4. Určitý integrál

Súvis medzi určitým a neurčitým integrálom - Newtonov-Leibnizov vzorec
Nech funkcia f je ohraničená na intervale $\langle a,b\rangle$ a F je jej primitívna funkcia. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Vlastnosti určitého integrálu:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c\, f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, \quad \text{pre} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \text{pre} \quad a < c < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Metódy počítania určitého integrálu

Metóda per partes pre určité integrály

Nech funkcie f a g majú spojité derivácie na intervale $\langle a,b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)dx = \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)dx$$

Substitučná metóda pre určité integrály

Nech funkcia f je spojitá na $\langle a,b\rangle$, $x = \varphi(t)$ je spojitá a má spojitú deriváciu na $\langle \alpha,\beta\rangle$, nech $\varphi(t) \in \langle a,b\rangle$ pre všetky $t \in \langle \alpha,\beta\rangle$ a nech $\varphi^{-1}(a) = \alpha$, $\varphi^{-1}(b) = \beta$. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{ll} x = \varphi(t) & \begin{array}{cc} x & t \\ b & \varphi^{-1}(b) \end{array} \\ dx = \varphi'(t)\, dt & \begin{array}{cc} a & \varphi^{-1}(a) \end{array} \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Pri počítaní určitých integrálov môžeme postupovať v zásade dvomi spôsobmi:

- Oddelíme fázu výpočtu primitívnej funkcie od fázy výpočtu určitého integrálu.
- Neoddelíme fázu výpočtu primitívnej funkcie od fázy výpočtu určitého integrálu.

Cvičenia

Vypočítajte určité integrály.

1. $\int\limits_{-1}^{1} (x+1)^2\, dx,$

2. $\int\limits_{0}^{1} (x^2 - 2x + 3)\, dx,$

3. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\, dx,$

4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2},$

5. $\int\limits_{-7}^{5} |x+1|\, dx,$

7. $\int\limits_{1}^{9} \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx,$

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x + \cos x\, dx.$

9. Funkcia f je definovaná

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \langle 0, 1) \\ \sqrt{x}, & x \in \langle 1, 2\rangle. \end{cases}$$

Vypočítajte $\int\limits_{0}^{2} f(x)\, dx.$

10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2x+1)^3},$

11. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx,$

12. $\int\limits_{9}^{4} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx,$

13. $\int\limits_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\, dx,$

14. $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos(2x - \frac{\pi}{2})\, dx,$

15. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$

16. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^4}},$

17. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}},$

18. $\int\limits_{1}^{3} \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx,$

19. $\int\limits_{0}^{2} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx,$

20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x}{1+x^2}\, dx,$

21. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\ln 2}} xe^{x^2}\, dx,$

22. $\int\limits_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})},$

23. $\int\limits_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx,$

24. $\int\limits_{1}^{4} \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx,$

25. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x^5 + 2x}(5x^4 + 2)\, dx,$

26. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x \cos^2 2x\, dx,$

27. $\int\limits_{0}^{1} e^{\sqrt{x}}\, dx,$

28. $\int\limits_{0}^{2\pi} |\sin x|\, dx,$

29. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^2 x\, dx,$

30. $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega x)\, dx,$

31. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}},$

32. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x}\, dx,$

33. $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin 3x \cos 2x\, dx,$

34. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos 3x \cos 4x\, dx,$

35. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x\, dx,$

36. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2},$

37. $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{x^2+1}\, dx,$

38. $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x-x^2},$

39. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\, dx}{x^2-3x+2},$

40. $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^2}{x^2+2x+1}\, dx,$

41. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{5x^2}{x^2+1}\, dx,$

42. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\, dx,$

43. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+2}\, dx,$

44. $\int\limits_{0}^{1} \frac{12\, dx}{\sqrt{4-x^2}},$

45. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^2+1}},$

46. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{5}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$

47. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\, dx}{x^2+4x+3},$

48. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 2x}\, dx,$

49. $\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\, dx,$

Výsledky

1. $\frac{8}{3}$, **2.** $\frac{7}{3}$, **3.** 2, **4.** $\frac{\pi}{4}$,
5. 36, **7.** $\frac{64}{3}$, **8.** 0.
9. $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-1)$.

10. $\frac{2}{9}$, **11.** $\sqrt{2}-1$, **12.** 3,
13. $-\frac{1}{3}$, **14.** $-\frac{\pi}{2}$, **15.** $\frac{\pi}{12}$,
16. $\frac{\pi}{12}$, **17.** $\frac{\pi}{6}$, **18.** $\sin(\ln 3)$,
19. $\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)$, **20.** $\frac{3}{2}\ln 2$, **21.** $\frac{1}{2}$,
22. $2\ln 2$, **23.** $2-\sqrt{3}$, **24.** $\frac{2}{\ln 2}$,
25. $2\sqrt{3}$, **26.** 0, **27.** 2,
28. 4, **29.** $\frac{\pi}{2}$, **30.** 0,
31. $\frac{\pi}{2}$, **32.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, **33.** $-\frac{6}{5}$,
34. 0, **35.** π, **36.** $\ln\sqrt{3}$,
37. $4-\ln 3$, **38.** $2\ln 3$, **39.** $3\ln 2-2\ln 3$,
40. $\frac{9}{2}-6\ln 2$, **41.** $5\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$, **42.** $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$,
43. $2\ln 3-3\ln 2$, **44.** 2π, **45.** $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$,
46. $-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{3}$, **47.** $\ln\frac{5\sqrt{5}}{9}$, **48.** 2,
49. 4, **50.** $2\ln(\sqrt{2}+1)$, **51.** $\ln 2$,
52. $2-\frac{\pi}{2}$, **53.** $2\ln 2-\frac{3}{4}$, **54.** $2\ln 2-1$,
55. $\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$, **56.** $\frac{1}{2}$, **57.** $\frac{168}{15}$,
58. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3})$, **59.** $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$, **60.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$,
61. $\frac{\pi}{2}-1$, **62.** -4π, **63.** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$,
64. $\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}$, **65.** $\frac{e^2+3}{8}$.

Použitie určitého integrálu v geometrii

Na intervale $\langle a,b \rangle$ je definovaná nezáporná funkcia f. Počítajme obsah S rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie f, osou x a priamkami $x=a$, $x=b$.
Môžeme postupovať nasledovne:

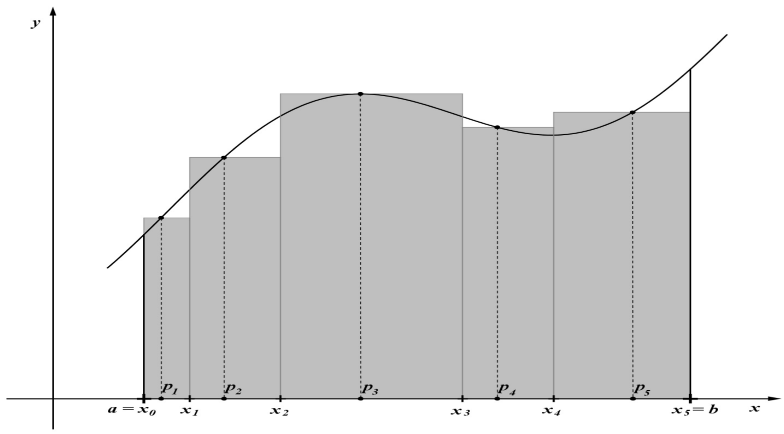
1. Rozdelíme bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ interval $\langle a,b \rangle$ na n podintervalov.

2. V každom podintervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ zvolíme ľubovoľný bod p_i.

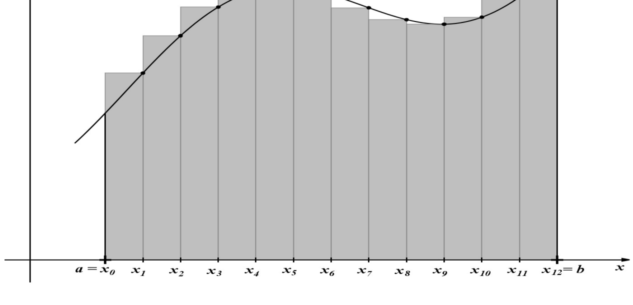
3. V každom podintervale nahradíme príslušnú časť plochy obdĺžnikom so základňou dĺžky $x_i - x_{i-1}$ a výškou $f(p_i)$.

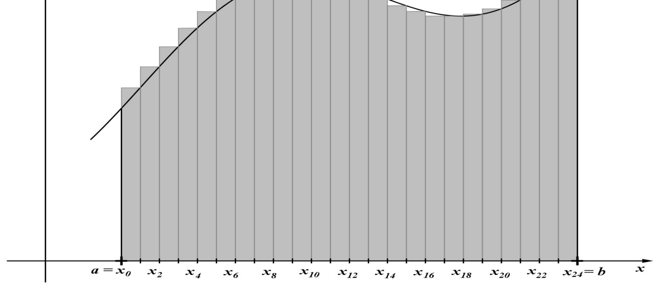
4. Sčítame obsahy všetkých takýchto obdĺžnikov

$$S_n = f(p_1)(x_1 - x_0) + f(p_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(p_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}).$$



Dostávame približnú hodnotu hľadaného obsahu. Ak zhustíme deliace body, hodnota S_n sa viac priblíži skutočnej hodnote. Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka najdlhšieho podintervalu sa bude blížiť k nule. Dostávame vždy presnejší " odhad "pre obsah S.

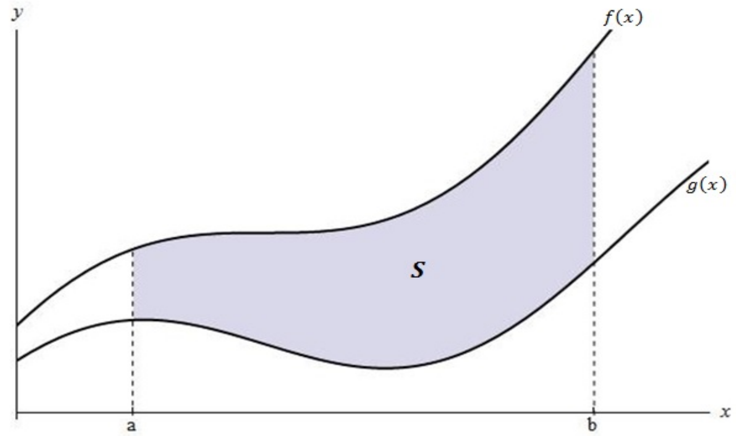




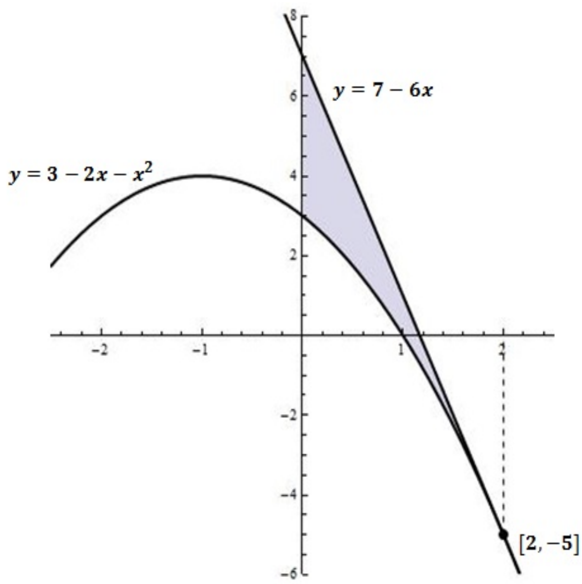
Obsah rovinnej oblasti

Obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f(x) \geq g(x)$ (a priamkami $x = a, x = b$) na intervale $\langle a, b\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx\,.$$



<u>Príklad:</u> Nájdeme obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y. Príklad je znázornený na nasledujúcom obrázku.



<u>Riešenie:</u> Spomínaná dotyčnica má rovnicu $y = 7 - 6x$. V intevale integrácie $\langle 0, 2\rangle$ platí $7 - 6x \geq 3 - 2x - x^2$, preto

$$S = \int_0^2 \big(7 - 6x - (3 - 2x - x^2)\big)dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx = \frac{8}{3}$$

Cvičenia

Vypočítajte obsahy rovinných oblastí ohraničených uvedenými funkciami.
148. Parabolou $y = 4x - x^2$ a osou o_x. **149.** Parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $x + y = 3$. **150.** Parabolou $y = x^2 - 2$ a priamkou $y = 2$. **151.** Osou o_x a krivkou $y = x^2 - x^3$. **152.** Krivkami $y = x^2$ a $y = x^3$. **153.** Krivkou $y = cos\, x$ a priamkou $y = -\pi$ pre $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$. **154.** Krivkou $y = sin(\frac{\pi}{2}x)$ a priamkou $y = x$. **155.** Krivkami $y = sin\, x$ a $y = cos\, x$ pre $x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle$. **156.** Krivkami $y = 2^x$ a $y = 2x - x^2$,priamkou $x = 2$ a osou o_y. **157.** Parabolami $y = 4x^2, y = \frac{x^2}{9}$ a priamkou $y = 2$. **158.** Krivkami $y = ln\, x$ a $y = ln^2 x$. **159.** Parabolou $y = x^2 - 2x + 2$,jej dotyčnicou v bode $T = [3, 5]$ a osou o_y. **160.** Krivkou $y = e^{-x} sin\, x$ a osou o_x v intervale $\langle 0, \pi \rangle$.

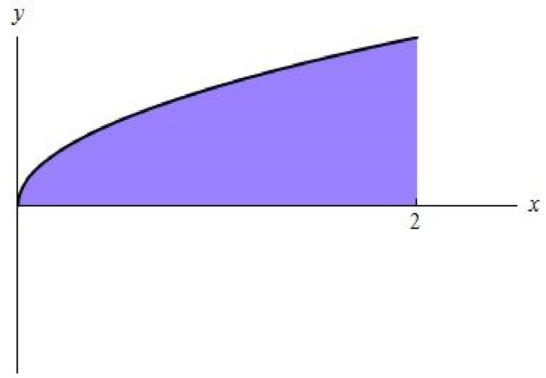
Výsledky

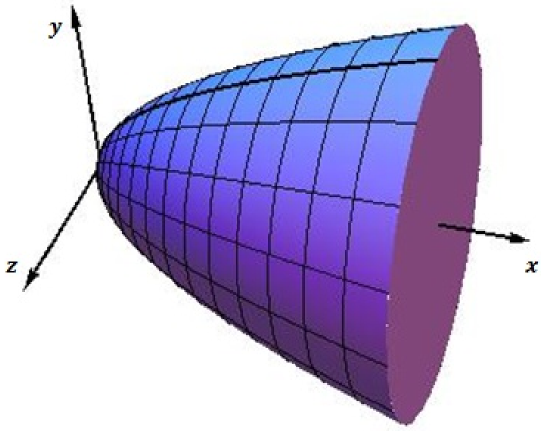
148. $\frac{32}{3}$, **149.** $\frac{9}{2}$, **150.** $\frac{32}{3}$, **151.** $\frac{1}{12}$, **152.** $\frac{1}{12}$, **153.** $2\pi^2$, **154.** $\frac{4}{\pi} - 1$, **155.** $2\sqrt{2}$, **156.** $\frac{3}{ln\, 2} - \frac{4}{3}$, **157.** $\frac{20\sqrt{2}}{3}$, **158.** $3 - e$, **159.** 9, **160.** $\frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

Objem telies

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) \geq 0$ (a priamkami $x = a, x = b$) a osou o_x na intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

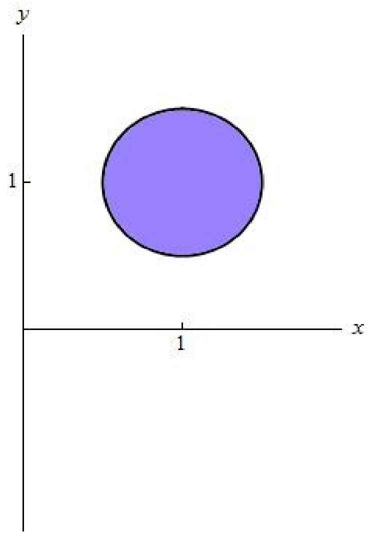
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

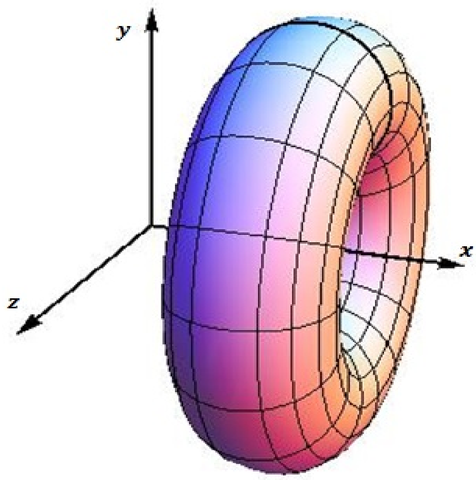




Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f(x) \geq g(x) \geq 0$ (a priamkami $x = a, x = b$) na intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$





Cvičenia

Vypočítajte objemy telies určených rotáciou rovinných oblastí ohraničených danými funkciami okolo osi o_x

176. Parabolou $y=x^2$ a priamkou $y=4$. **177.** Parabolou $y=3x-x^2$ a priamkou $y=x$. **178.** Parabolou $y=x^2+1$ a priamkou $y=x+3$. **179.** Krivkami $y=\sqrt{x}$ a $y=\frac{x^2}{8}$. **180.** Krivkou $y=sin\,x$ a osou o_x v intervale $\langle 0,\pi\rangle$. **181.** Krivkami $y=sin\,x, y=cos\,x$ a osou o_y v intervale $\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle$. **182.** Krivkou $y=e^x\sqrt{x}$ a priamkami $x=1, y=0$. **183.** Krivkou $y=sin\,x$ a priamkou $y=\frac{2}{\pi}x$.

Výsledky

176. $\frac{256\pi}{5}$, **177.** $\frac{56\pi}{15}$, **178.** $\frac{117\pi}{5}$, **179.** $\frac{24\pi}{5}$, **180.** $\frac{\pi^2}{2}$, **181.** $\frac{\pi}{2}$, **182.** $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$, **183.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Dĺžka krivky

Dĺžku rovinnej krivky, ktorá je grafom funkcie $f(x)$, ktorá má spojitú deriváciu na intervale $\langle a,b\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Cvičenia

Vypočítajte dĺžky daných kriviek.

196. $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}, x\in\langle 0,3\rangle$, **197.** $y=\frac{x^2}{4}, x\in\langle 0,2\sqrt{2}\rangle$, **198.** $y=ln(sin\,x), x\in\langle\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\rangle$, **199.** $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}, x\in\langle 0,1\rangle$, **200.** $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}ln\,x, x\in\langle 1,2\rangle$, **201.** $y=ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right), x\in\langle a,b\rangle$, **202.** $y=ln\,x, x\in\langle\sqrt{3},\sqrt{8}\rangle$, **203.** $y=arcsin\,x+\sqrt{1-x^2}, x\in\langle 0,1\rangle$, **204.** $y=2\sqrt{x}, x\in\langle 1,2\rangle$,

Výsledky

196. 12, **197.** $ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{6}$, **198.** $\frac{1}{2}ln\,3$, **199.** $\frac{2}{3}(\sqrt[4]{8}-1)$, **200.** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}ln\,2$, **201.** $ln\left(\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}\right)$, **202.** $1+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}$, **203.** $4-2\sqrt{2}$, **204.** $\sqrt{6}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}ln\frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}$.

Obsah povrchu rotačnej plochy

Obsah povrchu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a,b\rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$P=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Cvičenia

Vypočítajte obsahy povrchov rotačných plôch, ktoré vzniknú rotáciou danej funkcie okolo osi o_x.

214. $y=kx, x\in\langle a,b\rangle, 0<a<b, k>0$, **215.** $y=x^3, x\in\langle 0,1\rangle$, **216.** $y=\sqrt{x}, x\in\langle 0,2\rangle$, **217.** $y=e^{-x}, x\in\langle 0,\infty\rangle$, **218.** $y=\frac{x^2}{2}, x\in\langle 0,\frac{3}{4}\rangle$,

Výsledky

214. $\pi k\sqrt{k^2+1}(b^2-a^2)$, **215.** $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$, **216.** $\frac{13\pi}{3}$, **217.** $\pi(\sqrt{2}+ln(1+\sqrt{2}))$, **215.** $\pi\left(\frac{255}{1024}-\frac{ln\,2}{8}\right)$.