2. Aplikácie diferenciálneho počtu funkcie jednej premennej

L'Hospitalovo pravidlo

Pre limitu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$ platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokiaľ platia nasledujúce vlastnosti:

- existuje okolie bodu a, v ktorom funkcie f a g majú deriváciu,
- $g'(x)\neq 0$ v tom okolí,
- existuje limita $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

V prípade neurčitej limity typu $0\cdot\infty$, môžeme súčin $f(x)\cdot g(x)$ písať v tvare $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ alebo $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ a dostanema teda limity typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$, na čo už vieme aplikovať L´Hospitalovo pravidlo.

Cvičenia

1. Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^8-x}{x^8-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{6}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+1}{2x^4+6x-5}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2^x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\mathrm{cotg}x}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ o) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x\sin x$

p) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\,e^{\frac{1}{x^2}}$ q) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}x\ln\dfrac{1}{x}$ r) $\lim\limits_{x\to\infty}x\,\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Výsledky

1. a) 2 b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ e) $\frac{5}{2}$ f) 3 g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{-1}{2}$ i) 0
j) 1 k) 0 l) 0 m) 0 n) 2 o) 0 p) ∞ q) 0 r) 0

Taylorov polynóm

Pre body x, ktoré sú "blízke" k bodu x_0 (t.j. $x \to x_0$), môžeme funkčnú hodnotu $f(x)$ približne vypočítať (t.j. aproximovať - ozn. $\approx$) pomocou polynómu n-tého stupňa

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \ldots + A_n(x-x_0)^n \tag{1}$$

tak, aby

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ P_n''(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned} \tag{2}$$

Dosadením (1) do (2) vypočítame koeficienty A_i polynómu $P_n(x)$:
Definícia 2.1:

- **Taylorov polynóm funckie f v bode** x_0 (ozn. $T_n(x)$):

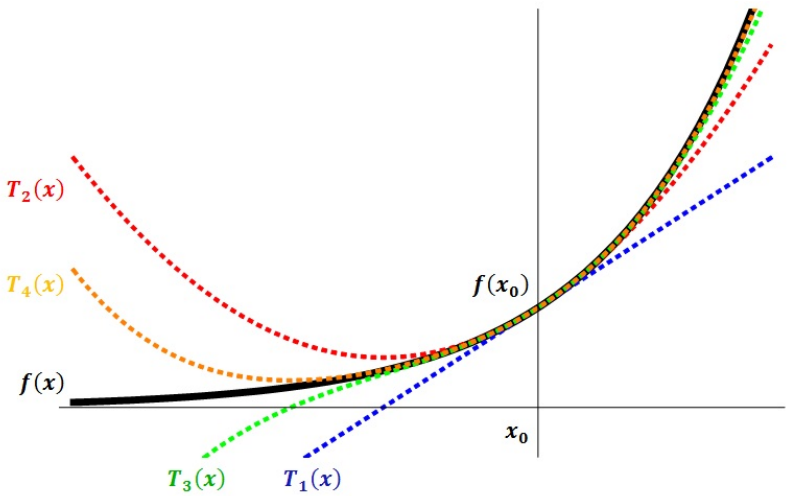
$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

  kde $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1$

- **Taylorov vzorec:** $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, kde $R_n(x)$ je chyba akej sa dopúšťame, ak aproximujeme $f(x) \approx T_n(x)$,

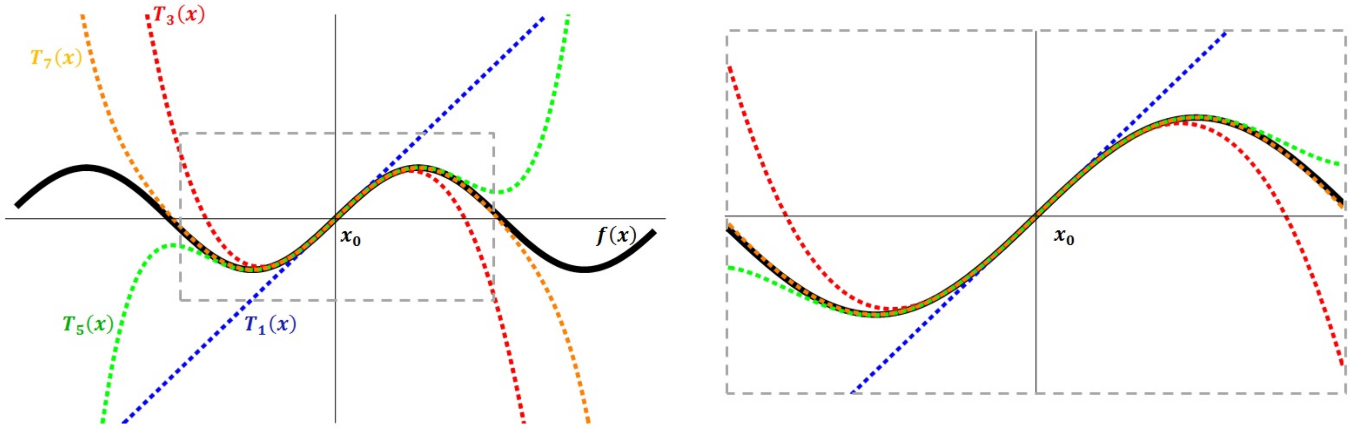
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x)$$

Na Obr. 1 je funkcia $f(x) = e^x$ a Taylorové polynómy tejto funkcie v bode $x_0 = 0$ stupňa $n = 1, 2, 3, 4$.



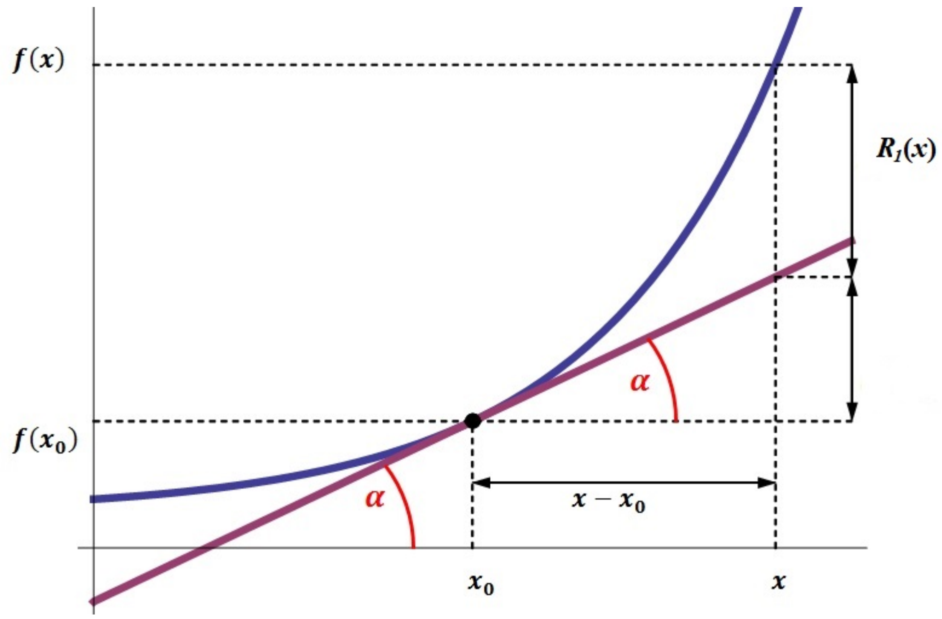
Obr. 1

Na Obr. 2 je funkcia $f(x) = \sin x$ a Taylorové polynómy tejto funkcie v bode $x_0 = 0$ stupňa $n = 1, 3, 5, 7$.



Obr. 2

Špeciálny prípad - Taylorov polynóm 1. stupňa:



Obr. 3

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definícia 2.2:

- **Dotyčnica funkcie f v bode x_0:** priamka $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Dotyčnica funkcie f v bode x_0 (teda táto špeciálna lineárna funkcia) aproximuje funkciu f v malom okolí bodu x_0.

Cvičenia

2. Nájdite rovnice dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$

a) $f(x) = \frac{x-2}{3}$, $x_0 = -1$, b) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$,
c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = -2$, d) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$,
e) $f(x) = 3^{-x}$, $x_0 = 0$, f) $f(x) = \ln 5x$, $x_0 = 1$.

3. Pomocou $T_1(x)$ vypočítajte približne hodnoty:

a) $\sqrt[6]{1,06}$	b) $\mathrm{arctg}\, 1,1$	c) $(1,04)^5$	d) $2^{1,002}$
e) $\ln 0,9$	f) $\arcsin 0,54$	g) $\arccos 0,47$	h) $\cos 61^\circ$
i) $(2,03)^3$	j) $3^{1,95}$	k) $\frac{6}{0.997}$	

4. Nájdite Taylorov mnohočlen stupňa n v bode a pre funkciu

a) $y = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$ v bode 0, $n = 4$,
b) $y = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$ v bode -2, $n = 4$,
c) $y = e^{-\frac{x}{2}}$ v bode 0, $n = 4$,
d) $y = \ln x$ v bode 1, $n = 5$,
e) $y = \sqrt{x}$ v bode 1, $n = 4$,
f) $y = \mathrm{tg}\, x$ v bode $\frac{\pi}{4}$, $n = 3$,
g) $y = \mathrm{arctg}\, x$ v bode 0, $n = 3$.

Výsledky

2. a) $t:\ y = \frac{x-2}{3}$, d) $t:\ y = -x + \frac{\pi}{2}$,
b) $t:\ y = -2x + \frac{3}{4}$, e) $t:\ y = -(\ln 3)x + 1$,
c) $t:\ y = \frac{4}{25}x + \frac{13}{25}$, f) $t:\ y = x + \ln 5 - 1$,

3.

a) 1,01	b) 0,835 ($\pi \approx 3,14$)	c) 1,2	d) 2,00276 ($\ln 2 \approx 0,69$)
e) $-0,1$	f) 0,5692 ($\sqrt{3} \approx 1,73$)	g) 1,08134	h) 0,4849 ($1^\circ \approx 0,0174$)
i) 8,36	j) 8,5276 ($\ln 3 \approx 1,0986$)	k) 6,018	

4. a) aj b) $T_4(x) = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$,
c) $T_4(x) = \frac{x^4}{384} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + 1$,
d) $T_5(x) = -\frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{10x^3}{3} - 5x^2 + 5x - \frac{137}{60}$,
e) $T_4(x) = -\frac{5x^4}{128} + \frac{7x^3}{32} - \frac{35x^2}{64} + \frac{35x}{32} + \frac{35}{128}$,
f) $T_3(x) = \frac{8}{3}x^3 + 2(1-\pi)x^2 + (\frac{\pi^2-2\pi+4}{2})x + 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{24}$,
g) $T_3(x) = -\frac{x^3}{3} + x$.

Priebeh funkcie

Monotónnosť:

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode intervalu (a,b) deriváciu, potom

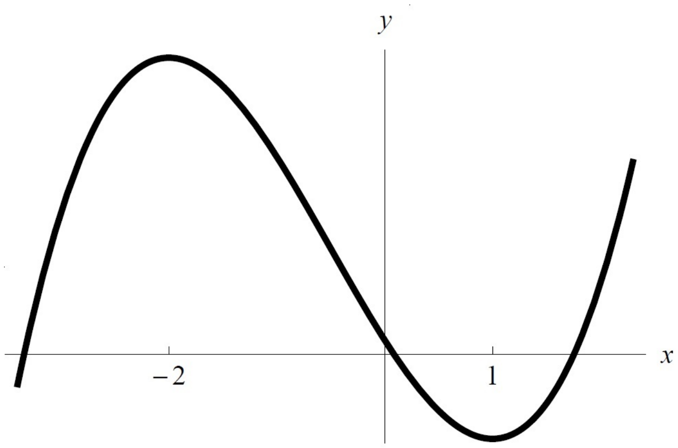
a.) ak $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **rastúca** na intervale (a,b),

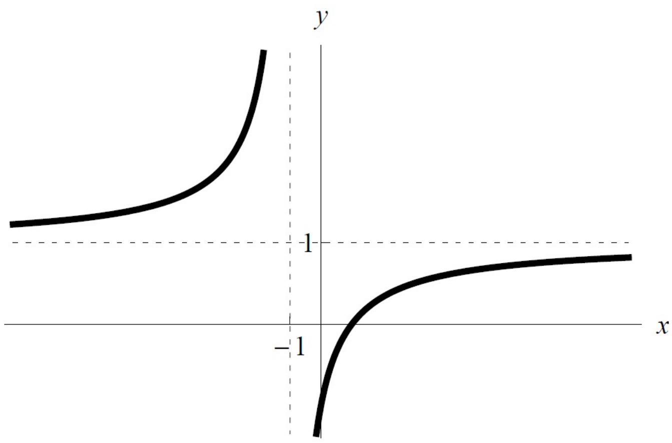
b.) ak $f'(x) < 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **klesajúca** na intervale (a,b),

c.) ak $f'(x) \geq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **neklesajúca** na intervale (a,b),

d.) ak $f'(x) \leq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **nerastúca** na intervale (a,b).

Na Obr. 4 vľavo je graf funkcie $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, vpravo $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$



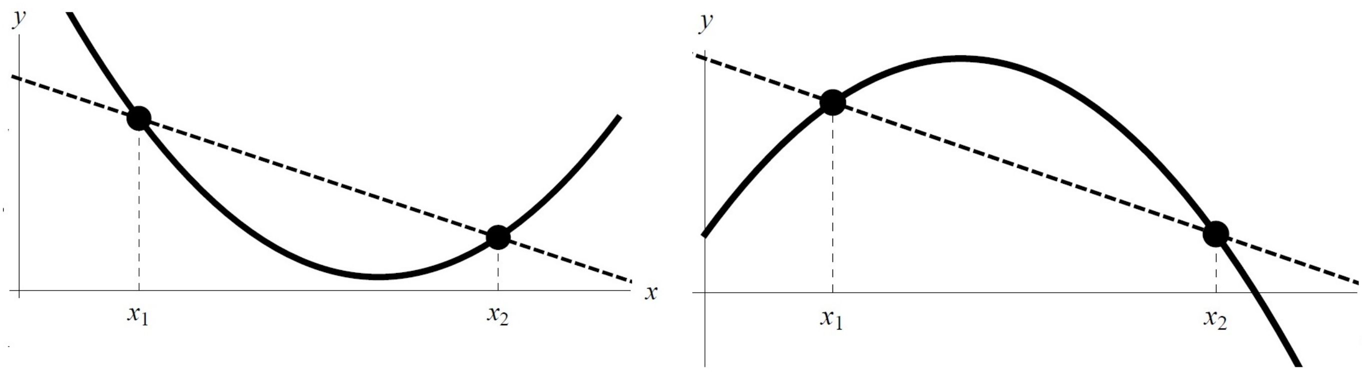


Obr. 4

Konvexnosť-konkávnosť:

Definícia 2.3:

- **Konvexná funkcia na intervale I:** pre všetky body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a pre každú konštantu $t \in (0,1)$ platí, že
$$f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_2\big) \leq t\,f(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
(Obr. 5 vľavo), t.j. ak graf funkcie na intervale (x_1, x_2) leží **pod** priamkou, ktorá spája body $f(x_1)$ a $f(x_2)$



Obr. 5

- **Konkávna funkcia na intervale I:** pre všetky body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a pre každú konštantu $t \in (0,1)$ platí, že
$$f\big(t\,x_1 + (1-t)x_2\big) \geq t\,f(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
(Obr. 5 vpravo), t.j. ak graf funkcie na intervale (x_1, x_2) leží **nad** priamkou, ktorá spája body $f(x_1)$ a $f(x_2)$

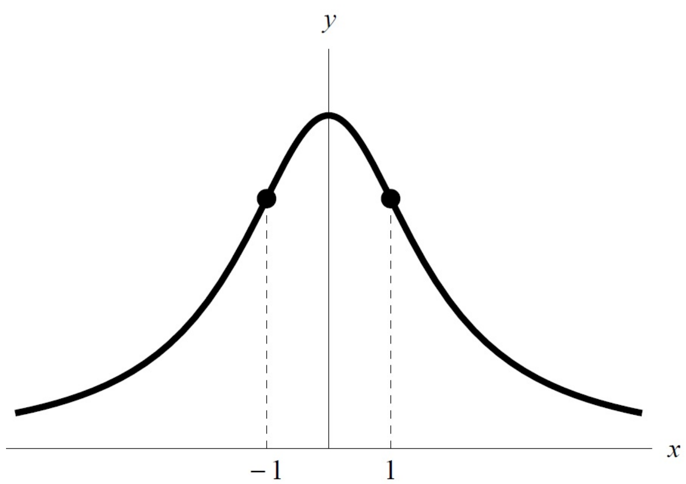
- **Inflexný bod:** bod, v ktorom sa konvexnosť mení na konkávnosť alebo naopak

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode intervalu (a,b) prvú a druhú deriváciu, potom

a.) ak $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **konvexná** na intervale (a,b),

b.) ak $f''(x) \leq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **konkávna** na intervale (a,b)

Na Obr. 6 je graf funkcie $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$



Obr. 6

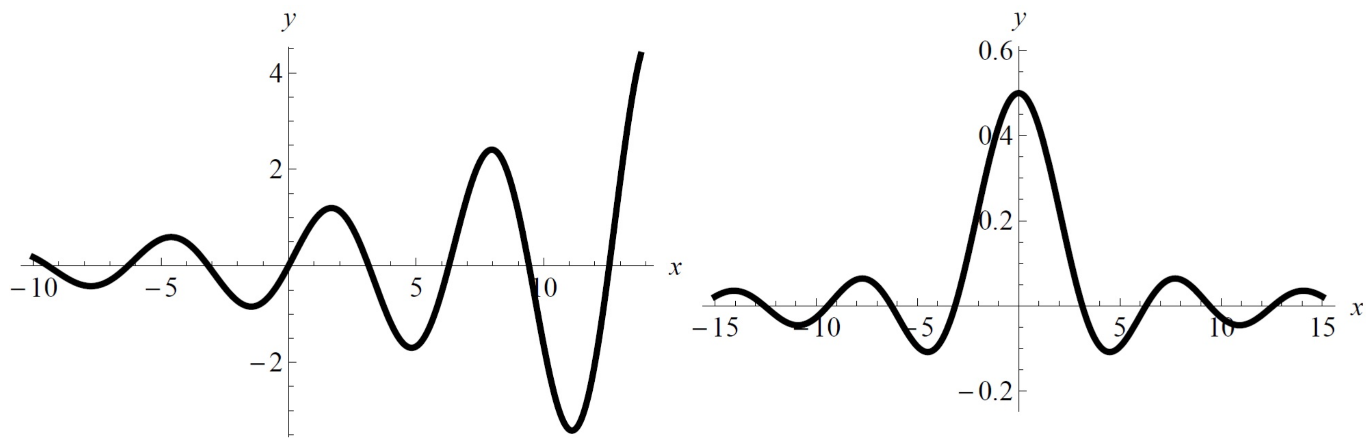
Lokálne, globálne extrémy:

Definícia 2.4:

- **Lokálne minimum**, resp. **lokálne maximum funkcie f v bode x_0:** (Obr. 7 vľavo) ak existuje ε-ové okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu x_0, že pre všetky $x \in O_\varepsilon(x_0)$ platí

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{resp.} \quad f(x_0) \geq f(x).$$

- **Globálne minimum**, resp. **globálne maximum funkcie f v bode x_0:** (Obr. 7 vpravo) ak $f(x_0) \leq f(x)$, resp. $f(x_0) \geq f(x)$ platí pre všetky body z definičného oboru funkcie f.



Obr. 7

Hľadanie extrémov pomocou prvej derivácie:

Ak pre okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$ platí, že

$$f'(x) > 0 \quad \text{pre} \quad x < x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam rastúca)}$$

a

$$f'(x) < 0 \quad \text{pre} \quad x > x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam klesajúca)},$$

tak v bode x_0 má funkcia **lokálne maximum**.

Ak pre okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$ platí, že

$$f'(x) < 0 \quad \text{pre} \quad x < x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam klesajúca)}$$

a

$$f'(x) > 0 \quad \text{pre} \quad x > x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam rastúca)},$$

tak v bode x_0 má funkcia **lokálne minimum**.

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode $x_0 \in (a,b)$ deriváciu a nech má v tomto bode lokálny extrém. Potom $f'(x_0) = 0$.

!!!Opačná implikácia nemusí platiť!!!

Definícia 2.5:

- **Stacionárny bod:** bod, pre ktorý platí $f'(x_0) = 0$

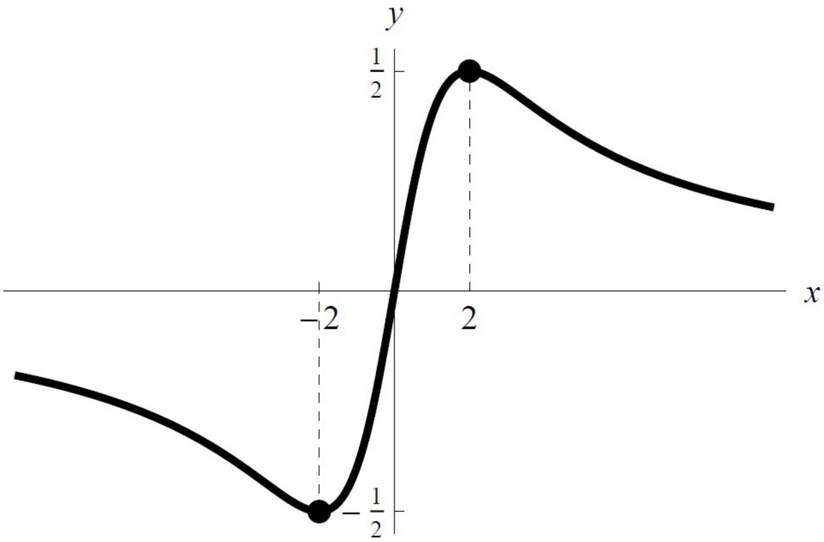
Hľadanie extrémov pomocou druhej derivácie:

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ má v bode $x_0 \in (a, b)$ prvú aj druhú deriváciu a nech $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Potom

a.) ak $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 **lokálne maximum**,

b.) ak $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 **lokálne minimum**.

Na Obr. 8 je graf funkcie $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$



Obr. 8

Asymptoty grafu funkcie:

Asymptota je priamka, ku ktorej sa graf funkcie blíži, ale nikdy nepretína - dotyčnica v nekonečnu.

Definícia 2.6:

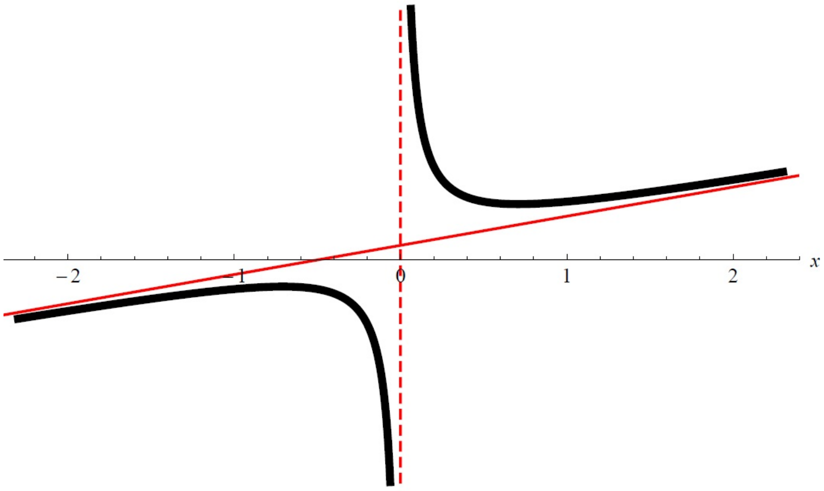
- **Asymptota bez smernice:** priamka daná rovnicou $x = a$, ak sa nastane aspoň jeden z nasledujúcich prípadov

  1) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$

- **Asymptota so smernicou:** priamka daná rovnicou $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big)$$

Na Obr. 9 je graf funkcie $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{8x}$



Obr. 9

Priebeh funkcie:

Vlastnosti, ktoré treba vyšetriť:

1) definičný obor
2) všetky body nespojitosti a intervaly spojitosti
3) priesečníky s osou x a y
4) párnosť/nepárnosť, periodičnosť
5) intervaly monotónnosti, intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexné body, lokálne extrémy
6) asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou
7) nakresliť graf

Na Obr. 13 je graf funkcie $f(x) = x + \dfrac{2x}{x^2-1}$

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
2) body nespojitosti sú $x = -1$ a $x = 1$, intervaly spojitosti sú $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$
3) funkcia pretína os x a y len v bode so súradnicami $(0, 0)$
4) je nepárna, lebo

$$f(-x) = -x + \frac{2(-x)}{(-x)^2-1} = -\left(x + \frac{2x}{x^2-1}\right) = -f(x)$$

nie je periodická

5) – **Monotónnosť, lokálne extrémy:**

$$f'(x) = \frac{\left(x^2-(2+\sqrt{5})\right)\left(x^2-(2-\sqrt{5})\right)}{(x^2-1)^2}$$

na Obr. 10 šípka $\nearrow$ znamená rastúcosť, šípka $\searrow$ znamená klesajúcosť,

$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{5}}$, $x_2 = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$

	$(-\infty, x_1)$	$x = x_1$	$(x_1, -1)$	$(-1,1)$	$(1, x_2)$	$x = x_2$	(x_2, ∞)
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	LOK. MAX.	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	LOK. MIN.	$\nearrow$

Obr. 10

– **Konvexnosť/konkávnosť, inflexné body:**

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

na Obr. 11 znak $\bigcup$ znamená konvexnosť, $\bigcap$ znamená konkávnosť,

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$x = 0$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	-	+	0	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	INFLEX. BOD	$\cap$	$\cup$

Obr. 11

– **Asymptoty:** Asymptoty bez smernice sú priamky $x = 1$ a $x = -1$

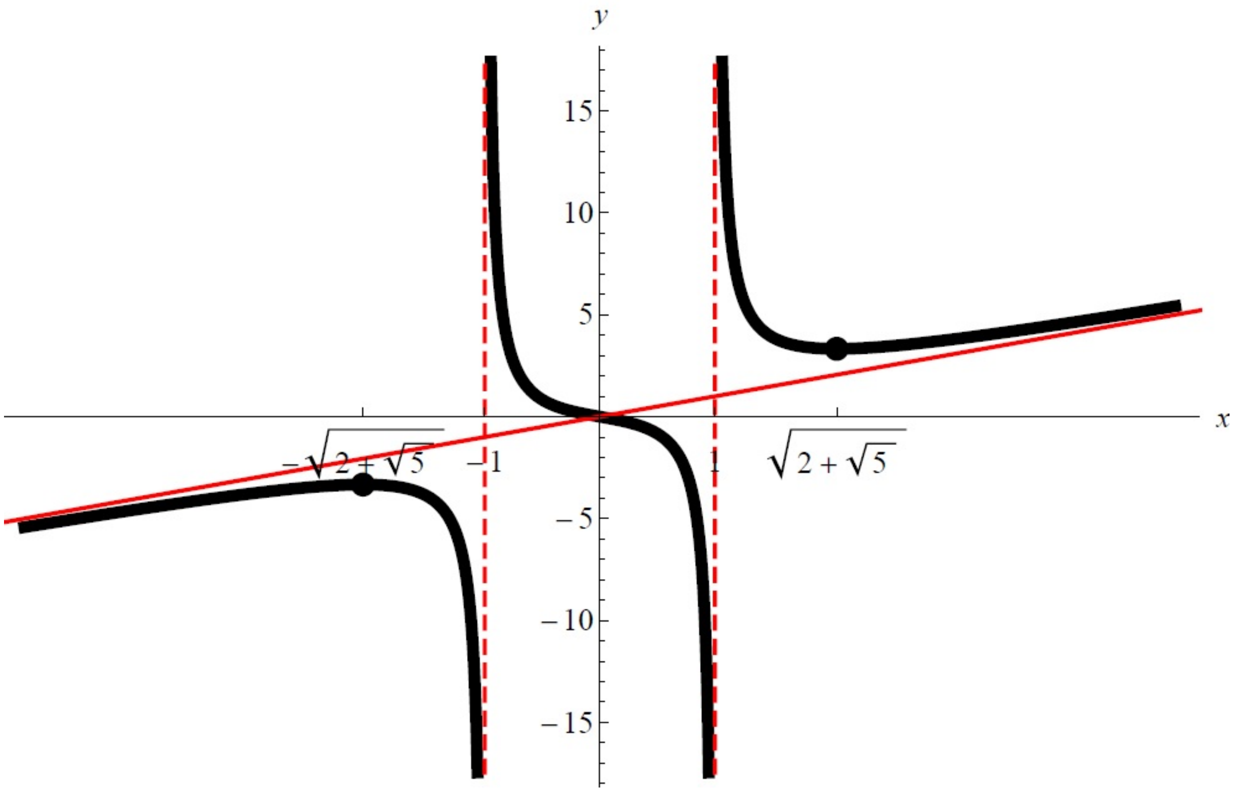
	$(-\infty,-1)$	$x \to -1-$	$x \to -1+$	$(-1,1)$	$x \to 1-$	$x \to 1+$	$(1,\infty)$
$f(x)$		$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$		$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$	

Obr. 12

Asymptota so smernicou je priamka $y = x$, keďže

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$$



Obr. 13

Cvičenia

Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$ a načrtnite jej graf:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ e) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$ f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

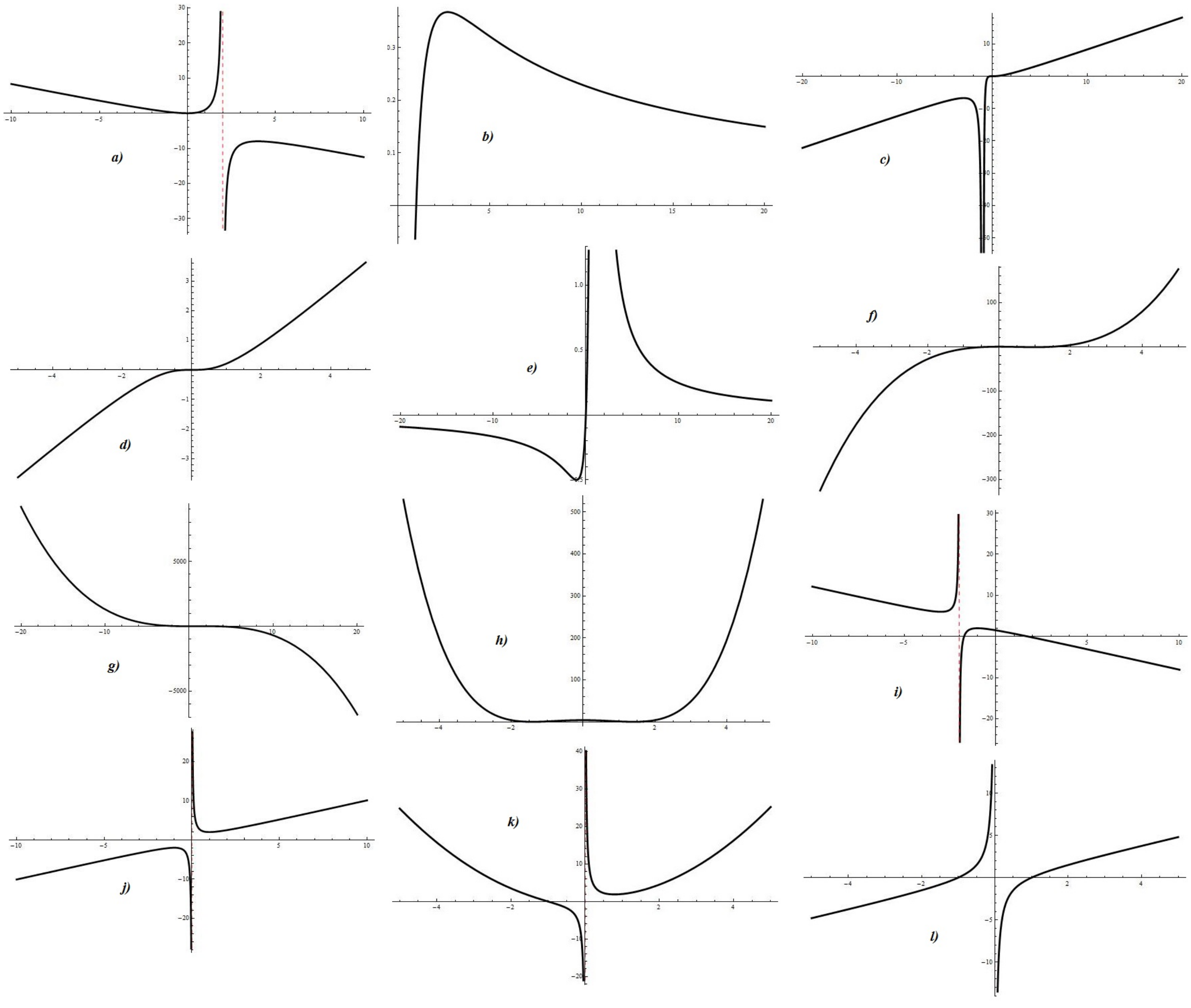
g) $f(x) = 2 - x^3 + 3x^2$ h) $f(x) = (2-x^2)^2$ i) $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+2}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ k) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ l) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

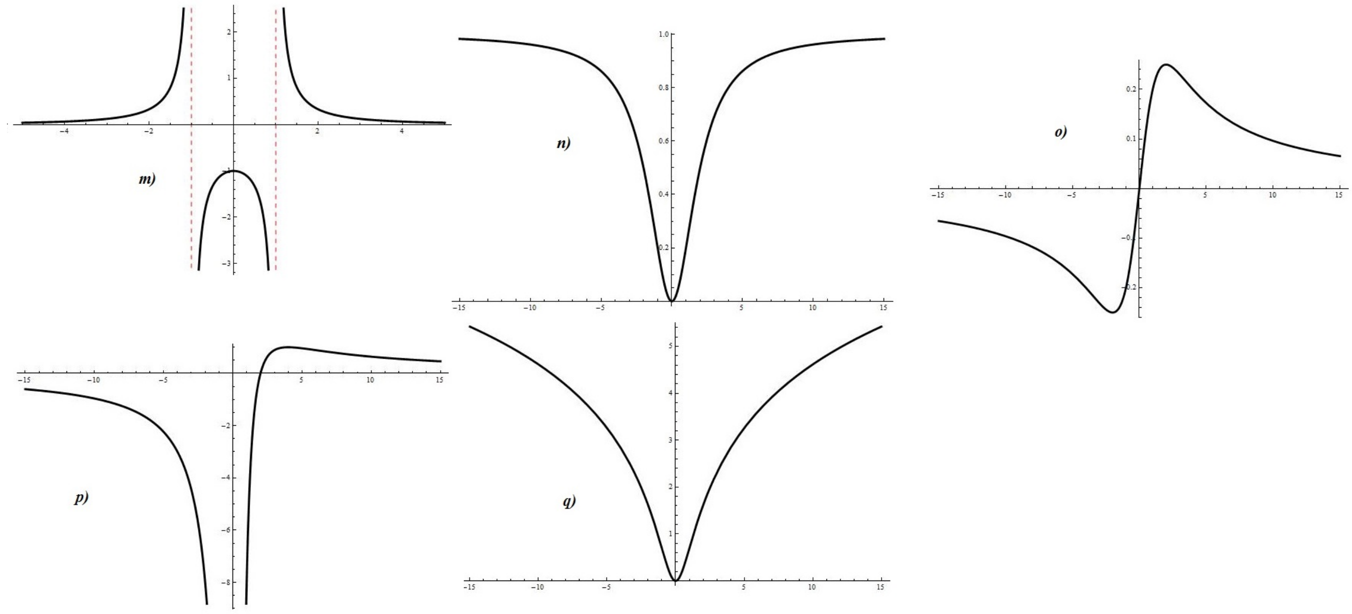
m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ n) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$ o) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

p) $f(x) = \dfrac{8(x-2)}{x^2}$ q) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ r) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} + x$

Výsledky



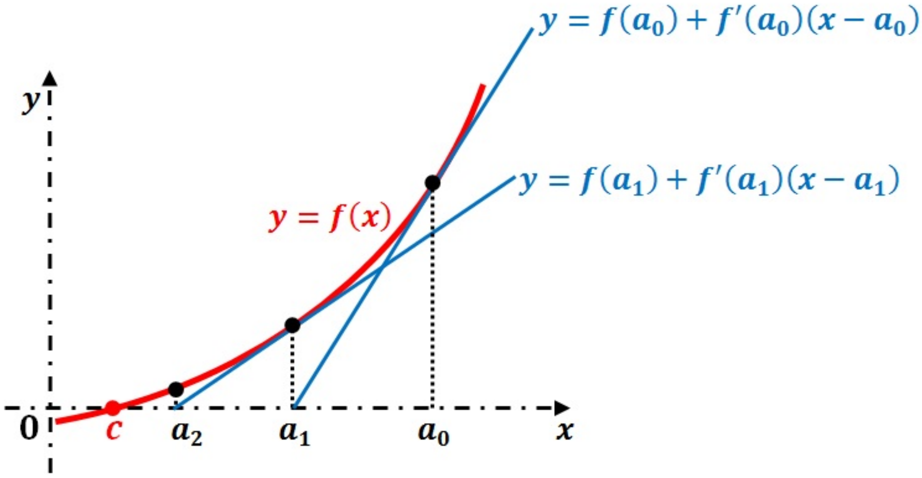
Obr. 14



Obr. 15

Približné riešenie rovníc - Newtonova metóda

Ak funkcia je spojitá na intervale $\langle a,b \rangle$ a $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, tak existuje $c \in (a,b)$ s vlastnosťou $f(c) = 0$.
Newtonova metóda- metóda, pomocou ktorej hľadáme bod $c \in (a,b)$, v ktorom $f(c) = 0$, t.j. slúži na riešenie rovnice $f(x) = 0$.



Obr. 16

Postup:

1. nájsť vhodný začiatočný bod $a_0 \in (a,b)$
2. zostrojiť dotyčnicu t_0 funkcie f v bode a_0: $\quad y = f(a_0) + f'(a_0)(x - a_0)$
3. nájsť priesečník dotyčnice t_0 s osou x, označme to a_1: $\quad a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$
4. opakovať postup 1.-3. pre bod a_1, z čoho dostaneme bod $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$
5. opakovať postup 1.-3. pre bod a_2, z čoho dostaneme bod $a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)}$

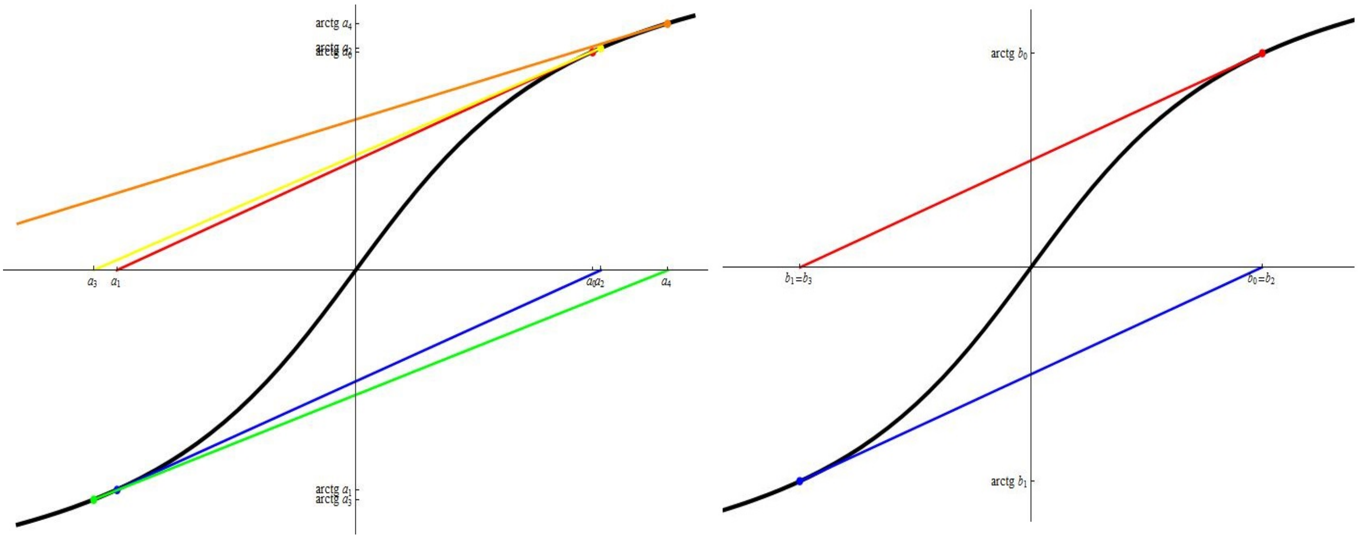
$\vdots$

$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})} \qquad a_n \approx c$.

!!! 1. krok je veľmi dôležitý!!!

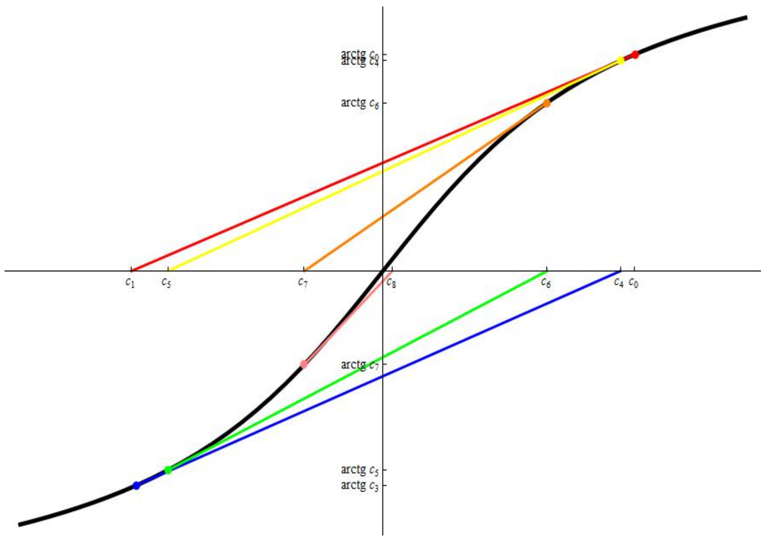
Hľadajme riešenie rovnice $\mathrm{arctg}\, x = 0$ Newtonovou metódou, pričom vieme, že výsledok má byť $x = 0$.

- Na obrázku 17 vľavo je znázornená Newtonova metóda so začiatočným bodom $a_0 = 1.4$ - hodnoty a_i sú vždy vzdialenejší od riešenia.



Obr. 17

- Na obrázku 17 vpravo je Newtonova metóda so začiatočným bodom $b_0 = 1.39175$ - hodnoty b_i sú "zacyklené", striedajú hodnoty 1.39175 a -1.39175.
- Na obrázku 18 je Newtonova metóda so začiatočným bodom $c_0 = 1.39$ - hodnoty c_i sú vždy bližšie k riešeniu.



Obr. 18

Cvičenia

Newtonovou metódou hľadajte riešenie rovnice $f(x) = 0$ pre $x \in I$ (pokiaľ je to možné) - nájdite aspoň dve členy postupnosti (t.j. nájdite a_1, a_2), ak začiatočný bod a_0 je daný:

a) $f(x) = x^3 - x - 1$ $\qquad$ $I = \langle 0, 2 \rangle$

i) $a_0 = 1$ ii) $a_0 = 2$ iii) $a_0 = 0$ iv) $a_0 = 0.5$

b) $f(x) = 2(\pi - x)\sin x - \cos x$ $I = \langle 0, \pi \rangle$

i) $a_0 = 1$ ii) $a_0 = 0$ iii) $a_0 = 2$

c) $f(x) = 2\ln x - \dfrac{1}{x}$ $I = \langle 1, e \rangle$

i) $a_0 = 2$ ii) $a_0 = 1$ iii) $a_0 = e$

d) $f(x) = e^x + x^2 - 2$ $I = \langle 0, 3 \rangle$

i) $a_0 = 1$ ii) $a_0 = 0$

e) $f(x) = \sin x + 2x - 2$ $I = \langle 0, \pi \rangle$

i) $a_0 = 1$ ii) $a_0 = 3$

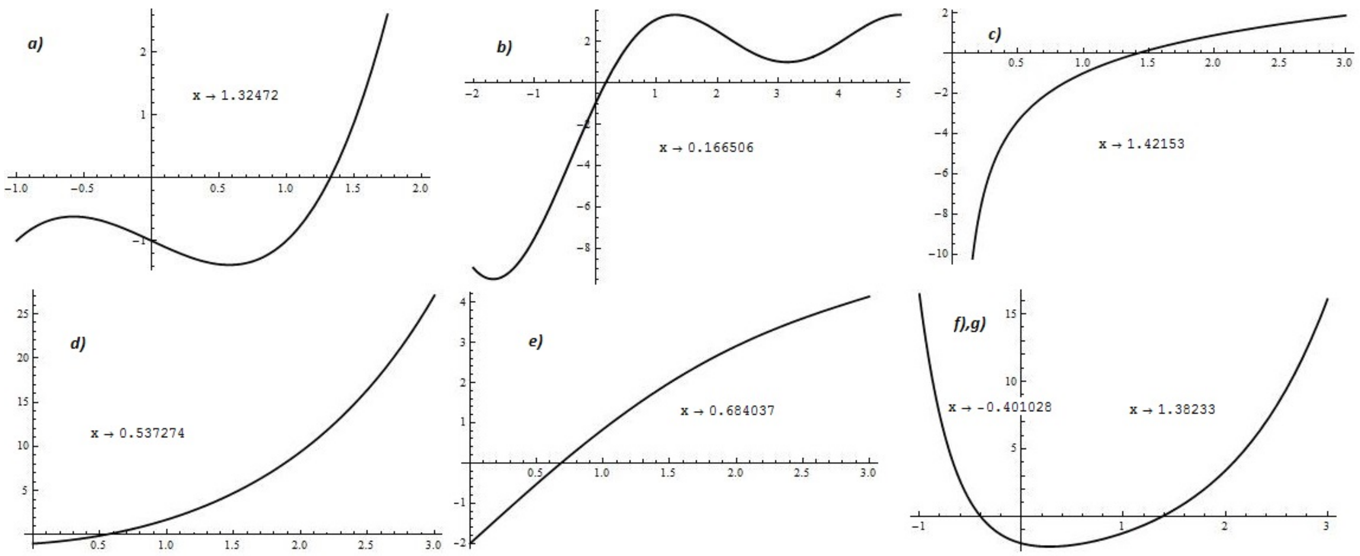
f) $f(x) = e^x + e^{-3x} - 4$ $I = \langle 0, 5 \rangle$

i) $a_0 = 1$ ii) $a_0 = 5$

g) $f(x) = e^x + e^{-3x} - 4$ $I = \langle -1, 0 \rangle$

i) $a_0 = -1$ ii) $a_0 = 0$

Výsledky



Obr. 19