3. Neurčitý integrál

Definícia 3.1:

- **Funkcia F je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale** (a,b): ak $\forall x \in (a,b)$ platí: $F'(x) = f(x)$

Vlastnosti primitívnych funkcií:

- **VPF1:** Ak F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale (a,b), tak $F+c$ je tiež primitívnou funkciou k funkcii f na intervale (a,b), pričom $c \in \mathbb{R}$.
- **VPF2:** Ak F a G sú primitívne funkcie k funkcii f na intervale (a,b), tak existuje reálne číslo c tak, že $F(x) = G(x) + c$ pre všetky $x \in (a,b)$.
- **VPF3:** Každá spojitá funkcia na intervale (a,b) má v tomto intervale primitívnu funkci (nie vždy však vieme túto primitívnu funkciu vyjadriť analytickým výrazom).

Definícia 3.2:

- **Neurčitý integrál funkcie f na intervale** (a,b) - (ozn. $\int f(x)\,dx$): množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale na intervale (a,b)

Vlastnosti neurčitého integrálu:

- **VNI1:** Ak k funkcii f existuje primitívna funkcia na intervale (a,b), tak pre všetky $x \in (a,b)$ platí: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- **VNI2:** Ak f' existuje na intervale (a,b), tak $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- **VNI3:** Ak majú funkcie f aj g v intervale (a,b) primitívne funkcie, tak v tomto intervale platí
$$\int \Big(f(x) \pm g(x)\Big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \qquad \int \Big(kf(x)\Big)dx = k\int f(x)dx$$
kde k je ľubovolné reálne číslo.

Základné neurčité integrály

Vzorec	podmienky
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$x \neq 0,\ a \in \mathbb{R}, a \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int a^x dx = a^x \frac{1}{\ln a} + c$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0, a \neq 1$

Vzorec	**podmienky**
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$	$x \neq \{-1, 1\}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + c$	$x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Cvičenia

Vypočítajte integrály:

1. $\int (3x^2 + 2x - 1)\,dx$.

2. $\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}\right)\,dx$.

3. $\int x^2(x^2+1)\,dx$.

4. $\int (x^3+1)^2\,dx$.

5. $\int \frac{x^3+3x-1}{x}\,dx$.

6. $\int \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}\,dx$.

7. $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$.

8. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x}\,dx$.

9. $\int (\cos x + 2\sqrt[5]{x^3})\,dx$.

10. $\int \left(\sin x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\right)\,dx$.

11. $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)\,dx$.

12. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+2}{x^2+1}\right)\,dx$.

13. $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)}\,dx$.

14. $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$.

15. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$.

16. $\int \frac{dx}{x^2+7}$.

17. $\int 4^{2-3x}\,dx$.

18. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$.

Výsledky

1. $x^3 + x^2 - x + c.$

2. $-\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} + c.$

3. $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + c.$

4. $\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x + c.$

5. $\frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + c.$

6. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + c.$

7. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c.$

8. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8\ln|x| + c.$

9. $\sin x + \frac{5}{4}x\sqrt[5]{x^3} + c.$

10. $-\cos x + \frac{3}{2}\arcsin x + c.$

11. $\frac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x} + c.$

12. $x + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{10^x \ln 10} + c.$

13. $\frac{1}{3}(x - \operatorname{arctg} x) + c.$

14. $-x - \operatorname{cotg} x + c.$

15. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + c.$

16. $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} + c.$

17. $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x} + c.$

18. $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$

Metódy počítania neurčitého integrálu

Substitučná metóda

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I, nech funkcia φ má deriváciu v intervale (a,b) a nech pre každé $x \in (a,b)$ je $\varphi(x) \in I$. Potom

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx = F\big(\varphi(x)\big) + c$$

Postup pri používaní substitučnej metódy:

1. V integrovanej funkcii hľadáme takú funkciu φ, ktorá sa tam vyskytuje spolu so svojou deriváciou, alebo jej číselným násobkom.
2. Zavedieme novú premennú t, pre ktorú je $t = \varphi(x)$.
3. Upravíme daný interál na tvar $\int f(t)dt$ kde $dt = \varphi'(x)dx$ a počítame $\int f(t)dt = F(t) + c$.
4. Vo výsledku nahradíme $t = \varphi(x)$: $F\big(\varphi(x)\big) + c$

Niekedy,ak je funkcia φ monotónna, tretí bod tohoto postupu je výhodné realizovať tak, že si vyjadríme inverznú funkciu $x = \varphi^{-1}(t)$ a(alebo) $dx = (\varphi^{-1})'(t)dt$ a dosadíme do pôvodného integrálu.

Príklad: Ukážeme platnosť vzťahu $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$.

Riešenie:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,a\,dx = \left|\begin{array}{c} t = ax+b \\ dt = a\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t) + c = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Ak F je primitívnou funkciou k funkcii f, tak v príslušných intervaloch platí

$$\int x f(x^2) dx = \frac{1}{2} F(x^2) + c, \qquad \int \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(\ln x) + c,$$

$$\int \frac{f(\mathrm{arctg} x)}{1+x^2} dx = F(\mathrm{arctg} x) + c, \qquad \int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2F(\sqrt{x}) + c,$$

$$\int f(\sin x) \cos x \, dx = F(\sin x) + c, \qquad \int \frac{f(\mathrm{tg} x)}{\cos^2 x} dx = F(\mathrm{tg} x) + c.$$

Cvičenia

Použitím algebraickej úpravy (ak je potrebná) a substitúcie lineárnej funkcie vypočítajte integrály:

19. $\int \sin 3x \, dx.$ **20.** $\int \frac{dx}{5-3x}.$

21. $\int e^{3-2x} \, dx.$ **22.** $\int \sqrt[3]{3x-2} \, dx.$

23. $\int (4-7x)^{11} \, dx.$ **24.** $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$ **26.** $\int \frac{dx}{x^2+16}.$

Použitím naznačenej substitúcie vypočítajte integrály:

27. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-4}}, \qquad t = x^2 - 4.$

28. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} \, dx, \qquad t = \sin x.$

29. $\int \sqrt{\cos^3 x} \sin x \, dx, \qquad t = \cos x.$

30. $\int x e^{x^2} \, dx, \qquad t = x^2.$

31. $\int \frac{dx}{x \ln x}, \qquad t = \ln x.$

32. $\int x^2 \sqrt{x^3+1} \, dx, \qquad t = x^3 + 1.$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}, \qquad t = \frac{\sqrt{x}}{2}.$

34. $\int \frac{x \, dx}{1+x^4}, \qquad t = x^2.$

35. $\int \frac{dx}{e^x-1}, \qquad t = e^{-x}.$

36. $\int \frac{e^x \sqrt{\mathrm{arctg}\, e^x}}{1+e^{2x}} \, dx, \qquad t = \mathrm{arctg}\, e^x.$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad t = \frac{1}{x}.$

38. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}}, \qquad t = \sqrt{x+1}.$

Použitím substitučnej metódy vypočítajte integrály:

39. $\int \sqrt{4x-11}\,dx.$

40. $\int \frac{6\,dx}{5-3x}.$

41. $\int \frac{4x}{4+x^2}\,dx.$

42. $\int \frac{14\,dx}{(2x+3)^8}.$

43. $\int 10x(x^2+7)^4\,dx.$

44. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^2}}.$

45. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx.$

46. $\int x\sqrt[5]{4-x^2}\,dx.$

47. $\int \sin^6 x\cos x\,dx.$

48. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,dx.$

49. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

50. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2}}.$

51. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

52. $\int (x+2)e^{x^2+4x-5}\,dx.$

53. $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx.$

54. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx.$

55. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x\,dx.$

56. $\int \frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

57. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,dx.$

58. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{cotg} x-1}}.$

59. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx.$

60. $\int \frac{e^{2x}}{4+e^x}\,dx.$

61. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}.$

62. $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

Výsledky

19. $-\frac{1}{3}\cos 3x + c.$

20. $-\frac{1}{3}\ln|3x-5| + c.$

21. $-\frac{1}{2}e^{3-2x} + c.$

22. $\frac{1}{4}(3x-2)\sqrt[3]{3x-2} + c.$

23. $-\frac{(4-7x)^{12}}{84} + c.$

24. $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + c.$

25. $\arcsin\frac{x}{3} + c.$

26. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + c.$

27. $\sqrt{x^2-4} + c.$

28. $\ln|1+\sin x| + c.$

29. $-\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + c.$

30. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c.$

31. $\ln|\ln x| + c.$

32. $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3} + c.$

33. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2} + c.$

34. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + c.$

35. $\ln|e^{-x}-1| + c.$

36. $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + c.$

37. $\arccos\frac{1}{x} + c.$

38. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}.$

Vo výsledkoch nasledujúcich cvičení je ešte pred výsledkom uvedená substitúcia, ktorou je možné integrál riešiť:

39. $t = 4x - 11,\ I = \frac{1}{6}\sqrt{(4x-11)^3} + c.$

40. $t = 5 - 3x,\ I = -2\ln|5-3x| + c.$

41. $t = 4 + x^2,\ I = 2\ln|4+x^2| + c.$

42. $t = 2x + 3,\ I = \frac{1}{(2x+3)^7} + c.$

43. $t = x^2 + 7,\ I = (x^2+7)^5 + c.$

44. $t = 3 - x^2,\ I = -\sqrt{3-x^2} + c.$

45. $t = 1 + x^6,\ I = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + c.$

46. $t = 4 - x^2,\ I = -\frac{5}{12}\sqrt[5]{(4-x^2)^6} + c.$

47. $t = \sin x,\ I = \frac{1}{7}\sin^7 x + c.$

48. $t = 2 + \cos x,\ I = -2\sqrt{2+\cos x} + c.$

49. $t = x + 1,\ I = \operatorname{arctg}(x+1) + c.$

50. $t = 2x - 1,\ I = \frac{1}{2}\arcsin(2x-1) + c.$

51. $t = \frac{1}{x},\ I = -e^{\frac{1}{x}} + c.$

52. $t = e^{x^2+4x-5},\ I = \frac{1}{2}e^{x^2+4x-5} + c.$

53. $t = \ln x,\ I = \frac{1}{5}\ln^5 x + c.$

54. $t = \sin(\ln x),\ I = \sin(\ln x) + c.$

55. $t = e^{\cos^2 x},\ I = -e^{\cos^2 x} + c.$

56. $t = \sin\sqrt{x},\ I = 2\ln|\sin\sqrt{x}| + c.$

57. $t = \operatorname{tg} x,\ I = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x} + c.$

58. $t = \operatorname{cotg} x,\ I = -2\sqrt{\operatorname{cotg} x - 1} + c.$

59. $t = 2^x,\ I = \frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + c.$

60. $t = 4 + e^x,\ I = e^x - 4\ln|4+e^x| + c.$

61. $t = \operatorname{arctg} x,\ I = \ln(\operatorname{arctg} x) + c.$

62. $t = \ln x,\ I = 3\arcsin(\ln x) + c.$

Metóda per partes (integrovanie po častiach)

Nech funkcie u a v majú derivácie na intervale (a,b). Potom platí:

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)dx.$$

Ako voliť funkciu u' a v v metóde per partes?

1. Nemal by byť problém vypočítať funkcie $u(x) = \int u'(x)dx$ a $v'(x)$.
2. Integrál $\int u(x)v'(x)dx$ by mal byť ľahší ako pôvodný integrál.

Metódu integrovania per partes používame o.i. pri integráloch typu $\int P(x)\,f(x)\,dx$, kde $P(x)$ je polynóm (!!!môže byť aj $P(x) = 1$) a f je trigonometrická, exponenciálna, logaritmická alebo cyklometrická funkcia. Pritom volíme:

1. $u' = f$ a $v = P$, ak f je trigonometrická alebo exponenciálna funkcia a postup opakujeme n-krát, kde n je stupeň polynómu P,

2. $u' = P$ a $v = f$, ak f je cyklometrická alebo logaritmická funkcia.

Cvičenia

Použite naznačené metódy per partes na výpočet integrálov:

63. $\int \ln x \, dx, \quad u' = 1, \quad v = \ln x.$

64. $\int \frac{\ln x \, dx}{x^2}, \quad u' = \frac{1}{x^2}, \quad v = \ln x.$

65. $\int x \cos x \, dx, \quad u' = \cos x, \quad v = x.$

66. $\int x e^{-2x} \, dx, \quad u' = e^{-2x}, \quad v = x.$

67. $\int \operatorname{arccotg} x \, dx, \quad u' = 1, \quad v = \operatorname{arccotg} x.$

68. $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx, \quad u' = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad v = x.$

69. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx, \quad u' = \frac{\cos x}{\sin^3 x}, \quad v = x.$

71. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx, \quad u' = 1, \quad v = \sqrt{1 - x^2}.$

72. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx, \quad u' = \operatorname{tg}^2 x, \quad v = x.$

Použitím metódy per partes vypočítajte integrály:

73. $\int x \ln x \, dx.$

74. $\int x \sin 3x \, dx.$

75. $\int 5x e^{-4x} \, dx.$

76. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$

77. $\int \arccos x \, dx.$

79. $\int (2x + 1) \cos(\frac{\pi}{3} - 5x) \, dx.$

80. $\int \frac{x \, dx}{5^x}.$

81. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx.$

82. $\int 4x^3 \ln(x^5) \, dx.$

Opakovaným použitím metódy per partes vypočítajte integrály:

83. $\int x^2 \sin x \, dx.$

84. $\int e^x \cos 2x \, dx.$

85. $\int (x^2 + 5) \cos x \, dx.$

87. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx.$

88. $\int x \ln^2 x \, dx.$

89. $\int \ln^2 x \, dx.$

90. $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} \, dx.$

91. $\int \sin(\ln x) \, dx.$

92. $\int x^2 e^{3x} \, dx.$

93. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx.$

94. $\int x^3 \cos x \, dx.$

Výsledky

63. $x\ln x - x + c.$

64. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$

65. $x\sin x + \cos x + c.$

66. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$

67. $x\,\mathrm{arccotg}\, x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$

68. $-x\,\mathrm{cotg}\, x + \ln|\sin x| + c.$

69. $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\, x + c.$

71. $\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$

72. $x\,\mathrm{tg}\, x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + c.$

Vo výsledkoch nasledujúcich cvičení je ešte pred výsledkom uvedená voľba funkcie u' v metóde per partes, ktorou je možné integrál riešiť. Funkciu v si čitateľ doplní:

73. $u' = x,\ I = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$

74. $u' = \sin 3x,\ I = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c.$

75. $u' = e^{-4x},\ I = -\frac{5}{4}xe^{-4x} - \frac{5}{16}e^{-4x} + c.$

76. $u' = x,\ I = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + c.$

77. $u' = 1,\ I = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$

79. $u' = \cos(\frac{\pi}{3} - 5x),\ I = -\frac{2x+1}{5}\sin(\frac{\pi}{3} - 5x) + \frac{2}{25}\cos(\frac{\pi}{3} - 5x) + c.$

80. $u' = 5^{-x},\ I = -\frac{x5^{-x}}{\ln 5} - \frac{5^{-x}}{\ln^2 5} + c.$

81. $u' = \frac{1}{\sqrt{x}},\ I = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c.$

82. $u' = 4x^3,\ I = 5x^4\ln x - \frac{5}{4}x^4 + c.$

83. $u' = \sin x,\ I = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c.$

84. u' je jedno, $I = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + c.$

85. $u' = \cos x,\ I = (x^2+3)\sin x + 2x\cos x + c.$

87. $u' = e^{-x},\ I = -e^{-x}(x^2+5) + c.$

88. $u' = x,\ I = \frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x) + \frac{1}{4}x^2 + c.$

89. $u' = 1,\ I = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c.$

90. u' je jedno, $I = -\frac{8}{17}e^{-2x}(\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}) + c.$

91. $u' = 1,\ I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c.$

92. $u' = e^{3x},\ I = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + c.$

93. $u' = \cos 2x,\ I = \frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x + \frac{2x+5}{4}\cos 2x + c.$

94. $u' = \cos x,\ I = (x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + c.$

Integrovanie racionálnych funkcií

Definícia 3.3:

- **Racionálna funkcia** f: $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x), Q_m(x)$ sú polynómy stupňa $m, n \in \mathbb{N}$,
- **Rýdzoracionálna funkcia** f: ak pre racionálnu funkciu platí, že $n < m$,
- **Elementárne (parciálne) zlomky**: zlomky v tvare

$$\textbf{I.})\ \frac{a}{x-r}, \qquad \textbf{II.})\ \frac{a}{(x-r)^n}, \qquad \textbf{III.})\ \frac{ax+b}{x^2+px+q}, \qquad \textbf{IV.})\ \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$$

Vlastnosti racionálnych funkcií:

- **VRF1:** Ak pre racionálnu funkciu f platí, že $n \geq m$, tak ju úpravou (delením $P_n(x) : Q_m(x)$) prevedieme na tvar $f(x) = R_k(x) + \dfrac{S_l(x)}{Q_m(x)}$, pričom funkcia $\dfrac{S_l(x)}{Q_m(x)}$ už je rýdzoracionálnou funkciou.

- **VRF2:** Každú rýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. To, že aké elementárne zlomky sa objavia v rozklade, závisí od menovateľa $Q_m(x)$. Platí totiž:

  – Polynóm $Q_m(x)$ možno zapísať jediným spôsobom v tvare
  $$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$
  kde $a_1,\dots,a_k$ sú navzájom rôzne reálne korene polynómu $Q_m(x)$, polynómy $x^2+p_1x+q_1,\dots,x^2+p_sx+q_s$ nemajú reálne korene a sú navzájom rôzne, $n_1,\dots,n_k,m_1,\dots,m_s \in \mathbb{N}$

  – Sčítance vystupujúce v súčte elementárnych zlomkov možno rozdeliť na skupiny patriace k jednotlivým členom rozkladu polynómu $Q_m(x)$, tj. na skupinu elementárnych zlomkov patriacu k členu $(x-a_1)^{n_1}$, ..., , skupinu elementárnych zlomkov patriacu k členu $(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$, pričom:

    * skupina patriaca k členu tvaru $(x-\alpha)^i$ pozostáva z parciálnych zlomkov
    $$\frac{A_1}{(x-\alpha)}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$$

    * skupina patriaca k členu tvaru $(x^2+\beta x+\gamma)^j$ pozostáva z parciálnych zlomkov
    $$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}, \dots, \frac{B_jx+C_j}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}$$

- $$\frac{2x^2+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

- $$\frac{2x-3}{x(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{C_1}{x+3} + \frac{C_2}{(x+3)^2} + \frac{C_3}{(x+3)^3}$$

- $$\frac{x^3-8}{x^2(x^2+2)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

Integrovanie elementárnych zlomkov :

I.)

$$\int \frac{a}{x-r}dx = \left| \begin{array}{c} t = x-r \\ dt = dx \end{array} \right| = a\int \frac{dt}{t} = a\ln|t| + c = a\ln|x-r| + c\,.$$

II.) Pre $n > 1$:

$$\int \frac{a}{(x-r)^n}dx = \left| \begin{array}{c} t = x-r \\ dt = dx \end{array} \right| = a\int t^{-n}dt = a\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + c\,.$$

III.)

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}$$

1.

$$\frac{a}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{c} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)dx \end{array} \right| = \frac{a}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + c$$

2.

$$\int \frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}dx = \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+K^2} = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{K}\right)^2+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \frac{x+\frac{p}{2}}{K} \\ dt = \frac{1}{K}dx \end{array} \right| = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{K} + c\,,$$

kde $K^2 = \dfrac{4q-p^2}{4}$

IV.) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou.

Cvičenia

Vypočítajte integrály rýdzoracionálnych funkcií:

95. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

96. $\int \frac{dx}{x^2-1}$.

97. $\int \frac{dx}{x^3+x}$.

98. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

99. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

100. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

101. $\int \frac{2\,dx}{x^2+2x+5}$.

102. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.

103. $\int \frac{dx}{x^3+1}\,dx$.

104. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$.

Vypočítajte integrály racionálnych funkcií:

105. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx.$

106. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx.$

107. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}.$

108. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx.$

109. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx.$

110. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx.$

Výsledky

95. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + c.$

96. $\ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + c.$

97. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$

98. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+2)^4}\right| + c.$

99. $\frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c.$

100. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + c.$

101. $\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c.$

102. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + c.$

103. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$

104. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$

105. $x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + c.$

106. $5x + \ln\left|\frac{\sqrt{x}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right| + c.$

107. $x + 3\ln(x^2-6x+10) + 8\operatorname{arctg}(x-3) + c.$

108. $x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c.$

109. $x - \frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4) + \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c.$

110. $x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$