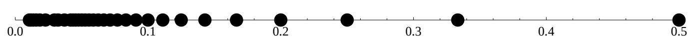
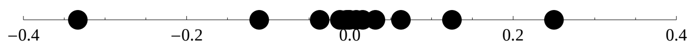
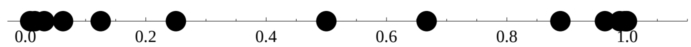
1. Limita, spojitosť a diferenciálny počet funkcie jednej premennej

Definícia 1.1: Hromadný bod $a \in \mathbb{R}$ množiny $A \subset \mathbb{R}$: v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a

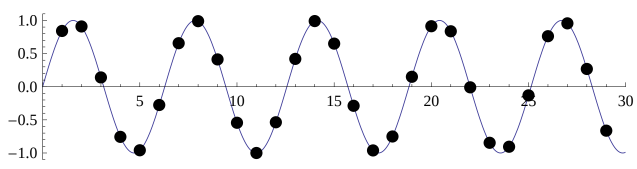
Zadanie množiny A :	**Hromadné body a :**	**Znázornenie množiny :**
$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$	$a = 0$	
$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, -\frac{1}{3^4}, \dots \right\}$	$a = 0$	
$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3^2}, 1-\frac{1}{3^3}, 1-\frac{1}{3^4}, \dots \right\}$	$a = 0,\ a = 1$	

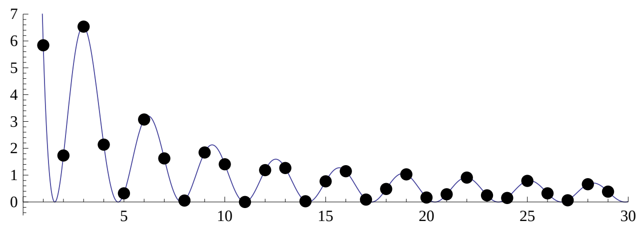
Hromadné body niektorých významných množín A:

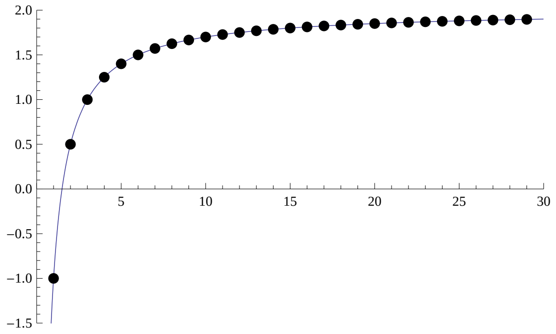
- $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\Longrightarrow$ hromadný bod je ∞
- $A = \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\Longrightarrow$ hromadné body sú $\infty, -\infty$
- $A = (a, b)$, pre $a, b \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ hromadné body sú všetky čísla intervalu $\langle a, b \rangle$
- $A = \langle a, b \rangle$, pre $a, b \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ hromadné body sú všetky čísla intervalu $\langle a, b \rangle$
- $A = \mathbb{Q}$ $\Longrightarrow$ hromadné body sú všetky reálne čísla $\mathbb{R}$ a ešte aj $\infty, -\infty$
- $A = \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ hromadné body sú všetky reálne čísla $\mathbb{R}$ a ešte aj $\infty, -\infty$

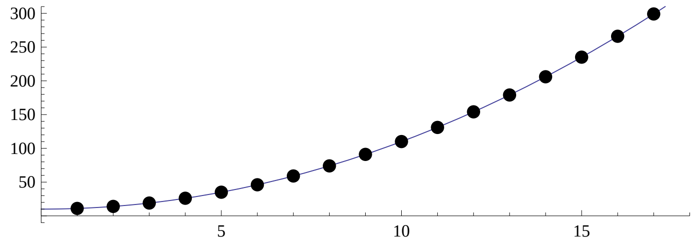
Limita postupnosti

limes = hranica









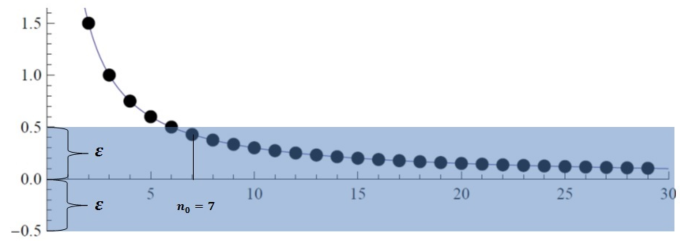
Definícia 1.2:

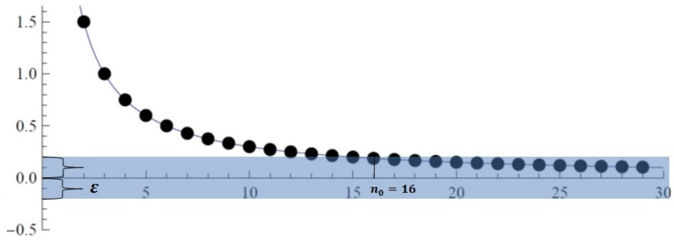
- **Limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **-** (ozn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ alebo $a_n \to a$):

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0 \ : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

- **Konvergentná postupnosť**: ak postupnosť má konečnú limitu $a \in R$
- **Divergentná postupnosť**: ak nie je konvergentná, t.j. neexistuje limita alebo to nie je konečné číslo
- **Vlastná limita postupnosti**: ak limita postupnosti je reálne číslo, t.j. ak postupnosť je konvergentná
- **Nevlastná limita postupnosti**: ak limita postupnosti je ∞ alebo $-\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} = 0$

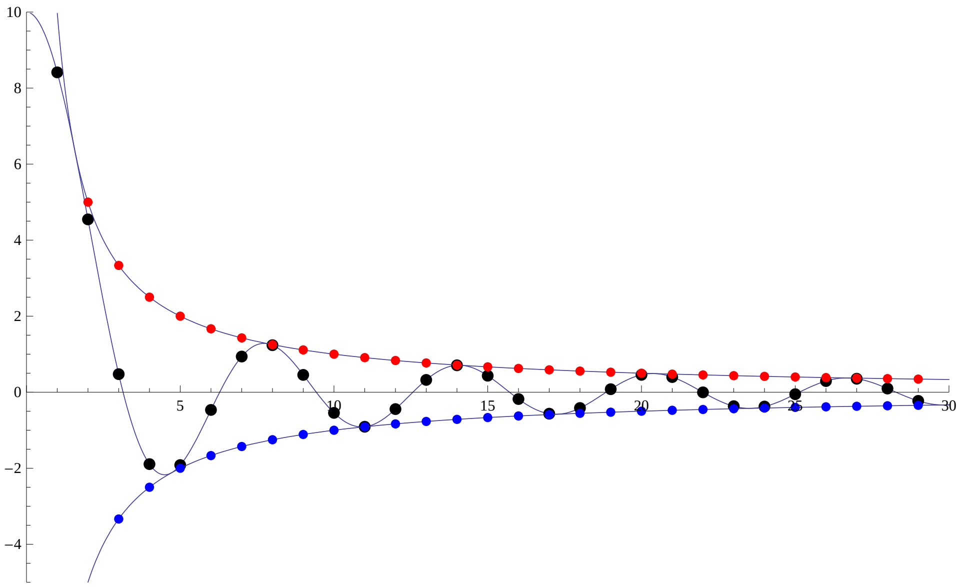




Vlastnosti limity postupnosti:

- **VLP1:** Každá konvergentná postupnosť má iba jednu limitu
- **VLP2:** Ak je postupnosť konvergentná, tak je ohraničená (!!!opačne to nemusí platiť!!!)
- **VLP3:** Každá zhora ohraničená, rastúca (neklesajúca) postupnosť je konvergentná a konverguje k jej supremum
- **VLP4:** Každá zdola ohraničená, klesajúca (nerastúca) postupnosť je konvergentná a konverguje k jej infimum

- **VLP5:** Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné postupnosti, pričom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, potom
  - $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n| = |a|$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(k\cdot a_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} k\cdot a_n) = k\cdot a$ pre $k\in\mathbb{R}$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\pm b$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$ za predpokladu, že $b_n \neq 0$ a $b\neq 0$
- **VLP6:** Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ a pre skoro všetky n (tj. začínajúc od nejakého n_0) platí, že $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$
- **VLP7:** Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, potom $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = 0$



$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$, lebo

- z vlastnosti VLP6: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ a $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$
- z vlastnosti VLP7: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ a postupnosť $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená

Významné limity:

$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ pre $c \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$ pre $k > 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pre $k > 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ pre $q > 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$ pre $q = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pre $q \in (-1, 1)$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ neexistuje pre $q \le -1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	

Počítanie s ∞ a $-\infty$:

Sčítanie:	$\infty + \infty = \infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	$c + \infty = \infty$ pre $c \in \mathbb{R}$	$c - \infty = -\infty$ pre $c \in \mathbb{R}$
Násobenie:	$\pm\infty \cdot (\pm\infty) = \infty$	$\mp\infty \cdot (\pm\infty) = -\infty$	$c \cdot \infty = \infty$ pre $c > 0$	$c \cdot \infty = -\infty$ pre $c < 0$
Umocnenie:	$\infty^c = \infty$ pre $c > 0$	$\infty^{-c} = \frac{1}{\infty^c} = 0$ pre $c > 0$	$c^\infty = \infty$ pre $c > 1$	$c^\infty = 0$ pre $c \in (-1, 1)$
!!!Neurčité limity!!!	$\infty - \infty = ?$	$0 \cdot \infty = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$

Cvičenia

1.1. Vypočítajte limity postupnosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^4 - 5n^2 + 6)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 1 - n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1 - n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right)^3$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n}\right)\left(\frac{2}{n^2} - 3\right)^2\right]$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4 - 3n + 2}{2n^4 - 3n^3 + n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 3}}{n - 2}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2 + \sqrt{n^3 + 3}}{n^2 + n - 2}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n + 2} - \frac{n^2}{n + 3}\right)$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{n + 1} - 2n\right)$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2}}{n + 1}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^n$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n - 3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n - 1}{2n + 1}\right)^n$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 - 1}$

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n - 2}{3n + 1}\right)^{5n - 3}$

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7 - 3^n}{2.3^n + 3}$

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

u) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{1 + 4^n}$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ w) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n^3} - \frac{10\sin(2n)}{9n-3\sqrt{n}}\right)$ z) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\frac{\cos n}{n}\right)$

Limita funkcie

Definícia 1.3:

- **Funckia má v bode a limitu b -** (ozn. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$): ak a je hromadným bodom množiny $D(f)$ a ak pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)\setminus\{a\}$ takú, že $x_n \to a$, platí
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$
- **Limita zprava -** (ozn. $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$): ak v definície limity funkcie platí, že $x_n > a$
- **Limita zľava -** (ozn. $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$): ak v definície limity funkcie platí, že $x_n < a$
- **Vlastná limita vo vlastnom bode** : $a \in \mathbb{R}$ a aj $b \in \mathbb{R}$
- **Nevlastná limita vo vlastnom bode** : $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \{-\infty, \infty\}$
- **Vlastná limita v nevlastnom bode** : $a \in \{-\infty, \infty\}$ a $b \in \mathbb{R}$
- **Nevlastná limita v nevlastnom bode** : $a \in \{-\infty, \infty\}$ a $b \in \{-\infty, \infty\}$

!!!Limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje práve vtedy, ak existujú $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ a rovnajú sa!!!

Významné limity:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^k} = \infty$ pre nepárne $k \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^k} = \infty$ pre párne $k \in \mathbb{N}$	$\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^k} = -\infty$ pre nepárne $k \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^k}$ neexistuje pre nepárne $k \in \mathbb{N}$	

Cvičenia

1.2. Vypočítajte limity funkcie:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{3x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$ n) $\lim\limits_{x\to 1}(1+5\log x)^{\frac{1}{\log x}}$ o) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$ q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{x}$ r) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1)$

s) $\lim\limits_{x\to\infty}\log\dfrac{x^2+x+3}{x^2-2}$ t) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{2x-2}-1}{x-1}$ u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{3^{2x}-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\mathrm{tg}x}-1}{x}$ w) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}x$ z) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$

1.3. Pomocou vzorca $(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})=A-B$ vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+3)}-n\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$

1.4. Vypočítajte jednostranné limity funkcie f v bode a:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $a=1$ b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$, $a=0$

c) $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^3}$, $a=2$ d) $f(x)=\dfrac{1}{2-2^{1/x}}$, $a=0$

e) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+1} & \text{pre} \quad x<0 \\ 3x & \text{pre} \quad x\in\langle 0,2) \\ 1 & \text{pre} \quad x\geq 2 \end{cases}$, $a=-1$, $a=0$, $a=2$

Spojitosť funkcie

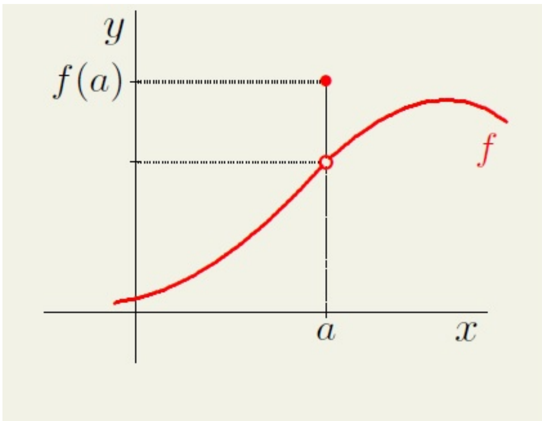
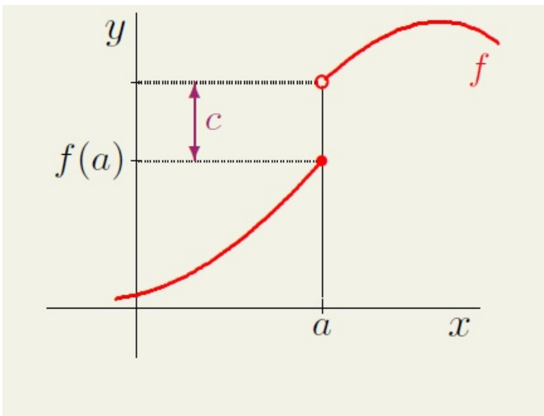
Definícia 1.4:

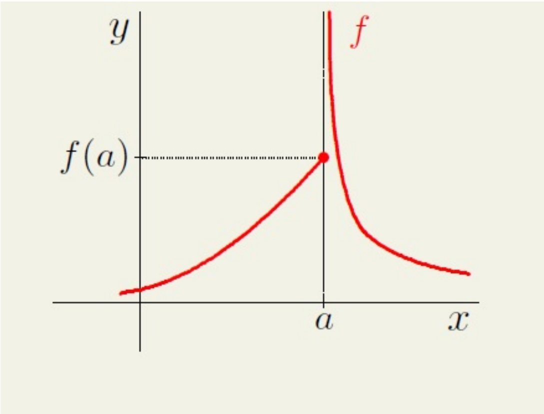
- **Funckia je spojitá v bode** $a \in D(f)$**:** ak pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ takú, že $x_n \to a$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$
- **Funkcia je spojitá na množine** M**:** ak je spojitá v každom bode $a \in M$
- **Bod nespojitosti funkcie :** bod, v ktorom funkcia nie je spojitá

Bod $a \in D(f)$ môže byť hromadným alebo izolovaným bodom množiny $D(f)$ (t.j. existuje také jeho okolie, v ktorom neleží žiadny iný bod $D(f)$) :

- funkcia f je vždy spojitá v izolovanom bode,
- ak a je hromadným bodom množiny $D(f)$, tak $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Typ bodov nespojitosti:

Typ nespojitosti	Znázornenie
Odstrániteľná nespojitosť: existuje vlastná $\lim_{x\to a} f(x)$ ale nerovná sa $f(a)$	
Neodstrániteľná nespojitosť 1. druhu: neexistuje $\lim_{x\to a} f(x)$ ale iba limita zprava a limita zľava a tieto sú vlastné a nerovnajú sa	

<table>
<tr><th>Typ nespojitosti</th><th>Znázornenie</th></tr>
<tr><td>Neodstrániteľná nespojitosť 2. druhu: buď existuje len nevlastná limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, alebo neexistuje vôbec, len limita zprava a limita zľava a tieto sú (aspoň jedna) nevlastné</td><td>
</td></tr>
</table>

Vlastnosti spojitých funkcií:

- **VSF1:** Každá elementárna funkcia je spojitá všade, kde je definovaná
- **VSF2:** Súčet a súčin spojitých funkcií je spojitý
- **VSF3:** Funkcia zložená zo spojitých funkcií je spojitá
- **VSF4:** Inverzná funkcia spojitej funkcie je spojitá
- **VSF5:** Ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$, potom
  - je ohraničená na $\langle a,b\rangle$
  - nadobúda na $\langle a,b\rangle$ svoje maximum a minimum
  - pokiaľ $f(a)>0$ a $f(b)<0$ (alebo opačne), tak existuje prvok $c\in\langle a,b\rangle$ taký, že $f(c)=0$

Cvičenia

1.5. Zistite, kde sú spojité nasledujúce funkcie. Nájdite body nespojitosti a zistite ich typ:

a) $f(x)=(x+3)^2\,\sin\dfrac{1}{(x+3)^2}$ b) $f(x)=e^{-1/x^2}$ c) $f(x)=\operatorname{sgn}(x(1-x^2))$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{x^3+5x^2+6x}$ e) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^x}{x} & \text{pre}\quad x<0\\ 2x-1 & \text{pre}\quad x\geq 0\end{cases}$ h) $f(x)=\sqrt{x}\,\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ i) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$

1.6. Dokážte, že daná rovnica má na intervale I riešenie:

a) $x^3 - x - 1 = 0 \quad I = \langle 1, 2\rangle$

b) $x^3 - 6x^2 + \dfrac{1}{x} + 5 = 0 \quad I = \langle 1, 8\rangle$

c) $e^x + x = 0 \quad I = \langle -1, 0\rangle$

d) $\cos x - kx = 0,\ k \neq 0 \quad I = \langle -\pi, \pi\rangle$

e) $\ln x - 3 + x = 0 \quad I = \langle 1, e\rangle$

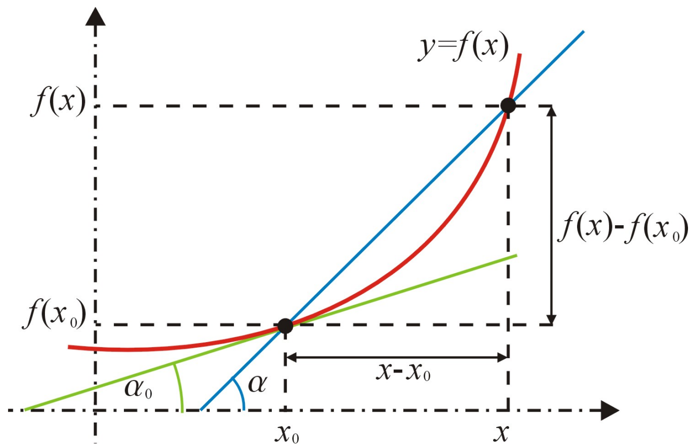
f) $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 7x - 8 = 0 \quad I = \langle 1.3, 1.4\rangle$

g) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad I = \langle -1.1, -1\rangle$

Diferenciálny počet

Definícia 1.5: Derivácia funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ - (ozn. $f'(x_0)$): reálne číslo

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Ak existuje derivácia funkcie f v každom bode niektorej množiny M, tak funkcia f', ktorá priradí každému číslu $x \in M$ hodnotu $f'(x)$ je **derivácia funkcie f v množine M**.

Derivácia elementárnych funkcií:

Vzorec	podmienky	Vzorec	podmienky
$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R},\ c$ – konštanta	$(x)' = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$x > 0$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

Vzorec	podmienky	Vzorec	podmienky
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$	$(\mathrm{cotg}\, x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$	$(\mathrm{arccotg}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Vlastnosti derivácie:

- **VD1:** $\big(c\,f(x)\big)' = c\,f'(x)$ pre $c \in \mathbb{R}$
- **VD2:** $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$
- **VD3:** $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- **VD4:** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ pre $g(x) \neq 0$
- **VD5:** $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\,g'(x)$

Definícia 1.6: Derivácia druhého rádu funkcie f - (ozn. f''): funkcia, ktorá vznikne ako derivácia prvej derivácie funkcie, t.j. $(f')' = f''$

Cvičenia

1.7. Pomocou definície nájdite deriváciu funkcie f v bode x_0:

a) $f(x) = x^3 - 3, \quad x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad x_0 = 2$

c) $f(x) = x^3 \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

d) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad x_0 = 0$

e) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad x_0 = 1$

f) $f(x) = e^{2x}, \quad x_0 = 0$

1.8. Nájdite derivácie daných funkcií:

a) $y = x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

b) $y = x^2 + 2 - \sin x$

c) $y = e^x + 2\ln x - 8x^6$

d) $y = x^4 + \cos x$

e) $y = (x+3)\log_2 x$

f) $y = (x^2 + 3x - 5)e^x$

g) $y = \dfrac{\sin x}{x^3+1}$ h) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$ i) $y = \dfrac{2^x + x}{\operatorname{arctg} x}$

j) $y = \operatorname{tg}(x^3 - \sin x)$ k) $y = 2\ln(3\sqrt[3]{x} + 2x^5)$ l) $y = 3^{x^2 - \cos x - 2}$

m) $y = \ln\left(\dfrac{1}{\arccos x}\right)$ n) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3x^6 + 5x - 2}{\arcsin x}\right)$ o) $y = 3^{x \log_3 x}$

p) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ q) $y = e^{\sin x}\sin x$ r) $y = \sqrt{\dfrac{(x+2)\cos x^2}{x(x^3-8)}}$

s) $y = \ln \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ t) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x+4)^5}\sqrt{(x-1)^3}}$ u) $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} e^x}$

v) $y = \arccos \ln(x^8 - \sin x)$ w) $y = \dfrac{5x^2}{x^2+1}\sin^3 x \cos^4 x$ z) $y = \log_6 \sin e^{2x}$

1.9. Vypočítajte $f''(0)$ a $f''(1)$, ak

a) $f(x) = x^5 - 7x + 12$ b) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$

c) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ d) $f(x) = xe^{-x^2}$