\varrho = 3/(2 + \cos\varphi)$, $\varrho = 2/(9\sqrt{2} + 3\sqrt{14}\cos\varphi)$, $\varrho = 25/(16 + 2\sqrt{39}\cos\varphi)$. **788.** $x^2/25 + y^2/16 - 1 = 0$. **789.** $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{6}, \varrho(F_1, F_2) = 2\sqrt{2}$. **790.** a) $\varrho = \dfrac{315/32}{1 - (3\cos\varphi)/4}$; b) $\varrho = \dfrac{165/16}{1 - (\cos\varphi)/2}$. **791.** a) $\varepsilon = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; b) $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$; c) $\varepsilon = 1/2$; d) $\varepsilon = \sqrt{2/3}$; e) $\varepsilon = \sqrt{5}$; f) $\varepsilon = \sqrt{3}$; g) $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$. **792.** $\varepsilon = 1/59$. **793.** a) $A_1 = (-4, 12/5), A_2 = (-4, -12/5)$; b) $A_1 = (5\sqrt{7}/4, 3), A_2 = (-5\sqrt{7}/4, 3)$. **794.** a) $2\sqrt{15}$; b) $8/75$; c) 6; d) $4\sqrt{5}$; e) $8\sqrt{3}$. **795.** $A_1 = (-4\sqrt{3}/5, \sqrt{13}/5), A_2 = (-4\sqrt{3}/5, -\sqrt{13}/5)$. **796.** a) $A_1 = (-11\sqrt{2}/12, \sqrt{3479/6\sqrt{2}})$, $A_2 = (-11\sqrt{2}/12, -\sqrt{3479/6\sqrt{2}})$; b) $A_1 = (77\sqrt{2}/12, \sqrt{1127/72})$, $A_2 = (77\sqrt{2}/12, -\sqrt{1127/72})$. **797.** $33/5$, $17/5$. **798.** $-4x - 5{,}4y + 12 = 0$, $-4x + 0{,}6y - 12 = 0$. **799.** $2x - y - 4 = 0$, $2x - 3y + 4 = 0$. **800.** A je vnútorným bodom elipsy; B je vnútorným bodom elipsy; C je bodom elipsy. **801.** Body A, C, D, E ležia zvonku elipsy; body B, F ležia vnútri elipsy. **802.** a) Časť elipsy v treťom a štvrtom kvadrante; b) časť elipsy v prvom kvadrante; c) časť elipsy v druhom a treťom kvadrante; d) časť elipsy vo štvrtom kvadrante; e) vnútro elipsy a elipsa; **803.** $x^2 + 4y^2 - 4a^2 = 0$. **804.** $[x - (a_1 + a_2)/3]^2 + 3y^2/4 - 1 = 0$, pričom a_1, a_2 sú x-ové súradnice bodov na hlavnej osi elipsy a $a_1 \neq a_2$. **805.** $(x + 3/2)^2/25 + 16(y - 1)^2/25 - 1 = 0$. **806.** $8x^2 - 9y^2 - 16x - 64 = 0$. **807.** Ak S je stred danej kružnice, r jej polomer a A daný bod, hľadaná množina je elipsa so stredom v strede úsečky SA, ohniskom v bode A a s dĺžkou hlavnej polosi $r/2$. **808.** $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$. **809.** Ak rovnica elipsy je v osovom tvare, hľadaná množina je elipsa $x^2/e^2 + \dfrac{y^2}{b^2e^2/(a + e)^2} - 1 = 0$. **810.** $x^2/9 + y^2/8 - 1 = 0$. **811.** $16x^2/9r^2 + 16y^2/r^2 - 1 = 0$. **812.** $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$, alebo $x^2/b^2 + y^2/a^2 - 1 = 0$.

4,12. Hyperbola

813. a) $A = (6, 0)$; b) $B = (-6, 0)$; c) $C_1 = (3\sqrt{5}, 3/2)$, $C_2 = (-3\sqrt{5}, 3/2)$; d) $D_1 = (3\sqrt{5}, -3/2)$, $D_2 = (3\sqrt{5}, -3/2)$. **814.** a) $x^2/25 - y^2/9 = 1$, $-x^2/9 + y^2/25 = 1$; b) $x^2/16 - y^2/9 = 1$, $-x^2/9 + y^2/16 = 1$; c) $x^2/36 - y^2/64 = 1$, $-x^2/64 + y^2/36 = 1$; d) $x^2/20 - y^2/4 = 1$, $-x^2/4 + y^2/20 = 1$; e) $x^2/(1/4) - y^2/(2/3) = 1$, $-x^2/(2/3) + y^2/(1/4) = 1$, **815.** a) $x^2/81 - y^2/144 = 1$; b) $x^2/64 - y^2/225 = 1$; c) $x^2/225 - y^2/400 = 1$; d) $x^2/900 - y^2/256 = 1$; e) $x^2/4 - y^2 = 1$; f) $x^2/16 - y^2/9 = 1$. **816.** a) $-x^2/45 + y^2/36 = 1$; b) $-x^2/144 + y^2/25 = 1$; c) $-x^2/100 +$

$+ y^2/56{,}25 = 1$; d) $-x^2/(625/9) + y^2/400 = 1$; e) $-x^2/9 + y^2/16 = 1$; f) $-x^2/0{,}0081 + y^2/0{,}16 = 1$. **817.** a) $(x-2)^2/9 - (y-3)^2/16 = 1$; b) $(x-1)^2/32 - (y-3)^2/32 = 1$; c) $(x-1)^2/(81/13) - (y-5)^2/(36/13) = 1$; d) $(x-6)^2/81 - (y-10)^2/88 = 1$; e) $(x-3)^2/25 - (y-1)^2/(525/4) = 1$; f) $(x+3)^2/90 - (y-1)^2/810 = 1$. **818.** a) $x = 2 + 3/\cos t$, $y = 3 + 4 \operatorname{tg} t$; b) $x = 1 + 4\sqrt{2}/\cos t$, $y = 3 + 4\sqrt{2} \operatorname{tg} t$; c) $x = 1 + 9/(\sqrt{13}\cos t)$, $y = 5 + (6/\sqrt{13}) \operatorname{tg} t$; d) $x = 6 + 9/\cos t$, $y = 10 + 2\sqrt{22} \operatorname{tg} t$; e) $x = 3 + 5/\cos t$, $y = 1 + 5\sqrt{21} \operatorname{tg} t/2$; f) $x = -3 + 3\sqrt{10}/\cos t$, $y = 1 + 9\sqrt{10} \operatorname{tg} t$, kde v úlohách a) až f) pre t platí $-\pi/2 < t < \pi/2$, $\pi/2 < t < 3\pi/2$. **819.** a) $-(x-1)^2/9 + (y-1)^2/16 = 1$; b) $-(x-3)^2/24 + (y-31/7)^2/25 = 1$; c) $-(x-4)^2/9 + (y-1)^2/16 = 1$, d) $-(x-4)^2/(25/16) + (y-5/2)^2/(25/4) = 1$; e) $-(x+1)^2/8 + (y+2)^2/8 = 1$. **820.** a) $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$, $\varepsilon = 5/4$, $3x - 4y = 0$, $3x + 4y = 0$, $5x - 16 = 0$, $5x + 16 = 0$; $F_1 = (0, -\sqrt{7})$, $F_2 = (0, \sqrt{7})$, $\varepsilon = \sqrt{7/3}$, $3x + 2\sqrt{3}y = 0$, $3x - 2\sqrt{3}y = 0$, $7y + 3\sqrt{7} = 0$, $7y - 3\sqrt{7} = 0$; c) $F_1 = (\sqrt{11/12}, 0)$, $F_2 = (-\sqrt{11/12}, 0)$, $\varepsilon = \sqrt{11/3}$, $x + \sqrt{6}y = 0$, $x - \sqrt{6}y = 0$, $22x + \sqrt{33} = 0$, $22x - \sqrt{33} = 0$; d) $F_1 = (0, 2\sqrt{17})$, $F_2 = (0, -2\sqrt{17})$, $\varepsilon = \sqrt{17}$, $x + 4y = 0$, $x - 4y = 0$, $17y + 2\sqrt{17} = 0$, $17y - 2\sqrt{17} = 0$; e) $F_1 = (4 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $F_2 = (4 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $x = 4$, $y = 2$, $x - y - 2 + \sqrt{2} = 0$: $x - y - 2 - \sqrt{2} = 0$. **821.** a) $-x^2/16 + y^2/9 = 1$, $\varepsilon = 5/3$; b) $x^2/4 - y^2/3 = 1$, $\varepsilon = \sqrt{7}/2$; c) $-x^2/(1/4) + y^2/(2/3) = 1$, $\varepsilon = \sqrt{11}/8$; d) $x^2 - 16y^2 = 64$, $\varepsilon = \sqrt{17}/4$; e) $y = (2x-7)/(x-4)$, $\varepsilon = \sqrt{2}$. **822.** a) $V_1 = (11/3, 0)$, $V_2 = (-11/3, 0)$, $F_1 = (-11\sqrt{13}/6, 0)$, $F_2 = (11\sqrt{13}/6, 0)$, $\varepsilon = \sqrt{13}/2$, $39x + 22\sqrt{13} = 0$, $39x - 22\sqrt{13} = 0$, $3x + 2y = 0$, $3x - 2y = 0$; b) $V_1 = (5/7, 0)$, $V_2 = (-5/7, 0)$, $F_1 = (5\sqrt{65}/28, 0)$, $F_2 = (-5\sqrt{65}/28, 0)$, $\varepsilon = \sqrt{65}/4$, $91x + 4\sqrt{65} = 0, 91x - 4\sqrt{65} = 0$, $7x + 4y = 0$, $7x - 4y = 0$; c) $V_1 = (2\sqrt{3}, 0)$, $V_2 = (-2\sqrt{3}, 0)$, $F_1 = (2\sqrt{5}, 0)$, $F_2 = (-2\sqrt{5}, 0)$, $\varepsilon = \sqrt{5}/3$, $5x + 6\sqrt{5} = 0$, $5x - 6\sqrt{5} = 0$, $2x + \sqrt{6}y = 0$, $2x - \sqrt{6}y = 0$; d) $V_1 = (5/2, 0)$, $V_2 = (-5/2, 0)$, $F_1 = (5\sqrt{97}/18, 0)$, $F_2 = (-5\sqrt{97}/18, 0)$, $\varepsilon = \sqrt{97}/9$, $194x + 45\sqrt{97} = 0$, $194x - 45\sqrt{97} = 0$, $4x + 9y = 0$, $4x - 9y = 0$; e) $V_1 = (12, 0)$, $V_2 = (-12, 0)$, $F_1 = (13, 0)$. $F_2 = (-13, 0)$, $\varepsilon = 13/12$, $13x + 144 = 0$, $13x - 144 = 0$, $5x + 12y = 0$, $5x - 12y = 0$; f) $V_1 = (1, 0)$, $V_2 = (-1, 0)$, $F_1 = (\sqrt{2}, 0)$, $F_2 = (-\sqrt{2}, 0)$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $2x + \sqrt{2} = 0$, $2x - \sqrt{2} = 0$, $x + y = 0$, $x - y = 0$; g) $V_1 = (0, 5)$, $V_2 = (0, -5)$, $F_1 = (0, 5\sqrt{2})$, $F_2 = (0, -5\sqrt{2})$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $2y + 5\sqrt{2} = 0$, $2y - 5\sqrt{2} = 0$, $x + y = 0$, $x - y = 0$. **823.** a) $S = (-2, 0)$, $V_1 = (-1, 0)$, $V_2 = (-5, 0)$, $F_1 = (-2 + \sqrt{10}, 0)$, $F_2 = (-2 - \sqrt{10}, 0)$, $\varepsilon = \sqrt{10}/3$, $x + 2 + 9/\sqrt{10} = 0$, $x + 2 - 9/\sqrt{10} = 0$, $x - 3y + 2 = 0$, $x + 3y + 2 = 0$; b) $S = (3, 7)$, $V_1 = (7, 7)$, $V_2 = (-1, 7)$, $F_1 = (3 + \sqrt{41}, 7)$, $F_2 = (3 - \sqrt{41}, 7)$, $\varepsilon = \sqrt{41}/4$, $x = 3$, $y = 7$, $x = 3 + 16/\sqrt{41}$, $x = 3 - 16/\sqrt{41}$, $5x - 4y + 13 = 0$, $5x + 4y - 43 = 0$; c) $S = (1, -1)$, $V_1 = (6, -1)$, $V_2 = (-4, -1)$, $F_1 = (-12, -1)$, $F_2 = (14, -1)$, $\varepsilon = 13/5$, $x = 1$, $y = -1$, $x = 38/13$, $x = -12/13$, $12x - 5y - 17 = 0$, $12x + 5y - 7 = 0$; d) $S = (0, -1)$, $V_1 = (5, -1)$, $V_2 = (-5, -1)$, $F_1 = (\sqrt{34}, -1)$, $F_2 = (-\sqrt{34}, -1)$, $\varepsilon = \sqrt{34}/5$, $x = 0$, $y = -1$, $x = 25/\sqrt{34}$, $x = -25/\sqrt{34}$, $3x - 5y - 5 = 0$, $3x + 5y + 5 = 0$; e) $S = (8, -7)$, $V_1 = (8, -1)$, $V_2 = (8, -13)$, $F_1 = (8, -7 + 6\sqrt{2})$, $F_2 = (8, -7 - 6\sqrt{2})$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $x = 8$, $y = -7$, $y = -7 + 3\sqrt{2}$, $y = -7 - 3\sqrt{2}$, $x - y - 15 = 0$, $x + y - 1 = 0$; f) $S = (3, -1)$, $V_1 = (3, 7)$, $V_2 = (3, -9)$, $F_1 = (3, -18)$, $F_2 = (3, 16)$, $\varepsilon = 17/8$, $x = 3$, $y = -1$, $y = 9/8$, $y = -25/8$, $8x - 15y - 39 = 0$, $8x + 15y - 9 = 0$; g) $S = (0, 0)$, $V_1 = (3, 3)$, $V_2 = (-3, -3)$, $F_1 = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $F_2 = (-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $x + y = 0$, $x - y = 0$, $x + y + 3\sqrt{2} = 0$, $x + y - 3\sqrt{2} = 0$, $x = 0$, $y = 0$. **824.** 24. **825.** $x^2/40 - y^2/(160/9) = 1$. **826.** a) $A = (30, 8\sqrt{3})$, $V = (30, -8\sqrt{3})$, $C = (-30, 8\sqrt{3})$, $D = (-30, 8\sqrt{3})$; b) $A = (9, 4\sqrt{5})$, $B = (9, -4\sqrt{5})$, $C = (-9, 4\sqrt{5})$, $D = (-9, -4\sqrt{5})$. **827.** a) $x^2/(1/16) - y^2/(41/48) = 1$; b) $-x^2/(7/4) + y^2/(9/4 = 1$; c) $x^2/4 - y^2/5 = 1$; d) $(x-1)(y-1) = 9/2$. **828.** a) $(x-4)^2/16 - (y-2)^2/16 = 1$; b) $(x-1)^2/18 - (y+1)^2/8 = 1$; c) $x^2/16 - y^2/9 = 1$, $x^2/58{,}24 - y^2/273 = 1$; d) $x^2/64 - y^2/36 = 1$. **829.** $v = 4{,}8$. **830.** 10. **831.** $M_1 = (6, 0)$, $M_2 = (9, 4\sqrt{5})$. **832.** $41/4$, $9/4$, $x = 6$, $9x - 40y + 66 = 0$.

834. b. 835. $2\pi/3$. 836. $\sqrt{3}$. 837. a) 2; b) 2, $2/\sqrt{3}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{2}$. 838. $x^2/13{,}44 - y^2/27{,}52 = 1$, $-x^2/27{,}52 + y^2/13{,}44 = 1$. 839. $x^2/136 - y^2/153 = 1$. 840. $x^2/16 - y^2/9 = 1$. 841. $x^2 - y^2 = (a^2 - b^2)/2$. 842. $x^2/16 - y^2/9 = 1$. 843. $x'y' = a^2/2$. 844. a. 845. a) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; b) $(x - 3)(y + 2) = -8$. 846. a) Dolná polovica obidvoch vetiev hyperboly $x^2/9 - y^2/(81/16) = 1$, $(y \leqq 0)$; b) pravá vetva hyperboly $x^2/40{,}96 - y^2/16 = 1$, $(x \geqq 0)$; c) dolná polovica oboch vetiev hyperboly $(x + 2)^2/16 - (y - 11)^2/(64/9) = 1$, $y \leqq 11$; b) ľavá polovica hyperboly $(x - 5)^2/36 - (y - 3)^2/4 = 1$, $x \leqq 5$; e) ľavá polovica dolnej vetvy hyperboly $-(x - 3)^2/4 + (y - 1)^2/9 = 1$, $(x \leqq 3,\ y \leqq -2)$; f) úsečka vyťatá priamkou $x = -10/3$ a hyperbolou $(x - 2)^2/9 - (y + 3)^2/16 = 1$; g) časť roviny ohraničenej asymptotami hyperboly $4x - 3y = 0$, $4x + 3y = 0$ a hyperbolou $x^2/9 - y^2/16 = 1$; pravá vetva hyperboly $49(x + 20/7)^2 - 63y^2 = 225$. 847. a) $\varrho = 18/(1 - 2\cos\varphi)$, $\varrho = 18/(-1 - 2\cos\varphi)$; b) $\varrho = 24/(1 - 3\cos\varphi)$, $\varrho = 24/(-1 - 3\cos\varphi)$; c) $\varrho = (16/9)/(1 - (5\cos\varphi)/3)$, $\varrho = (16/9)/(-1 - (5\cos\varphi)/3)$. 848. $(x - 2/3)^2/(100/9) - y^2/(100/3 = 1$. 849. $(x - 5/2)^2 - y^2 = 25/4$. 850. $3x^2 + 10x - y^2 = 25$. 851. $x^2 - y^2 = x$. 852. $x^2/9a^2 - y^2/9b^2 = 1$. 853. $(x - e/2)^2/(a^2/4) - y^2/(b^2/4) = 1$. 854. a) Elipsa so stredom v strede základne trojuholníka AB s ohniskami na základni, $e = a/6$ a dĺžkou hlavnej polosi $(b + c)/6$, kde a, b, c sú strany trojuholníka; b) hyperbola so stredom v strede základne trojuholníka AB s ohniskami na základni, $e = a/6$ a dĺžkou hlavnej polosi $|b - c|/6$, kde a, b, c sú strany trojuholníka. 855. Pre $a > b$ hyperbola $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$, pre $a < b$ hyperbola $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$, pre $b = a$ priamky $x + y = 0$, $x - y = 0$. 856. Ak stredy daných kružníc sú S_1, S_2 a polomery r_1, r_2, hľadaná množina je hyperbola s ohniskami S_1, S_2 a dĺžkou hlavnej polosi $a = |r_1 - r_2|/2$. 857. Hyperbola s ohniskami S_1, A a dĺžkou hlavnej polosi $r_1/2$, kde S_1 je stred a r_1 polomer danej kružnice. 858. Ak $k > 0$ elipsa, ak $k < 0$ hyperbola, ktoré majú stred v strede základne trojuholníka AB a polosi $a = e/2$, $b = e\sqrt{|k|}/2$. 859. a) Ak $\varrho(F_1, A) \neq \varrho(F_1, B)$ hyperbola s ohniskami A, B a dĺžkou hlavnej polosi $|r_A - r_B|/2$; ak $\varrho(F_1, A) = \varrho(F_1, B)$ druhé ohniská ležia na osi symetrie bodov A, B; b) ak $\varrho_B \neq \varrho_A$ a A, B leží na jednej vetve hyperboly, hyperbola s ohniskami v bodoch A, B, ktorá má dĺžku hlavnej polosi $|r_A - r_B|/2$; ak $\varrho_B = \varrho_A$ druhé ohniská ležia na osi súmernosti bodov A, B, ak A leží na jednej vetve, B na druhej vetve hyperboly, potom hľadaná množina je elipsa s ohniskami v bodoch A, B, ktorá má dĺžku hlavnej polosi $r_A + r_B$; c) hyperbola, ktorá má stred v strede úsečky FS, hlavnú os rovnobežnú s priamkou p a dĺžky polosí $a/2$, $b/2$, kde S je stred, p hlavná os, a, b dĺžky polosí hyperboly, na ktorej ležia druhé ohniská.

4.13. Parabola

860. a) $F = (3, 0)$, $p = 6$, $y^2 = 12x$ alebo $F = (-3, 0)$, $p = 6$, $y^2 = -12x$; b) $F = (0, 4)$, $p = 8$, $x^2 = 16y$ alebo $F = (0, -4)$, $p = 8$, $x^2 = -16y$. 861. a) $y^2 = 24x$; b) $x^2 = y$; c) $y^2 = -4x/3$; d) $x^2 = -0{,}32y$. 862. a) $y^2 = 27x$; b) $x^2 = 64y$; c) $y^2 = -8x$; d) $x^2 = -1{,}8y$. 863. a) $y^2 = 9x/8$; b) $y^2 = -4x/5$; c) $x^2 = 16y$; d) $x^2 = -4y/3$. 864. a) $F = (2, 0)$, $p = 4$, $x = -2$; b) $F = (0, 3/4)$, $p = 3/2$, $y = -3/4$; c) $F = (-1/16, 0)$, $p = 1/8$, $x = 1/16$; d) $F = (0; -0{,}005)$, $p = 0{,}01$, $y = 0{,}005$. 865. a) $(y - 5)^2 = 8(x - 8)$ alebo $(y - 5)^2 = -8(x - 8)$; b) $(y + 1)^2 = 4{,}5(x - 1)$. 866. a) $(x + 3)^2 = 4(y + 4)$ alebo $(x + 3)^2 = -4(y + 4)$; b) $(x + 3)^2 = 25(y - 2)$ alebo $(x + 3)^2 = -25(y - 2)$. 867. a) $(y - 8)^2 = -16(x - 7)$; b) $(x - 5)^2 = 10(y + 3/2)$; c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 28x + 24y + 64 = 0$; d) $x^2 - 2xy + y^2 - 46x - 42y + 397 = 0$; e) $9x^2 + 6xy + y^2 - 200x + 200y - 1560 = 0$. 868. a) $V = (3, -2)$, $F = (3; 3{,}5)$, $p = 3$, $x = 3$, $y = -1/2$; b) $V = (-4, -8)$, $F = (-4; -5{,}5)$, $p = 5$, $x = -4$, $y = -10{,}5$; c) $V = (2{,}9)$, $F = (2, 10)$, $p = 2$, $x = 2$, $y = 8$, d) $V = (-1, -2)$, $F = (-5/6, -2)$, $p = 1/3$, $y = -2$, $x = -7/6$; e) $V = (-2, 2)$, $F = (-25/12{,}2)$, $p = 1/6$, $y = 2$, $x = -23/12$. 869. $y^2 = 8{,}1(x + 10)$. 870. $p = 12{,}5$; vrcholová rovnica tejto paraboly je $y^2 = 25x$. 871. Ohnisko je 3 cm od vrcholu

reflektora, vrcholová rovnica paraboly je $y^2 = 12x$. **872.** $p = 6{,}4$. **873.** a) 12; b) 7,5. **874.** a) $A = (2, 4)$, $B = (2, -4)$; b) $A = (15; -12{,}5)$, $B = (-15; -12{,}5)$; c) $A = (-29/2, \sqrt{87})$, $B = (-29/2, -\sqrt{87})$. **875.** a) Horná polovica paraboly $y^2 = 16x$; b) ľavá polovica paraboly $x^2 = 75y$; c) pravá polovica paraboly $x^2 = 12y$; d) parabola $y^2 = -36x$; e) pravá polovica paraboly $(x + 3)^2 = 4(y - 6)$; f) dolná polovica paraboly $(y - 4)^2 = -4(x - 1)$; g) horná polovica paraboly $(y + 1)^2 = -72(x - 15/8)$. **876.** a) $M = (9, 12)$, $N = (9, -12)$; b) $M = (4, 8)$, $N = (4, -8)$; c) $M = (25, 20)$, $N = (25, -20)$; d) $M = (4, 8)$, $N = (4, -8)$; e) $M = (25, 20)$, $N = (25, -20)$; d) $M = (4, 8)$, $N = (3844/2209, -248/47)$. **877.** $x = 2$. **878.** a) $x^2 = y + 4$; b) $y^2 = 3x$; c) $y = -x^2 - 4x + 3$. **879.** a) $\varrho = 6/(1 + \cos\varphi)$, $\varrho = 6/(1 - \cos\varphi)$; b) $\varrho = 10/(1 + \cos\varphi)$, $\varrho = 10/(1 - \cos\varphi)$. **880.** $\varrho = 16\cos\varphi/\sin^2\varphi$. **881.** a) $M = (p, \pi/2)$ alebo $M = (p, -\pi/2)$; b) $M = (2p/3, \pi/3)$ alebo $M = (2p/3, -\pi/3)$; c) $M = (p/2, 0)$. **882.** Množina pozostáva z n bodov paraboly $y^2 = mx$ so súradnicami $x_k = k^2m/n$, $y_k = km/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. **883.** $y^2 = 8(x + 1)$. **884.** $y^2 = px$. **885.** $x^2 = p(y - p/4)$. **886.** Ak za priamku p zvolíme os o_x a bod $A = (0, a)$, kde $a \geq 0$, máme: 1. pre $c > a$ je množina bodov dvojica parabol $x^2 = -2(c - a)[y - (a + c)/2]$, $x^2 = 2(a + c)[y + (c - a)/2]$; 2. pre $c = a$ je množina bodov priamka kolmá na p, ktorá prechádza bodom A. **887.** a) $x^2 = 4(y + 1)$ a $x^2 = -4(y - 1)$; b) $y^2 = 2(x + 1/2)$ a $y^2 = -2(x - 1/2)$. **888.** a) Ak polkružnica má polomer r, množina bodov je časť paraboly, ktorá sa nachádza v danej polkružnici, pričom ohnisko paraboly je v strede priemeru polkružnice, os je kolmá na priemer a parameter sa rovná polomeru; b) parabola s vrcholom v bode dotyku, s ohniskom v strede kružnice a normála ku kružnici, ktorá prechádza bodom dotyku. **889.** Parabola s vrcholom v päte kolmice s A na p, s ohniskom v A a s parametrom $2\varrho(A, p)$.

4.14. Priamka a kužeľosečka

891. a) Priamka pretína kružnicu v bodoch $A = (5, 4)$, $B = (13/5, -4/5)$; b) priamka nepretína kružnicu; c) priamka sa dotýka kružnice v bode $P = (6, 3)$. **892.** a) $q < -3$, $q > 5$; b) $-3 < q < 5$; c) $q = -3$, $q = 5$. **893.** $\sqrt{2}$. **894.** $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$. **895.** $x + y - 3 = 0$. **896.** a) $3x + 4y = 25$; b) $2x - 3y - 13 = 0$; c) $4x - 3y - 2 = 0$. **897.** $\varrho\cos(\varphi - \varphi_0) = a$. **898.** $2x + y - 8 = 0$; $2x + y + 12 = 0$. **899.** $2x + y - 4 = 0$, $2x - y - 14 = 0$. **900.** $A = (4, 1)$. **901.** a) $2\sqrt{2}x - y = 0$; b) $x - y - 1 = 0$. **902.** $2x - 3y - 6 = 0$, $2x - 3y + 20 = 0$, $3x + 2y - 35 = 0$, $3x + 2y - 9 = 0$. **903.** $45°$. **904.** $q^2 = R^2(1 + k^2)$. **905.** $90°$. **907.** a) $3x + 4y - 5 = 0$, $4x + 3y + 5 = 0$; b) $4x + 3y = 0$, $3x + 4y - 1 = 0$. **908.** $x = 0$, $8x + 15y = 0$. **909.** a) $5x + 7y - 9 = 0$; b) $5x + 4y - 12 = 0$. **910.** $90°$. **911.** $\sqrt{10}$. **912.** 3. **913.** $x + 2y + 15 = 0$, $\sqrt{5}/5$, $4\sqrt{5}/5$. **915.** a) Priamka pretína elipsu v bodoch $A = (5, 3)$, $B = (-125/31, -117/31)$; b) priamka sa dotýka elipsy v bode $A = (3, 5)$; c) priamka je mimobežka. **916.** Pre $q \in (-5, 5)$ priamka pretína elipsu. Pre $q = -5$ alebo $q = 5$ priamka je dotyčnica ku elipse. Pre $|q| > 5$ priamka je mimobežka. **917.** $P_1 = ((9 + 12\sqrt{3})/13, (4 - 12\sqrt{3})/13)$, $P_2 = ((9 - 12\sqrt{3})/13, (4 + 12\sqrt{3})/13)$. **918.** 46,08. **919.** $9x - 8y - 25 = 0$. **920.** $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$. **921.** $y = -5x/14$. **922.** a) $y = x$, $y = -9x/16$; b) $y = 2x$, $y = -2x/9$. **923.** $y = bx/a$, $y = -bx/a$. **924.** $x - 2y + 8 = 0$, $13x + 6y - 56 = 0$. **925.** $M = (5, 8)$. **926.** $4\sqrt{3}$. **927.** a) $2x + y - 9 = 0$, $2x + y + 9 = 0$; b) $x + 2y + 18 = 0$, $x + 2y - 18 = 0$. **928.** $2x + 9y - 9 = 0$. **929.** $P = (2, 5)$. **930.** $x^2 + 4y^2 = 20$, $4x^2 + y^2 = 20$. **931.** $x^2/20 + y^2/5 = 1$. **932.** $\varphi \doteq 56°19'$. **933.** $3x + 4y + 17 = 0$, $3x - 4y + 17 = 0$, $3x - 4y - 17 = 0$, $3x + 4y - 17 = 0$. **936.** $x^2/16 + 16y^2/81 = 1$. **937.** a) Priamka pretína hyperbolu v bodoch $P = (6, 4)$, $Q = (-1902/383, 932/383)$; b) priamka sa dotýka hyperboly v bode $A = (10, 7)$; c) priamka je mimobežka. **938.** Pre $|q| > \sqrt{21}$ priamka pretína hyperbolu v dvoch bodoch, pre $q = \pm\sqrt{21}$ priamka sa dotýka hyperboly, pre $q \in (-\sqrt{21}, \sqrt{21})$ priamka nepretína hyperbolu. **939.** $9x - 10y + 135 = 0$. **940.** 9. **941.** $y = x/4$. **942.** $(x - 3)^2 - y^2 = 9$. **943.** $4x + y = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 3/5$. **944.** a) $2x - y = 0$, $x - 3y = 0$; b) $2x +$

$+ y = 0$, $x + 3y = 0$. **945.** a) $x + 3 = 0$, $y = 0$; b) $x + 3y + 6 = 0$, $3x - y + 38 = 0$. **946.** a) $x + y + \sqrt{5} = 0$, $x + y - \sqrt{5} = 0$; b) $6x - 11y + 33 = 0$, $6x - 11y - 33 = 0$. **947.** $5x - 3y - 8 = 0$, $5x - 3y + 8 = 0$. **948.** $x - 2y + 4\sqrt{2} = 0$, $x - 2y - 4\sqrt{2} = 0$. **949.** $A = (16, 6)$. **950.** $27x - 20y - 36 = 0$. **951.** $3x - 4y - 10 = 0$, $9x - 2y + 40 = 0$. **952.** $x^2/8 - y^2/4 = 1$. **953.** $x^2 - y^2 = 16$. **954.** $a = 3/\sqrt{17}$, $b = 1/\sqrt{17}$. **956.** a) $2x - y - 6 = 0$; b) $x - 38y - 3 = 0$. **957.** $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$, ak $a \geqq b$; prázdna množina ak $a < b$. **958.** a) Priamka pretína parabolu v bodoch $(5, 10)$, $(5/9, 10/3)$; b) priamka sa dotýka paraboly v bode $(8, -2)$; c) priamka nepretína parabolu. **959.** Pre $q < 5/2$ priamka pretína parabolu, pre $q = 5/2$ sa jej dotýka a pre $q > 5/2$ ju nepretína. **960.** $10x - 3y - 2 = 0$. **961.** $y + 3 = 0$. **962.** 6,25. **963.** $\operatorname{tg} \varphi = 4\sqrt{7}/3$. **964.** $x - \sqrt{3}y = 0$, $x + \sqrt{3}y = 0$, $x - 33 = 0$. **965.** a) $2x + y + 1 = 0$; b) $6x + 4y + 9 = 0$; c) $x - y - 2 = 0$; d) $32x - 16y - 39 = 0$. **966.** a) $x + 2y + 2 = 0$, $2x - y - 6 = 0$; b) $x + 2 = 0$, $y - 2 = 0$; c) $y - 3 = 0$, $x + 3 = 0$. **967.** $4x - 8y + 3 = 0$. **968.** a) $(1/9, 2)$; b) $(-24, 9)$. **969.** a) $2x - 2y + 7 = 0$; b) $2x - 5y - 20 = 0$. **970.** $x - 3y + 9 = 0$. **971.** $P = (-15/2, -5)$. **972.** a) $x - 2y + 4 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$; b) $2x - y - 2 = 0$, $4x + y + 8 = 0$. **973.** $\operatorname{tg} \varphi = 4$. **974.** Paraboly sa pretínajú v bode $P = (0, 0)$ pod pravým uhlom, v bode $Q = (4, 4)$ pod uhlom $\varphi \doteq 36°52'$. **975.** $p/(2\,|\sin \alpha|)$. **977.** $x^2 = 4py$ alebo $x = 0$. **978.** $y^2 = 2px$. **979.** Parabola. **980.** $y^2 = p(x - 3p/2)/2$. **981.** $y^2 = p(x - p/2)/2$. **982.** a) Direkčná priamka, elipsy; b) direkčná priamka hyperboly; c) direkčná priamka paraboly.

4,15. Všeobecná rovnica kužeľosečky

984. a) $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1/2$, $a_{22} = 2$, $a_{13} = \sqrt{2}/2$, $a_{23} = -1/2$, $a_{33} = 6$; b) $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 2$, $a_{33} = -6$; c) $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -7/2$, $a_{23} = 3$, $a_{33} = 9$; d) $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = 1$, $a_{33} = -1$; e) $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$. **985.** a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; b) $x^2 - y + 2 = 0$. **986.** a) $2x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 3y = 0$; b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 24x - 72y + 135 = 0$, $y^2 - x - 8y + 15 = 0$. **987.** Body A, B nie sú bodmi množiny, bod C je bodom množiny. **988.** a) Kužeľosečka pre $c \neq 19/7$; b) stredová kužeľosečka pre $c \in (-\infty, 19/7) \cup (19/7, 4) \cup (4, \infty)$; c) degenerovaná kužeľosečka pre $c = 19/7$; d) parabola pre $c = 4$. **989.** a) $6X^2 - 7XY + Y^2 - 25X + 10Y + 27 = 0$; b) $6X^2 - 7XY + Y^2 - 12X/5 - 4Y/15 + 418/75 = 0$. **990.** a) $6x^2 - 21xy + 28y^2 - 6x - 28y = 0$. **991.** a) Prázdna množina; b) hyperbola; c) parabola. **992.** a) $S = (-1, 2)$; b) $S = (-3, -2)$; c) nemá stred; d) nemá stred; e) $S = (2, -3)$. **993.** a) $2x + 4y - 3 = 0$; b) $x = 0$; c) $y = 1/2$; d) $x + y = 0$. **994.** $X^2 + XY - 3 = 0$. **995.** a) Bod $O = (0, 0)$; b) dvojica rôznobežiek $y = x$, $y = -x$; c) dvojica rôznobežiek $y = 0$, $x = 0$; d) prázdna množina; e) priamka $x + y = 0$. **996.** a) Priamka $x - 2y - 3 = 0$; b) bod $S = (-1, 1)$; c) rôznobežky $x - 2y - 5 = 0$, $2x + y = 0$; d) priamka $5x + 3y + 7 = 0$; e) rovnobežky $3x - 2y - 11 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$. **997.** a) $X^2/28 + Y^2/(28/3) = 1$ alebo $X^2/(28/3) + Y^2/28 = 1$; b) $X^2/(23/2) - Y^2/(23/4) = 1$ alebo $-X^2/(23/4) + Y^2/(23/2) = 1$. **998.** a) Elipsa $X^2/9 + Y^2 = 1$, alebo $X^2 + Y^2/9 = 1$; b) parabola $5X^2 \pm 6\sqrt{5}Y = 0$ alebo $5Y^2 \pm 6\sqrt{5}X = 0$; c) elipsa $X^2/4 + Y^2 = 1$ alebo $X^2 + Y^2/4 - 1$. **999.** a) Elipsa $X^2/9 + Y^2 = 1$ alebo $X^2 + Y^2/9 = 1$; b) prázdna množina; c) bod $S = (2, -1)$; d) hyperbola $X^2/4 - Y^2 = 1$ alebo $-X^2 + Y^2/4 = 1$; e) dvojica rôznobežiek $4x - y + 2 = 0$, $2x - y - 2 = 0$; f) parabola $Y^2 = \pm 2X$ alebo $X^2 = \pm 2Y$; g) prázdna množina; h) rovnobežky $x - 5y - 5 = 0$, $x - 5y + 3 = 0$; i) priamka $3x - y - 2 = 0$. **1000.** a) $S = (1, 1)$, $X^2/16 + Y^2/4 = 1$, $x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$; b) $S = (-1, 1)$, $X^2/30 + Y^2/5 = 1$, $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; c) $S = (1, -1)$, $X^2/16 + Y^2/9 = 1$, $x - y - 2 = 0$, $x + y = 0$. **1001.** a) $S = (-4, +3)$, $X^2/9 - Y^2/36 = 1$, rovnice osí $x - 2y + 10 = 0$, $2x + y + 5 = 0$, rovnice asymptot $x = 3$, $3x + 4y = 0$; b) $S = (4, -3/2)$, $X^2 - Y^2 = 22$, rovnice osí $2x + 2y - 5 = 0$, $2x - 2y - 11 = 0$, rovnice asymptot $x - 4 = 0$, $y + 3/2 = 0$. **1002.** a) $V = (3, -2)$, $x - y - 5 = 0$, $p = \sqrt{2}$,

$F = (-13/10, 7/5)$, $Y^2 = 2\sqrt{2}X$; b) $V = (-1, 1)$, $4x + 3y + 1 = 0$, $p = 1$, $F = (2/5, -3/10)$, $Y^2 = 2X$. **1003.** a) Priamka pretína kužeľosečku v bodoch $M = (0, 1)$, $N = (-5/2, 1/2)$; b) priamka kužeľosečku nepretína; c) priamka sa dotýka kužeľosečky v bode $T = (0, 1)$; d) priamka pretína kužeľosečku iba v jednom bode $P = (1/6, 1/2)$. **1004.** $4x - 3y - 18 = 0$, $4x + 7y + 10 = 0$. **1005.** a) $x + 4 = 0$, $3x - 4 = 0$; b) $x + y - 1 = 0$, $x + y + 13/3 = 0$. **1006.** $P = (1, -3)$. **1007.** a) $5x + 2y = 0$, $x + 2y = 0$; b) $2x - 7y + 13 = 0$, $y - 3 = 0$; c) $4x + 7y + 10 = 0$, bod A leží na kužeľosečke. **1008.** $x + 5y + 2 = 0$. **1009.** $3x + 2y + 29 = 0$. **1010.** $12x - 6y - 11 = 0$, $x - 3y + 7 = 0$; $3x - 3y + 2 = 0$, $2x - 5 = 0$. **1011.** a) $10x + 7y + 5 = 0$; b) $7x + 6y + 4 = 0$; c) $3x + y + 1 = 0$. **1012.** a) $3x - y = 0$; b) $9x - 3y + 7 = 0$; c) $3x - y + 6 = 0$; d) $15x - 5y + 8 = 0$, $15x - 5y + 19 = 0$; e) $30x - 10y + 27 = 0$. **1013.** $x^2 - 3xy - 6y^2 + x - 2y = 0$. **1014.** a) $xy + x + y = 0$; b) $xy - 2y^2 - x + y - 5 = 0$. **1015.** $8x^2 - 16xy + 8y^2 + (8 - 2\sqrt{7})y + 24 + 8\sqrt{7} = 0$, $8x^2 - 16xy + 8y^2 + (8 + 2\sqrt{7})y + 24 - 8\sqrt{7} = 0$. **1016.** $9x^2 \pm 30xy + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$ (dve paraboly).

4,16. Rovina

1018. a) $y - 2z + 2 = 0$; b) $x + 2z - 6 = 0$; c) $x + y - 4 = 0$. **1019.** a) $z = 1$; b) $x = 4$; c) $y = 3$. **1020.** a) $7y + 3z = 0$; b) $7x - 2z = 0$; c) $3x + 2y = 0$. **1021.** a) $3x + 8y - 4z = 0$; b) $x - y - 2z - 6 = 0$. **1022.** a) $\{3k, k, -5\}$; b) $\{2k, -k, -6k\}$; c) $\{3k, -7k, 0\}$; d) $\{3k, 0, -2k\}$; e) $\{0, 0, k\}$; f) $\{k, 0, 0\}$, kde k je ľubovoľné reálne číslo. **1023.** a) $5x - 3y = 0$; b) $2x + 8y + 5z - 33 = 0$. **1024.** a) $4x + 5y + 7z - 21\sqrt{10} = 0$; b) $3x + 2y - \sqrt{3}z - 40 = 0$. **1025.** a) Je; b) nie je; c) je; d) nie je; e) je; f) je. **1026.** $(-10\boldsymbol{i}/\sqrt{253} - 2\boldsymbol{j}/\sqrt{253} + 12\boldsymbol{k}/\sqrt{253})$, $r = 40/\sqrt{253}$. **1027.** a) $135°$, $120°$, $60°$, 4; b) $\arccos(2/\sqrt{6})$, $\pi - \arccos(1/\sqrt{6})$, $\pi - \arccos(\sqrt{6}/6)$, $1/\sqrt{6}$; c) $60°$, $90°$, $30°$, 2; d) $90°$, $90°$, $0°$, $3/2$; e) $\pi - \arccos(2/7)$, $\arccos(6/7)$, $\pi - \arccos(3/7)$, $12/7$, f) $\pi - \arccos(1/\sqrt{21})$, $\pi - \arccos(4/\sqrt{21})$, $\arccos(2/\sqrt{21})$, $16/\sqrt{21}$. **1028.** a) 3, -6, 2, $P = (3, 0, 0)$, $Q = (0, -6, 0)$, $R = (0, 0, 2)$; b) 35; -15; 10,5; $P = (35, 0, 0)$, $Q = (0, -15, 0)$, $R = (0, 10, 5)$. **1029.** a) 9; b) $\sqrt{801}$; c) 24. **1030.** a) $-x/5 + y/2 - z/10 = 1$; b) $x + y + z + 1 = 0$; c) $x + y + z + 1 = 0$, $x - y + z + 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$, $x + y - z + 3 = 0$; d) $x/1{,}5 + y/0{,}5 + z = 1$. **1031.** $x/\sqrt{6} + y/\sqrt{6} + z/\sqrt{10} = 1$, $x/\sqrt{6} + y/\sqrt{6} - z/\sqrt{10} = 1$, $x/\sqrt{6} - y/\sqrt{6} - z/\sqrt{10} = 1$, $-x/\sqrt{6} + y/\sqrt{6} + z/\sqrt{10} = 1$, $-x/\sqrt{6} - y/\sqrt{6} + z/\sqrt{10} = 1$, $-x/\sqrt{6} + y/\sqrt{6} - z/\sqrt{10} = 1$, $x/\sqrt{6} - y/\sqrt{6} + z/\sqrt{10} = 1$, $-x/\sqrt{6} - y/\sqrt{6} - z/\sqrt{10} = 1$. **1032.** a) $3x - 4y - z + 8 = 0$; b) $x/4 + y/2 + z/4 = 1$; c) $x/3 + y/2 + z/6 = 1$. **1033.** $2x + 2y - z - 1 = 0$. **1034.** a) $-x/21 + y/10{,}5 - z/10{,}5 = 1$, $-x/3 + 2y/3 + 2z/3 - 7 = 0$; $x = -21 + 2u - 2v$, $y = u$, $z = v$; b) $x/(14/3) + y/(-7) + z/(-7/3) = 1$, $3x/7 - 2y/7 + 6z/7 - 2 = 0$; $x = 14/3 + 2u/3 - 2v$, $y = u$, $z = v$; c) $x/(-5/4) + y/(15/7) + z/(15/8) = 1$, $-12x/\sqrt{257} + 7y/\sqrt{257} + 8z/\sqrt{257} - 15/\sqrt{257} = 0$; $x = 1 + u - v$, $y = 2 - v$, $z = 13/8 + 3u/2 - 5v/8$; d) $x/5 + y(15/4) + z/3 = 1$, $3x/5\sqrt{2} + 4y/5\sqrt{2} + z/\sqrt{2} - 3/\sqrt{2} = 0$; $x = 5 - 4u/3 - 5v/3$, $y = u$, $z = v$; e) nemá, $-12x/13 + 5y/13 - 1 = 0$; $x = -13/12 + 5u/12$, $y = u$, $z = v$; f) nemá; $x - 7/2 = 0$; $x = 7/2$, $y = u$, $z = v$; g) nemá; $-z - 1 = 0$; $x = u$, $y = v$, $z = -1$. **1035.** a) $10x + 6y - 3z - 31 = 0$; b) $3x + 3y + z - 12 = 0$; c) $5x - 7y - 3z - 1 = 0$; d) $7x - 4y - 5z = 0$. **1036.** a), c) rovnobežné; b), d) kolmé. **1037.** 1. a) $l = 49 - 2{,}5k$; b) $k = -3 - 2l$; c) $k = 1 + 3l/2$; 2. a) $l = -4$, $k = -5/2$; b) $k = 1/3$, $l = 6$; c) $k = -4$, $l = 3/2$. **1038.** a) $\pi/2$; b) $\arccos(2/15)$, $\pi - \arccos(2/15)$; c) $\pi/3$, $2\pi/3$; d) $\pi/3$, $2\pi/3$. **1039.** a) $3x - 2y + 3z = 0$; b) $3x - 2y + 3z - 13 = 0$. **1040.** $x - 3y + 4z - 21 = 0$, $y + 2z - 1 = 0$, $x - 4 = 0$. **1041.** a) $2x - 3z - 8 = 0$; b) $y + 5z - 11 = 0$. **1042.** $37x + 35y + 19z - 184 = 0$. **1043.** a) $-6x + 2z + 14 = 0$; b) $x - z + 1 = 0$; c) $x - y - 2 = 0$. **1044.** $16x - 6y - 9z - 44 = 0$. **1045.** $x + 20y + 7z - 29 = 0$, $x - z - 5 = 0$. **1046.** a) $-7/3$, $7/3$; b) -4, 4; c) $\sqrt{38}/2$, $\sqrt{38}/2$; d) 1, 1; e) $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. **1047.** a), b) Ležia, c), d) neležia; e) ležia. **1048.** a) Pretína; b) nepretína. **1049.** $3x + y + 2z - 2 \pm 2\sqrt{14} = 0$.

1050. a) $\sqrt{6}/12$; b) 2; c) 5. **1051.** a) $(12/\sqrt{113})^3$; b) $\sqrt{2{,}3^3}$. **1052.** a) $(0, 7, 0)$, $(0, -21, 0)$; b) $(7, 0, 0)$, $(133/13, 0, 0)$; c) $(0, 0, -7)$, $(0, 0, 49/8)$. **1053.** a) $16x - 12y + 15z - 125 = 0$, $16x - 12y + 15z + 25 = 0$; b) $16x - 12y + 15z + 75 = 0$. **1054.** a) $x + 3y - 2z + 1 = 0$; b) $2x - 7y - 9z - 2 = 0$; c) $x - 5y + 4z + 13/4 = 0$; d) $8x + 10y - 6z - 3 = 0$. **1055.** $15x + 10y - 10z - 8 = 0$. **1056.** a) $2x - y - 3z + 12 = 0$, $3y - z + 2 = 0$; b) $8x - 7y + 13z + 1 = 0$, $4x - y - 3z - 19 = 0$; c) $3x - 2y - 7z - 6 = 0$, $5x + 4y + z - 12 = 0$. **1057.** a) Pretínajú sa; b) pretínajú sa; c) sú rovnobežné; d) splývajú. **1058.** a) Jedným bodom $A = (3, 1, 2)$; b) jednou priamkou; c) v troch rovnobežkách; d) jedným bodom $A = (3, 0, 4)$; e) jedným bodom $A = (3, 0, -1)$. **1059.** $3x - 61y - 20z = 0$. **1060.** $x + y + 2z - 6 = 0$. **1061.** $a = -3$. **1062.** $71x + 12y - 2z - 98 = 0$, $-110x + 493y - 947z + 298 = 0$. **1063.** $x + y - 8z + 10 = 0$.

4,17. Priamka v priestore

1064. a) $x = -1 - 2t, y = 3 + 3t, z = 4 + t$; $(x + 1)/-2 = (y - 3)/3 = (z - 4)/1$; b) $x = 2 + t/2$, $y = 3 - t/2$, $z = 4 + \sqrt{2}t/2$, $(x - 2)/1 = (y - 3)/-1 = (z - 4)/\sqrt{2}$. **1065.** $x = 3 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = 2 + 2t$. **1066.** a) $(x - 4)/2 = (y + 5)/7 = (z - 7)/9$; $x = 4 + 2t$, $y = -5 + 7t$, $z = 7 + 9t$; b) $(x - 4) : (y + 5) : (z - 7) = -1 : 2 : 0$; $x = 4 - t$, $y = -5 + 2t$, $z = 7$; c) $(x - 4)/4 = (y + 5)/-3 = (z - 7)/-11$; $x = 4 + 4t$, $y = -5 - 3t$, $z = 7 - 11t$; d) $(x - 4)/13 = (y + 5)/-19 = (z - 7)/7$; $x = 4 + 13t$, $y = -5 - 19t$, $z = 7 + 7t$, e) $(x - 4) : (y + 5) : (z - 7) = 1 : 0 : 0$; $x = 4 + t$, $y = -5$, $z = 7$; f) $(x - 4) : (y + 5) : (z - 7) = 0 : 1 : 0$; $x = 4$, $y = -5 + t$, $z = 7$; g) $(x - 4) : (y - 5) : (z - 7) = 0 : 0 : 1$; $x = 4$, $y = -5$, $z = 7 + t$. **1067.** a) $x/2 = y/3 = (z + 2)/-2$; $x = 2t$, $y = 3t$, $z = -2 - 2t$; b) $x/2 = (y - 2)/-1 = (z + 6)/3$; $x = 2t$, $y = -2 - t$, $z = -6 + 3t$; c) $(x - 4) : (y - 1) : (z - 1) = 1 : 0 : -1$; $x = 4 + t, y = 1$, $z = 1 - t$. **1068.** a) strana a: $(x + 7)/1 = (y + 11)/7 = (z - 6)/-2$; strana b: $(x + 5) : (y - 3) : (z - 2) = 5 : 2 : 0$, strana c: $(x - 5)/6 = (y - 7)/9 = (z - 2)/-2$; b) t_a: $(x - 5) : (y - 7) : (z - 2) = 11 : 11 : 0$, t_b: $(x + 7)/7 = (y + 11)/16 = (z - 6)/-4$, t_c: $(x + 5)/4 = (y - 3)/-5 = (z - 2)/2$; c) v_a: $(x - 5)/251 = (y - 7)/-25 = (z - 2)/38$, v_b: $(x + 7)/66 = (y + 11)/-165 = (z - 6)/58$; v_c: $(x + 5)/317 = (y - 3)/-190 = (z - 2)/96$. **1069.** $x/1 = (y - 4)/-3 = (z + 10)/-8$. **1070.** a) $(x - 1) : (y + 2) : z = 0 : 0 : 1$; $x = 1$, $y = -2$, $z = t$; b) $(x + 3) : y : (z - 4) = 0 : 1 : 0$; $x = -3$, $y = t$, $z = 4$; c) $(x - 2) : (y - 4) : z = 1 : 0 : -1$; $x = 2 + t$, $y = 4$, $z = -t$; d) $(x - 7) : y : (z - 9) = 0 : 1 : -2$; $x = 7$, $y = t$, $z = 9 - 2t$; e) $(x - 4) : (y + 3) : z = 0 : 0 : 1$; $x = 4$, $y = -3$, $z = t$. **1071.** a) $(x - 3)/2 = (y - 4)/4 = (z - 1)/5$; $x = 3 + 2t$, $y = 4 + 4t$, $z = 1 + 5t$; b) $(x + 1)/5 = (y - 1)/-1 = (z - 2)/3$; $x = -1 + 5t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + 3t$; c) $x/1 = (y - 3)/1 = (z - 2)/2$; $x = t$, $y = 3 + t$, $z = 2 + 2t$. **1072.** $(x - 10/3) : y : z = 4 : 1 : 0$, $(x + 2) : y : (z - 2) = 8 : 0 : -3$, $x : (y - 1/2) : (z - 2) = 0 : 2 : 3$. **1073.** $x/5 = y/-3 = (z - 12)/-5$. **1074.** $(x - 1) : (y - 2) : z = 0 : 0 : 1$. **1075.** $\cos\alpha = 6/\sqrt{61}$, $\cos\beta = 4/\sqrt{61}$, $\cos\gamma = -3/\sqrt{61}$. **1076.** a) $45°$, $135°$; b) $\cos\varphi = \pm 4/21$; c) $90°$; d) $60°$, $120°$; e) $\cos\varphi = \pm 43/21\sqrt{15}$. **1077.** a) Rôznobežky; b) rovnobežky; c) tá istá priamka; d) mimobežky. **1078.** a) Ak $a = a_1 = 0$; b) $by + d = 0$, $b_1y + d_1 = 0$; ak $b \neq 0$ a $b_1 \neq 0$, potom musí platiť $bd_1 - b_1d = 0$; ak $b = 0$, potom musí $b_1 \neq 0$ a $d = 0$; ak $b_1 = 0$, potom musí $d_1 = 0$ a $b \neq 0$; c) $c = 0, d = 0$ alebo $c_1 = 0, d_1 = 0$; d) $bc_1 - b_1c = 0$; e) $ad_1 - a_1d = 0$, $cd_1 - c_1d = 0$, ale $bd_1 - b_1d \neq 0$; f) $d = 0$, $d_1 = 0$. **1079.** a) $d = 18$; b) $d = -2$; c) $d = 3$. **1080.** $a = 1$. **1081.** $(x - 3)/4 = (y + 4)/1 = (z - 5)/-3$. **1082.** $(x - 0)/1 = (y + 16)/-4 = (z - 26)/5$. **1083.** $x : y : z = 1 : 0 : -2$. **1084.** $(x - 1) : (y + 3) : z = 0 : 9 : 4$; b) $(x - 4)/3 = (y - 8)/-7 = (z - 5)/-3$. **1085.** $x = -4t$, $y = -5 + 2t$, $z = 1 - 3t$.

4,18. Priamka a rovina

1086. a) $(8/13, 38/13, 0)$, $(0, -14, 38)$, $(14/5, 0, 8/5)$; b) $(-3, -10, 0)$, $(0, 1/2, -3/2)$, $(-1/7, 0, -10/7)$. **1087.** $(-6, -6, -10)$. **1088.** $(x-4)/3 = y/-2 = z/5$; **1089.** a) $(81/29, -30/29, -27/29)$; b) $(-1, 2, -1)$. **1090.** a) Rovnobežná; b) leží v rovine; c) leží v rovine; d) pretína v bode $(1, 4, 2)$; e) pretína v bode $(5, 8, 2)$. **1091.** a) $(3, 4, 2)$; b) $(-5, 1, 0)$; c) $(3, 1, -6)$. **1092.** a) Ležia; b) neležia; c) neležia. **1093.** a) $x/4 = y/-8 = (z-1)/12$; b) $(x-1)/3 = (y-2)/-2 = (z-6)/7$. **1094.** a) $3x - 4y - 1 = 0$, $5x + 4z - 11 = 0$, $5y + 3z - 7 = 0$, $(x-3) : (y-2) : z = 4 : 3 : 0$, $(x-3) : y : (z+1) = 4 : 0 : -5$, $x : (y-2) : (z+1) = 0 : 3 : -5$; b) $x + 9y - 10 = 0$, $13x + 9z - 42 = 0$, $13y - z - 12 = 0$, $(x-10) : y : z = 9 : 1 : 0$, $(x-3) : y : (z - 1/3) = 9 : 0 : 13$, $x : (y-1) : (z-1) = 0 : 1 : 13$. **1095.** a) $x - 2y - z + 8 = 0$, $8x - y + 10z - 18 = 0$; b) $(x+1)/5 = y/-17 = z/1$. **1096.** a) $45°$, $135°$; b) $30°$, $120°$; c) $0°$. **1097.** $-x + y + z = 0$. **1098.** a) $x - 2y - 2z + 2 = 0$; b) $2x - 4y - z - 2 = 0$. **1099.** a) $x + y + 3z - 10 = 0$; b) $2x + 7y + 3z - 35 = 0$; c) $x + y + z - 5 = 0$. **1100.** a) $x - y - z + 3 = 0$; b) $10x - 18y + 11z - 77 = 0$. **1101.** a) $5x - y - 5z + 13 = 0$; b) $x + 2y + z - 8 = 0$; c) $2x - y + 2z - 11 = 0$. **1102.** a) $26x - 7y - 18z + 51 = 0$; b) $3x - y - z - 2 = 0$; **1103.** $2x - y - z + 5 = 0$. **1104.** $2x + y + 2z - 2 = 0$. **1105.** a) $(0, 22, 19)$; b) $(-6, 12, 14)$; c) $(1, -4, 5)$. **1106.** a) $Q = (2, -5, 7)$; b) $Q = (5, -9, 6)$. **1107.** $(x-2)/(-14/15) = (y+2)/(17/3) = z/(16/5)$. **1108.** $(x-11)/-7 = (y - 9/2)/-12 = (z-9)/10$. **1109.** $x + z - 2 = 0$, $5x + 2y + 4z + 7 = 0$. **1113.** a) $3/\sqrt{2}$; b) $\sqrt{5524/107}$. **1114.** $2/\sqrt{3}$; **1115.** a) $1/\sqrt{2}$; b) $2/\sqrt{22}$. **1116.** $y - 1 = 0$, $x + y + z - (1 + \alpha) = 0$. **1117.** $\alpha(y-2) + z - 1 = 0$, $(\alpha + 1)x + z = 0$, kde α je ľubovoľné číslo.

4,19. Zobrazenie a transformácia priestoru

1118. a) $P' = (0, 2, 5)$, $x' = x + 2$, $y' = y + 1$, $z' = z + 2$; b) $P' = (1, 5, 1)$, $x' = x + 3$, $y' = y + 4$, $z' = z - 2$. **1119.** $A' = (1, -1, 1)$, $B' = (8, -2, 4)$, $C' = (12, -5, 3)$, $D' = (7, -4, 0)$. **1120.** $x'^2 + 3y'^2 - 2y'z' + 2 = 0$. **1121.** $x' = 6y + 3z + 3$, $y' = x + 2z + 2$, $z' = x + 4y + 7z + 1$; inverzná transformácia má rovnice $x = 4x'/9 + 5y'/3 - 2z'/3 - 4$, $y = 5x'/18 + y'/6 - z'/6 - 1$, $z = -2x'/9 - y'/3 + z'/3 + 1$. **1122.** a) $x = x' + y'/2 - z'/2 + 2$, $y = -x' + y'/2 + z'/2 + 1$, $z = -2x' - y'/2 + 3z'/2 - 3$; b) $O' = (0, -3, 1)$, $\mathbf{e}_1' = \{-2, 1, -1\}$, $\mathbf{e}_2' = \{-1, 1, -1\}$, $\mathbf{e}_3' = \{1, 0, 2\}$, $M = (1, 1, -3)$, $\mathbf{a} = \{1, -1, -2\}$, $\mathbf{b} = \{1/2, 1/2, -1/2\}$, $\mathbf{c} = \{-1/2, 1/2, 3/2\}$. **1123.** a) Úloha má šesť riešení: $x' = a_{11}x$, $y' = a_{22}y$, $z' = a_{33}z$ alebo $x' = a_{11}x$, $y' = a_{23}z$, $z' = a_{32}y$ alebo $x' = a_{13}z$, $y' = a_{22}y$, $z' = a_{31}x$ alebo $x' = a_{12}y$, $y' = a_{21}x$, $z' = a_{33}z$ alebo $x' = a_{13}z$, $y' = a_{21}x$, $z' = a_{32}y$ alebo $x' = a_{12}y$, $y' = a_{23}z$, $z' = a_{31}x$; b) $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + m$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + n$, $z' = a_{33}z$; c) $x' = a_{11}x + a_{12}y$, $y' = a_{21}x + a_{22}y$, $z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + p$; **1124.** a) Regulárna transformácia, $x' + y' - 5 = 0$; b) transformácia nie je regulárna, obraz roviny R_{xy} je rovina $x' + y' - z' - 2 = 0$; c) transformácia nie je regulárna, obrazom roviny R_{xy} je priamka $x' = y'/2 = z'/(-1)$; d) transformácia nie je regulárna, obrazom priestoru a teda i roviny R_{xy} je bod $M = (2, 3, 4)$; e) transformácia nie je regulárna, obrazom roviny R_{xy} je počiatok $O = (0, 0, 0)$. **1125.** a) $A' = (-5, 3, -3)$, $B' = (-6, 1, 0)$, $C' = (-5, -1, 1)$; b) $A' = (3, -14, -3)$, $B' = (-1, 28, -14/3)$, $C' = (-1, 34, -4)$. **1126.** a) Obrazom roviny je rovina $z' = 5$, obrazom priamky je priamka $(x'-2)/1 = (y'-3)/(-1) = (z'+1)/3$, uhol sa nezachováva $\varphi = 90°$, $\varphi' = \arcsin 3/\sqrt{11}$; b) obrazom roviny je rovina $x' + y' + z' = 0$, obrazom priamky je počiatok $O = (0, 0, 0)$; c) obrazom roviny je rovina $5x' + 7y' - z' - 30 = 0$, obrazom priamky je priamka $x'/5 = y'/7 = z'/(-1)$, uhol sa zachováva, $\varphi = \varphi'$. **1127.** $x' = y/2 + z/2$, $y' = x/2 + z/2$, $z' = x/2 + y/2$. **1128.** a) $x' = y + z$, $y' = x + z$, $z' = x + y$; b) $x' = -x - z + a$, $y' = -y - z + a$, $z' = -x - y + a$. **1129.** a) $x' = (13x - 6y + 4z + 2)/17$, $y' = (6x + 26y - 6z - 3)/17$, $z' = (-4x + 6y + 21z + 2)/17$;

b) $x' = (9x + 3y + 6z + 25)/14$, $y' = (3x + y + 2z - 15)/14$, $z' = (6x + 2y + 2z - 30)/14$. **1130.** a) $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$; b) $x' = 14 - x$, $y' = 22 - y$, $z' = -4 - z$; c) $x' = -x$, $y' = y$, $z' = -z$; d) $x' = (-x + 2y + 2z)/3$, $y' = (2x - y + 2z)/3$, $z' = (2x + 2y - z)/3$; e) $x' = x$, $y' = -y$, $z' = z$; f) $x' = (6x + 4y - 12z + 20)/14$, $y' = (4x + 12y + 6z - 10)/14$, $z' = (-12x + 6y - 4z + 30)/14$. **1131.** a) $x' = 2x - 1$, $y' = 2y - 1$, $z' = 2z - 1$; b) $x' = -(x + 4y + 4z)/3 + 4$, $y' = -(4x + y + 4z)/3 + 4$, $z' = -(4x + 4y + z)/3 + 4$. **1132.** a) $x' = (2x - y + 2z)/3$, $y' = (-11x - 2y + 2z)/3$, $z' = (-2x - 14y - z)/3$; b) $x' = (x - 2y + 2z)/3 + 3$, $y' = (-2x - 2y - z)/3 + 2$, $z' = \pm(2x - y - 2z)/3 + 1$. **1133.** $x = (\bar{x} + 2\bar{y} + 2\bar{z})/3$, $y = (2\bar{x} + \bar{y} - 2\bar{z})/3$, $z = (-2\bar{x} + 2\bar{y} - \bar{z})/3$. **1134.** a) $x'/2 = y'/3 = z'/6$, $x'/6 = y'/2 = z'/(-3)$, $x'/3 = y'/(-6) = z'/2$; b) $3x' - 6y' + 2z' = 0$, $2x' + 3y' + 6z' = 0$, $6x' + 2y' - 3z' = 0$; c) $19x' - 10y' + 15z' - 70 = 0$, d) $\mathbf{i}' = \{2/7, 3/7, 6/7\}$, $\mathbf{j}' = \{-6/7, 2/7, 3/7\}$, $\mathbf{k}' = \{3/7, -6/7, 2/7\}$; e) $x/17 = y/(-2) = z$. **1135.** $z' - 1 = 0$. **1136.** $x : y : z = 0 : 1 : 2$. **1137.** a) $z = (x^2 + y^2)/2$; b) $4z = x^2 + y^2$. **1138.** $A = (\sqrt{3}/2, 3/2, \sqrt{6})$, $A = (\sqrt{3}, \pi/3, \sqrt{6})$; $B = (0, 0, 2)$, $B = (0, 0, 2)$; $C = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $C = (1, 3\pi/4, 0)$. **1139.** $A = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3)$, $A = (5, \pi/4, \operatorname{arctg} 3/4)$; $B = (-5, 0, 5)$, $B = (5\sqrt{2}, \pi, \pi/4)$, $C = (0, 2, -4)$, $C = (2\sqrt{5}, \pi/2, -\operatorname{arctg} 2)$. **1140.** $A = (1, \pi/3, 1)$, $A = (2, \pi/3, \pi/4)$; $B = (4, \pi/2, 4)$, $B = (4\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4)$; $C = (0, 0, -8)$, $C = (8, 0, -\pi/2)$. **1141.** $r[(\cos\varphi + \sin\varphi)\cos\vartheta + \sin\vartheta] = 1$, $M = (2 - \sqrt{2}, \pi/4, \pi/4)$. **1142.** a) $\varrho(A, B) = r_1 \sqrt{2[(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1))\cos\vartheta_2 \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_1]}$. b) $\sqrt{2\varrho_1^2(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) + (u_2 - u_1)^2}$. **1143.** a) $\cos\alpha = \cos\varphi \cos\vartheta$; b) $\cos\alpha = \varrho \cos\varphi/\sqrt{\varrho^2 + u^2}$, kde α je uhol úsečky OM s polárnou osou.

4,20. Kvadratické plochy

1144. a) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 7)^2 = 64$; b) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 5)^2 = 30$; c) $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 + (z - 3)^2 = 49$; d) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 49$; e) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 25$; f) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 6)^2 = 49$; g) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 8)^2 = 81$; h) $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 64$. **1145.** $(x - 3/2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3/2)^2 - 17/2 = 0$. **1146.** a) $(x - 29/7)^2 + (y + 23/7)^2 + (z - 52/7)^2 = 25$, $(x + 1/7)^2 + (y - 37/7)^2 + (z - 32/7)^2 = 25$; b) $(x + 4/3)^2 + (y + 16/3)^2 + (z - 31/3)^2 = 25$; c) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$. **1147.** $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 85$. **1148.** $S = (-4, 0, 0)$, $r = 4$; b) $S = (-1, 2, 0)$, $r = 3$; c) $S = (3, -1, 2)$, $r = 5$; d) $S = (-1, -4, -2)$, $r = 6$; e) $S = (1, -3, 2)$, $r = 9/2$. **1149.** a) Pretína v bodoch $A = (2, 1, 5)$, $B = (9, 5, 2)$; b) nepretína; c) dotýka sa v bode $A = (1, -1, 4)$. **1150.** a) Pretína v kružnici, ktorá leží v danej rovine, má stred $S = (-6/7, -9/7, 3/7)$ a polomer $r = \sqrt{990}/7$; b) dotýka sa v bode $M = (8, 8, 4)$; c) nepretína guľovú plochu. **1151.** $S = (1, 6, 0)$, $r = 5$. **1152.** a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 6)^2 = 27$; $x + y - 5 = 0$; b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 36$, $x - 2y + 1 = 0$. **1153.** a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12z = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - 5z - 26 = 0$; c) $x^2 + y^2 + z^2 - 22z + 41 = 0$. **1154.** $(x - 3)^2 + (z + 2)^2 = 8$, $y = 5$. **1155.** a) $x + 2y + 2z - 9 = 0$; b) $2x + 2y + z - 12 = 0$, $2x - y - 2z + 4 = 0$. **1156.** $x - y + 2z - 3 = 0$, $x - y + 2z - 15 = 0$. **1157.** a) $2x - 6y + 3z + 11 = 0$, $2x - 6y + 3z + 109 = 0$; b) $6x - 2y - 3z + 69 = 0$, $6x - 2y - 3z - 29 = 0$. **1158.** $\dfrac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} - a = 0$. **1159.** $S + \mathbf{r}\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $S - r\dfrac{|\mathbf{a}|}{\mathbf{a}}$. **1160.** a) $9x^2 + 9y^2 - 16z^2 = 0$; b) $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$; c) $16x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$; d) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$. **1161.** a) $x^2 + y^2 + (z + 13)^2 = 0$ alebo $x^2 + y^2 + (z - 7)^2 = 0$; b) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$; c) štyri kužeľové plochy: $xy + xz + yz = 0$ alebo $xy + xz - yz = 0$ alebo $xy - xz + yz = 0$ alebo $xy - xz - yz = 0$. **1162.** a) $9x^2 - 16(y - 5)^2 + 9z^2 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 8xy + 4xz + 4yz = 0$. **1163.** $51x^2 + 51y^2 - 49(z - 60/7)^2 = 0$ alebo $3x^2 + 3y^2 - (z - 12)^2 = 0$. **1164.** Kužeľová plocha s vrcholom $V = (3k, 0, 5k)$, s osou v osi o_z a určujúcou krivkou

$x = 0$, $y^2 + (z - 5k)^2 = 3k^2$. **1165.** a) $9x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 6xz - 6yz + 12x + 12y - 8z - 136 = 0$; b) $9y^2 + 4z^2 - 12yz - 18x - 6z = 0$; c) $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + 2x - 2y - 1 = 0$. **1166.** a) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 4x - 4y + 4z - 30 = 0$; b) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 2yz + 4xz - 24 = 0$. **1167.** $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 96 = 0$. **1168.** a) Rotačná valcová plocha s osou v osi o_z a určujúcou kružnicou $z = 0$, $x^2 + y^2 = 16$; b) hyperbolická valcová plocha s osou v osi o_y a určujúcou krivkou hyperbolou $y = 0$, $x^2/16 - y^2/9 = 1$; c) parabolická valcová plocha, ktorá má povrchové priamky rovnobežné s osou o_z a určujúcu krivku parabolu $y^2 = 6x$; d) dve roviny $x + y = 0$, $x - y = 0$; e) prázdna množina; f) dve roviny $x - y + 2 = 0$, $x + y = 0$. **1169.** a) $x^2/9 + y^2 + z^2 = 1$; b) $x^2/9 + y^2 + z^2/9 = 1$; c) $x^2 + y^2 - z^2 = 9$; d) $x^2 - y^2 - z^2 = 9$; e) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; f) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$. **1170.** a) Sploštený rotačný elipsoid s osou rotácie v osi o_z a stredom $S = (0, 0, 0)$; b) pretiahnutý rotačný elipsoid s osou rotácie v osi o_z a stredom $S = (0, 0, 0)$; c) trojosový elipsoid s polosami 5, 4, 3. **1171.** a) Elipsa $z = 0$, $x^2/25 + y^2/16 = 1$; b) elipsa $x = 0$, $y^2/16 + z^2/9 = 1$; c) elipsa $y = 0$, $x^2/25 + z^2/9 = 1$; d) prázdna množina; e) bod $A = (5, 0, 0)$; f) prázdna množina. **1172.** 6/10. **1174.** $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 + (z - z_0)^2/c^2 = 1$. **1175.** a) Rotačný paraboloid; b) rotačný paraboloid; c) hyperbolický paraboloid. **1176.** a) Hyperbola $x = 3$, $y^2/16 - z^2/9 = 16/25$; b) priamka $(x + 5)/0 = y/4 = z/3$ a priamka $(x + 5)/0 = y/4 = z/-3$; c) hyperbola $y = -5$, $z^2/9 - x^2/25 = 9/16$; d) dve priamky $(x - 100/9)/0 = (y - 4)/0 = z/1$ a $(x + 100/9)/0 = (y - 4)/0 = z/1$; e) elipsa $z = 3$, $x^2/50 + y^2/32 = 1$. **1177.** $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z + 2 &= 0 \\ 2x - 3y + 9z - 18 &= 0, \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 3z - 6 &= 0 \\ 2x - 3y + 3z + 6 &= 0. \end{aligned}\right\}$

1178. Jednodielny hyperboloid, ktorý má kánonickú rovnicu $X^2/8 + Y^2/16 - Z^2/16 = 1$. **1179.** Dvojdielny rotačný hyperboloid. **1181.** a) Parabola $x = -4$, $y^2 = -36(z - 1/3)$, leží v rovine $x = -4$, jej vrchol je $V = (-4, 0, 1/3)$, parameter $p = 18$ a os je rovnobežná s osou o_z; b) parabola $y = 1$, $x^2 = 48(z + 1/36)$, leží v rovine $y = 1$, jej vrchol je $V = (0, 1, -1/36)$, parameter $p = 24$ a os je rovnobežná s osou o_z; c) rôznobežky $x/2 = y/\sqrt{3} = z/0$, $x/2 = y/-\sqrt{3} = z/0$; d) parabola $x = y$, $z = -x^2/144$, leží v rovine $x - y = 0$, jej vrchol je $V = (0, 0, 0)$, parameter $p = 1/288$ a os je rovnobežná s osou o_z; e) hyperbola $z = 1$, $x^2/48 - y^2/36 = 1$, leží v rovine $z = 1$, jej stred je $S = (0, 0, 1)$, osi sú rovnobežné s osami o_x, o_y a dĺžka polosí je $a = 4\sqrt{3}$, $b = 6$; f) hyperbola $z = -1$, $-x^2/48 + y^2/36 = 1$, leží v rovine $z = -1$, jej stred je $S = (0, 0, -1)$, osi sú rovnobežné s osami o_x, o_y a dĺžka polosí je $a = 6$, $b = 4\sqrt{3}$. **1182.** a) Eliptický paraboloid; b) hyperbolický paraboloid. **1183.** $x = (y - 3)/-2 = (z - 9)/-12$. **1184.** $x/1 = (y - 5)/0 = z/5$ a $(x - 2)/0 = y/1 = z/2$. **1185.** a) $(x + 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 3/2$, $x^2 + 2xz - 2x - z + 1 = 0$, $z^2 + 2yz - 2y - 3z + 1 = 0$; b) $117x^2 + 108xy + 52y^2 - 144 = 0$, $72x^2 + 24xz + 13z^2 - 144 = 0$, $32y^2 + 16yz + 13z^2 - 144 = 0$. **1186.** a) Hyperbola; b) hyperbola; c) elipsa. **1187.** $6x + 5y + 4z - 10 = 0$ alebo $6x + 5y + 4z + 10 = 0$. **1188.** a) $10x + 9y + 15z - 135 = 0$; b) $25x + 18y + 105z - 675 = 0$. **1189.** a) $(6, 0, 0)$, $(3, 4, 2)$; b) $(18, 5, 6)$, $(9, 15, 25)$; c) $(4, 5, -3)$, $(8, 0, 8)$. **1190.** $(x - 2)/0 = (y - 1)/16 = (z + 1)/9$. **1191.** $x - y + 2z + 2 = 0$. **1192.** $2x - y - 4z = 0$, $(x - 6)/2 = (y + 4)/-1 = (z + 4)/-4$. **1193.** a) $y - 3z = 0$ alebo $2x - 3y + 3z + 18 = 0$; b) $2x - y + 3z + 6 = 0$.

4.21. Všeobecná rovnica kvadratickej plochy

1194. a) $a_{11} = a_{33} = 1$, $a_{22} = -2$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = -4$, $a_{23} = -2$, $a_{44} = 6$, $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$; b) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{44} = -16$, ostatné koeficienty sú nulové; c) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{23} = a_{14} = -1$, $a_{24} = -1/2$, $a_{44} = 1$, $a_{12} = a_{13} = a_{34} = 0$; d) $a_{11} = 7$, $a_{22} = 6$, $a_{33} = 5$, $a_{12} = a_{23} = -2$, $a_{14} = -4$, $a_{24} = -11$, $a_{34} = 8$, $a_{44} = 18$; e) $a_{11} = a_{22} = 2$, $a_{33} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{14} = -2$, $a_{24} = 3$, $a_{34} = -1$, $a_{44} = 3$. **1195.** a) prázdna množina; b) bod $(0; -1,2; -1,6)$; c) rotačná kužeľová plocha s vrcholom v O, osou v osi o_x, vrcholovým uhlom

$\varphi = 90°$; d) rotačná kužeľová plocha s vrcholom v O, osou v osi o_y a vrcholovým uhlom $\varphi = 90°$. **1196.** a) $S = (1, -2, 3)$; b) $S = (3, -1, 1)$; c) $S = (1, -1, -3)$; d) $S = (0, 1, -2/5)$. **1197.** $a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33}(z - z_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + 2a_{23}(y - y_0)(z - z_0) + 2a_{31}(z - z_0)(x - x_0) + a_{44} = 0$. **1198.** a) $4x^2 + y^2 + 5z^2 - 4xy + 4yz - 2xz - 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 6xy - 8yz + 10xz = 0$. **1199.** $x^2 - 14y^2 + 10z^2 - 4xy + 6xz - 24yz - 5 = 0$; **1200.** a) Nemá stred; b) rovina $3x + 2y - z + 2 = 0$; c) $(1/3, 14/3, 3)$; d) priamka $(x - 2)/1 = y/3 = = z/2$. **1201.** a) $V = (0, 1, -2)$; b) $V = (3/2, 1, 1/2)$; c) $V = (1, 1, -1)$; d) $V = (-499/784, -183/784, 509/392)$. **1202.** Je, $V = (1, 1, 2)$. **1203.** $a = -2$. **1204.** $a = (1 \pm \sqrt{5})/2$, os rotácie má rovnicu $(1 \pm \sqrt{5})\, x - 2y = 0$. **1205.** $a = \pm 1$, $b = \pm\sqrt{2}$. **1206.** a) Dvoch rovín: $x + 2y - 3z + 4 = 0$, $x - y + z - 1 = 0$; b) kužeľovej plochy s vrcholom v počiatku; c) rotačnej valcovej plochy s osou v o_y o polomere $\sqrt{5}$; d) eliptickej valcovej plochy. **1207.** $X^2 - Y^2 + 2Z = 0$, $x = x' - 1$, $y = y'$, $z = z' - 1$, $x' = X/3 - 2Y/3 - 2Z/3$, $y' = -2X/3 - 2Y/3 + Z/3$, $z' = -2X/3 + Y/3 - 2Z/3$. **1208.** a) Elipsoid: $9X^2/4 + Y^2/2 + Z^2 = 1$, $S = (-1, 1, 2)$, $\bar{i} = \{1/3, 2/3, -2/3\}$, $\bar{j} = \{2/3, 1/3, 2/3\}$, $\bar{k} = \{-2/3, 2/3, 1/3\}$; b) jednodielny hyperboloid: $2X^2 + 3Y^2 - 6Z^2 = 1$, $S = (2/3, -1/3, 2/3)$, $\bar{i} = \{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\}$, $\bar{j} = \{1/3, 1/3, -1/3\}$, $\bar{k} = \{1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}\}$; c) hyperbolický paraboloid $2X = Y^2/(4/7\sqrt{14}) - Z^2/2\sqrt{14}$, vrchol $V = (1011/392, -617/392, -113/196)$, osi sú určené vektormi $\{1, -1, 2\}$, $\{-3, 1, 2\}$, $\{2, 4, 1\}$. **1209.** a) Rotačná valcová plocha $X^2 + Y^2 = 1/6$, rovnice osi sú $x - 5y + 2z - 5 = 0$, $x - y - z + 1 = 0$; b) rotačná kužeľová plocha $X^2 + Y^2 - 2Z^2 = 0$, vrchol $V = (-1, 1, 1)$, os je určená vektorom $\{-2, 2, 1\}$ a vrcholom V; c) parabolický valec $Z = 2X^2$. **1210.** a) $x + 3y - z + 6 = 0$, $x + y + z - 1 = 0$; b) $2x - y - z - 3 = 0$, $2x - y - z + 3 = 0$; c) $3x - 5y + 11z - 1 = 0$. **1211.** a) $Y^2 + Z^2 = 0$, t. j. os o_x; b) $2X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, t. j. bod $(0, 0, 0)$. **1212.** a) Hyperbolická valcová plocha: $Y^2 - Z^2 + 1 = 0$; b) parabolická valcová plocha $X^2 = 2Y$; c) eliptická valcová plocha $Y^2 + Z^2/2 = 1$; d) hyperbolický paraboloid $X^2/(4/7\sqrt{14}) - Y^2/(2/\sqrt{14}) = 2Z$; e) eliptická valcová plocha $X^2 + Y^2/(2/3) = 1$; f) parabolická valcová plocha $Y = \sqrt{3}X^2$; g) elipsoid $3X^2 + 6Y^2 + Z^2 - 18 = 0$; h) eliptický paraboloid: $\sqrt{6}X = 2Z^2 + 3Y^2$; i) jednodielny rotačný hyperboloid: $X^2/4 + Y^2/4 - Z^2/2 = 1$; j) trojosový elipsoid $3X^2 + 2Y^2 + 6Z^2 = 3$; k) trojosový elipsoid $X^2/6 + Y^2/12 + Z^2/4 = 1$. **1213.** $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (2, -1, -4)$. **1214.** $2x + y + z + 5 = 0$, $y + (-3 \pm \sqrt{8})\, z - 5 \pm 2\sqrt{8} = 0$. **1215.** $-9x + 12y + 3\sqrt{13}z + 13 - 2\sqrt{13} = 0$. **1216.** $(-3/2 - \sqrt{2})\, x + \sqrt{2}y + (-7/2 - \sqrt{2})\, z - 2 - 2\sqrt{2} = 0$. **1217.** $y + 2z - 2 = 0$, $y + 2z = 0$. **1218.** $2x - 4y + 5z + 2 = 0$.

LITERATÚRA

1. Bachvalov S. V., Modenov P. S., Parchomenko A. S.: Sbornik zadač po analitičeskoj geometrii, Moskva, GITTL: 1957
2. Bydžovský B.: Úvod do analytické geometrie, Praha, JČMF: 1946
3. Bydžovský B.: Základy theorie determinantů a matic, Praha, JČMF: 1930
4. Djubjuk P. E. . . .: Sbornik zadač po kursu vyššej matematiki dľa vtuzov, Moskva: 1963
5. Dubnov Ja. S.: Osnovy vektornovo isčislenija, I. Moskva, GITTL: 1950
6. Fadejev D. K., Sominskij I. S.: Sbornik zadač po vyššej algebre. Moskva, GITTL: 1956
7. Gradštejn I. S.: O stavbě matematických pouček. Praha, NČSAV: 1953
8. Grzegorczyk A.: Populární logika. Praha, SNPL: 1957
9. Gjunter N. M., Kuzmin R. O.: Sbornik zadač po vyššej matematike, I. Moskva, GITTL: 1957
10. Kletenik O. V.: Sbornik zadač po analitičeskoj geometrii. Moskva, GITTL: 1954
11. Kluvánek I., Mišík L., Švec M.: Matematika I. Bratislava, SVTL: 1963
12. Kraemer E.: Analytická geometrie lineárních útvarů. Praha, NČSAV: 1954
13. Krečmar V. A.: Zadačnik po algebre. Moskva, GIFML: 1961
14. Krysicki W., Włodarski L.: Analiza matematyczna w zadaniach, część pierwsza. Warszawa, PWN: 1958
15. Modenov P. S.: Analitičeskaja geometrija. Moskva, IMU: 1955
16. Proskurjakov J. V.: Sbornik zadač po linejnoj algebre. Moskva, GITTL: 1957
17. Vančura Z.: Analytická metoda v geometrii, I, II. Praha, SNTL: 1957
18. Zich O.: Moderní logika. Praha, Orbis: 1958

Vydavateľstvo odporúča ďalšiu literatúru

Eliaš—Horváth—Kajan: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. a 3. časť

Kluvánek—Mišík—Švec: Matematika I. a II.

Bronštejn—Semenďajev: Príručka matematiky pre inžinierov a študujúcich na vysokých školách technických, 3. Vyd. Bratislava: SVTL 1964

Chemnitius: Riešené príklady derivácie a spätnej integrácie funkcií. Bratislava: SVTL 1966

Simon—Stahl: Príručky základných vedných odborov — Matematika. Bratislava: SVTL 1967

Fadejev—Sominskij: Zbierka úloh z vyššej algebry. Bratislava: SVTL 1968

Garaj: Základy vektorového počtu, 3. vyd. Bratislava: SVTL 1968

Pethes: 222 príkladov z deskriptívnej geometrie. Bratislava: SVTL 1967

Pál: Deskriptívna geometria videná priestorove, 2. vyd. Bratislava: 1964

Richard: Elementárna trigonometria pre technikov. Bratislava: SVTL 1966

Colerus: Od násobilky po integrál. Bratislava: SVTL 1965. Polytechnická knižnica
Lietzman: Kde je chyba? Bratislava: SVTL 1966
Plander: Analógové počítacie stroje. Bratislava: SVTL 1968
Westwater: Elektronické počítacie stroje. Bratislava: SVTL 1968. Polytechnická knižnica

Pripravujeme

Eliaš—Horváth—Kajan—Šulka: Zbierka úloh z vyššej matematiky — 4. časť. Bratislava: SVTL 1968
Kneschke: Použitie diferenciálnych rovníc v praxi. Alfa, Bratislava, 1969

EDÍCIA TEORETICKEJ LITERATÚRY

Kniha je určená pre študentov vysokých škôl technického aj univerzitného smeru, najmä študujúcim popri zamestnaní

Jozef Eliaš, CSc. – Ján Horváth, CSc. – Ing. Juraj Kajan

ZBIERKA ÚLOH Z VYŠŠEJ MATEMATIKY
1. časť

DT 517 (076)

Vydalo Nakladateľstvo ALFA, n. p., Hurbanovo nám. 6, Bratislava
v marci 1971 ako svoju 4395. publikáciu

Zodpovedná redaktorka Lucia Prikrylová
Technický redaktor Leodegar Horváth
Návrh väzby Leodegar Horváth

Vytlačili Východoslovenské tlačiarne, n. p., Švermova ul. 49, Košice
296 strán, 88 obrázkov, 6 tabuliek – 28,76 AH, 29,49 VH
Tretie vydanie. Náklad 10 000

302 03 2

63-001-71 Kčs 30,50

508/21,8.7/5