# 8. Diferenciálne rovnice

Ilustračný príklad 1: Hľadáme krivku $y = y(x)$, ktorá má tú vlastnosť, že normála v každom jej bode $(x_0, y_0)$ prechádza daným pevným bodom $(0,0)$. Rovnica normály funkcie $y(x)$ v bode $(x_0, y_0)$ je

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \ .$$

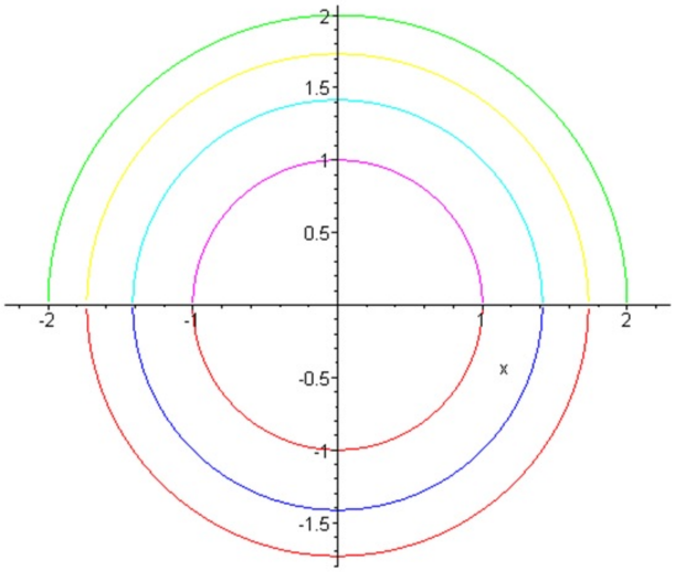
Ak dosadíme do rovnice normály súradnice bodu $(x,y) = (0,0)$, pre ľubovoľný bod $(x_0, y_0)$ dostaneme:

$$-y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(-x_0)$$

a po preznačení a úprave

$$y' = -\frac{x}{y},$$

čo je tzv. diferenciálna rovnica so separovanými premennými. Riešním tejto rovnice je $x^2 + y^2 = c$, kde $c$ je kladná konštanta. Hladané krivky sú teda kružnice so stredom v bode $(0,0)$ a lubovoľným polomerom.




Ilustračný príklad 2: Čím je teplejšie v miestnosti, do ktorej vojdem, tým rýchlejšie sa zohrejem.

$T$ - rozdiel teploty v miestnosti a mojej teploty, ktorý sa mení v závislosti od času $t$

$\frac{dT}{dt}$ - ako rýchlo sa zohrievam, ako rýchlo s časom sa mení rozdieľ teploty v miestnosti a mojej teploty

$kT$ - zohrievam sa úmerne teplote v miestnosti

$$\frac{dT}{dt} = kT, \quad \text{resp.} \quad T' = kT$$

**Definícia 8.1: Diferenciálna rovnica** - matematická rovnica, v ktorej ako neznáma vystupuje funkcia (jednej, či viacerých premenných) so svojou deriváciou

**Definícia 8.2:** Klasifikácia diferenciálnych rovníc:

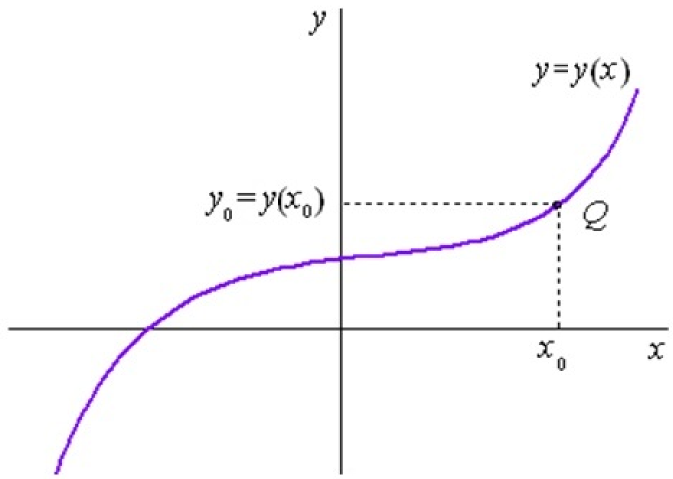
1. podľa druhu
   - **obyčajná diferenciálna rovnica** - rovnica s neznámou funkciou jednej premennej, napr. $y(x)$ - $y$-závislá premenná, $x$-nezávislá premenná
   $$2y'(x) + x^2 y(x) = 0\,, \qquad (x+1)y''(x) + 5y'(x) = \sin x$$
   - **parciálna diferenciálna rovnica** - rovnica s neznámou funkciou viacerých premenných, napr. $z(x,y)$
   $$z'_x(x,y) + z''_{yy}(x,y) = x + y$$
2. podľa tvaru
   - **lineárna diferenciálna rovnica** - v rovnici nie je súčin funkcie a jej derivácie
   $$y'(x) + y(x) = x\,, \qquad 5y''(x) + xy'(x) = 0$$
   - **nelineárna diferenciálna rovnica** - v rovnici je súčin funkcie a jej derivácie
   $$2y'(x).y(x) = 0\,, \qquad y''(x).y(x) = xy(x)$$
3. podľa najväčšieho rádu derivácie
   - **1. rádu** obsahuje deriváciu funkcie najviac 1. rádu
   $$y'(x) + y(x) = x\,, \qquad 2y'(x).y(x) = 0$$
   - **2. rádu** obsahuje deriváciu funkcie najviac 2. rádu
   $$5y''(x) + xy'(x) = 0\,, \qquad y''(x).y(x) = xy(x)$$
   - ***n*-tého rádu** obsahuje deriváciu funkcie najviac $n$-tého rádu
   $$y'''(x) + y''(x) = 0\,, \qquad y^{(n)}(x) + y^{(n-2)}(x) = xy(x)$$

**Definícia 8.3:**

- **riešenie diferenciálnej rovnice** - funkcia $y(x)$, ktorá po dosadení do diferenciálnej rovnice spĺňa túto rovnicu
- **všeobecné riešenie** - množina všetkých riešení diferenciálnej rovnice - obsahuje toľko konštánt, akého rádu je rovnica
- **partikulárne riešenie** - jedno konkrétne riešenie diferenciálnej rovnice, ktoré vznikne zo všeobecného riešenia vhodnou voľbou konštánt
- **singulárne riešenie** - je riešenie, ktoré neobsahuje žiadnu konštantu a nedá sa získat zo všeobecného riešenia
- **integrálna krivka** - graf riešenia diferenciálnej rovnice

- **Cauchyho začiatočné podmienky** - podmienky riešenie rovnice pre hodnotu $x = x_0$ - toľko podmienok, koľko je rád diferenciálnej rovnice

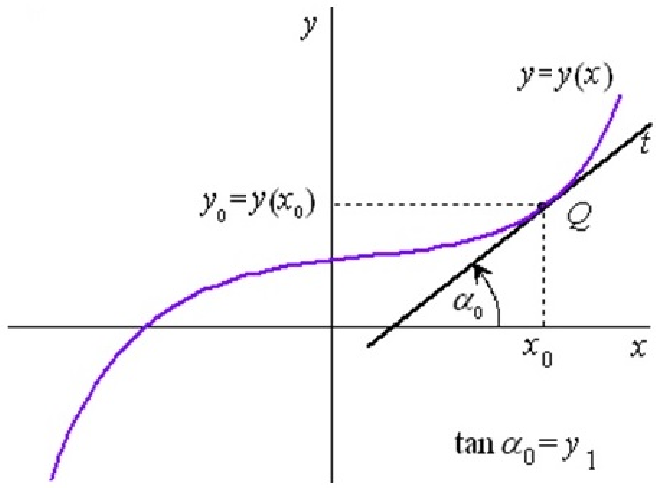
$y(x_0) = y_0$, pre dané hodnoty $x_0$, $y_0$




Geometrická interpretácia Cauchyho začiatočnej podmienky:

- pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu - hľadaná integrálna krivka prechádza bodom $(x_0, y_0)$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ pre dané hodnoty $x_0$, $y_0$, $y_1$




Geometrická interpretácia Cauchyho začiatočnej podmienky:

- pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu - hľadaná integrálna krivka prechádza bodom $(x_0, y_0)$
- pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu - hľadaná integrálna krivka prechádza bodom $(x_0, y_0)$ a má v toto bode dotyčnicu so smernicou $y_1$

**ROVNICE NEOBSAHUJÚCE NEZNÁMU FUNKCIU**

Tvar rovnice je

$$y'(x) = f(x)\,,$$

kde $f(x)$ je funkcia definovaná a spojitá na intervale $(a,b)$.

Riešenie má tvar

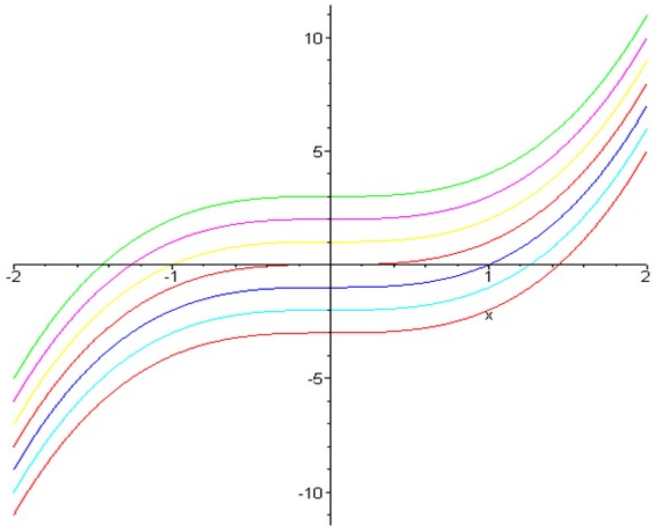
$$y(x) = \int f(x)dx = F(x) + c\,,$$

kde $c$ je ľubovoľná konštanta a $F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$.

Príklad 1: Nájdite riešenia rovnice

$$y' = 3x^2$$

so začiatočnou podmienkou $y(-1) = 0$.
Všeobecné riešenie je $y(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c$. Z Cauchyho podmienky máme $y(-1) = (-1)^3 + c$, teda $0 = -1 + c$, preto $c = 1$ a partikulárne riešenie je $y(x) = x^3 + 1$ (žltá integrálna krivka).




**ROVNICE SO SEPAROVANÝMI A SEPAROVATEĽNÝMI PREMENNÝMI**

Tvar rovnice so **separovanými premennými** je

$$f(x) + g(y)y' = 0\,,$$

kde $f(x)$ je funkcia definovaná a spojitá na intervale $(a,b)$ a $g(y)$ je funkcia definovaná a spojitá na intervale $(c,d)$.

Riešenie má tvar

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c\,, \quad \text{resp.} \qquad \int g(y)dy = -\int f(x)dx$$

kde $c$ je ľubovoľná konštanta. Ak je $g(y) \neq 0$ na intervale $(c,d)$, potom každým bodom množiny $(a,b) \times (c,d)$ prechádza práve jedna integrálna krivka.

Tvar rovnice so **separovateľnými premennými** je

$$f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)y'=0\,,$$

kde $f_1(x)$, $f_2(x)$ sú funkcie definované a spojité na intervale $(a,b)$ a $g_1(y)$, $g_2(y)$ sú funkcie definované a spojité na intervale $(c,d)$.

Ak je $f_2(x)g_1(y)\neq 0$, potom rovica je ekvivalentná s

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}y'=0\,,$$

a riešenie má tvar

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=c\,,$$

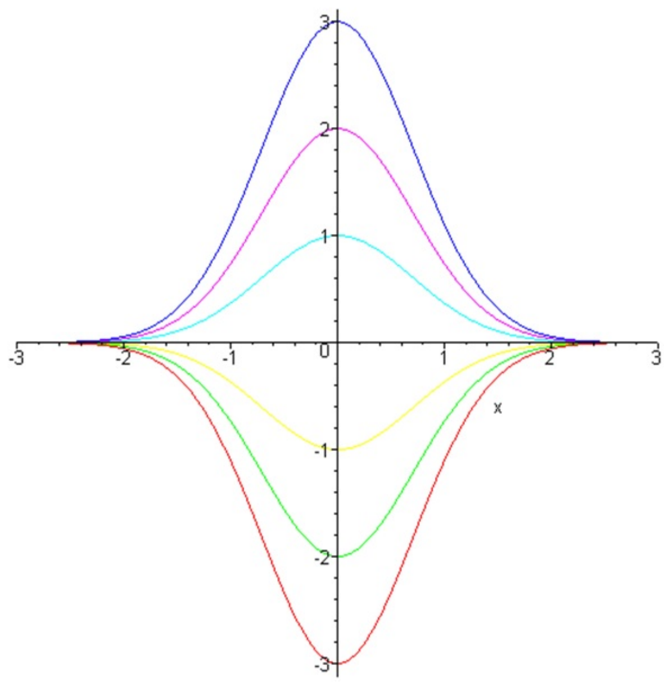
kde $c$ je ľubovoľná konštanta.

Ak je $g_1(y)=0$ pre nejakú konštantu $b$, tak konštantná funkcia $y=b$ je tiež riešením.

Príklad 2: Nájdite riešenia rovnice

$$2x+\frac{y'}{y}=0,$$

ktoré prechádza bodom $(x_0,y_0)=(0,-1)$.
Riešenie hľadáme v tvare $\int 2x dx+\int\frac{1}{y}dy=c$, teda $x^2+\ln|y|=c$. Z Cauchyho začiatočnej podmienky máme $y(0)=-1$, teda $0+\ln|-1|=c$, preto $c=0$ a partikulárne riešenie je $x^2+\ln|y|=0$ a ak uvažujeme $y<0$, tak je možné upraviť výsledok na tvar $y=-e^{-x^2}$ (žltá integrálna krivka).



Príklad 3:

Nájdime všetky riešenia diferenciálnej rovnice

$$xy' = y^2 - y$$

Táto rovnica je rovnica so separovateľnými premennými.
Aby sme to mohli upraviť na rovnicu so separovanými premennými, potrebujeme deliť s funkciami $f_2(x) = x$ a $g_1(y) = y^2 - y$.
Delenie môžeme urobiť len ak $x \neq 0$, preto uvažujeme riešenie na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
Ďalej musíme rozobrať dva prípady pre $g_1$:
1. ak $g_1(y) = y^2 - y = 0$, tak konštantné funkcia $y \equiv 0$ a $y \equiv 1$ sú riešeniami diferenciálnej rovnice
2. ak $g_1(y) = y^2 - y \neq 0$, tak môžeme vydeliť rovnicu s týmto výrazom a riešime rovnicu nasledovne:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int \frac{dx}{x}$$

Po výpočte integrálov dostaneme

$$ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = ln|x| + C_1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y-1}{y}\right| = |x|e^{C_1}$$

Ak označíme $e^{C_1} = C_2$, tak

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = |x|C_2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{y} = \pm C_2 x$$

pre $C_2 > 0$, ale keďže aj $y \equiv 1$ je riešením (čo by sme dostali, ak by $C_2 = 0$), spolu to môžeme písať ako

$$y = \frac{1}{1 + Cx}$$

pre $C \in R$, ale samozrejme nezabudneme ani na riešenie $y \equiv 0$.

## LINEÁRNE DIFERENCIÁLNE RONVICE PRVÉHO RÁDU

Tvar rovnice je

$$y' + f(x)y = g(x),$$

kde $f(x)$ a $g(x)$ sú funkcie definované a spojité na intervale $(a, b)$.
Delíme ich na

- **homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu**, ak $g(x) = 0$
- **nehomogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu**, ak $g(x) \neq 0$.

Riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice, teda $y' + f(x)y = 0$ (nakoľko je to aj rovnica so separovateľnými premennými) má tvar

$$y(x) = ce^{-\int f(x)dx}$$

kde $c$ je ľubovoľná konštanta.

**Vlastnosti homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice**:

- pre danú začiatočnú podmienku existuje práve jedno riešenie
- homogénna lineárna diferenciálna rovnica má vždy riešenie, a to triviálne, teda $y(x) = 0$
- každá integrálna krivka homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice leží buď celá nad osou $x$, alebo celá pod osou $x$, jediná integrálna krivka tejto rovnice, ktorá má bod na osi je $y(x) = 0$

Príklad 4:

Nájdime najprv všeobecné riešenie rovnice

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$$

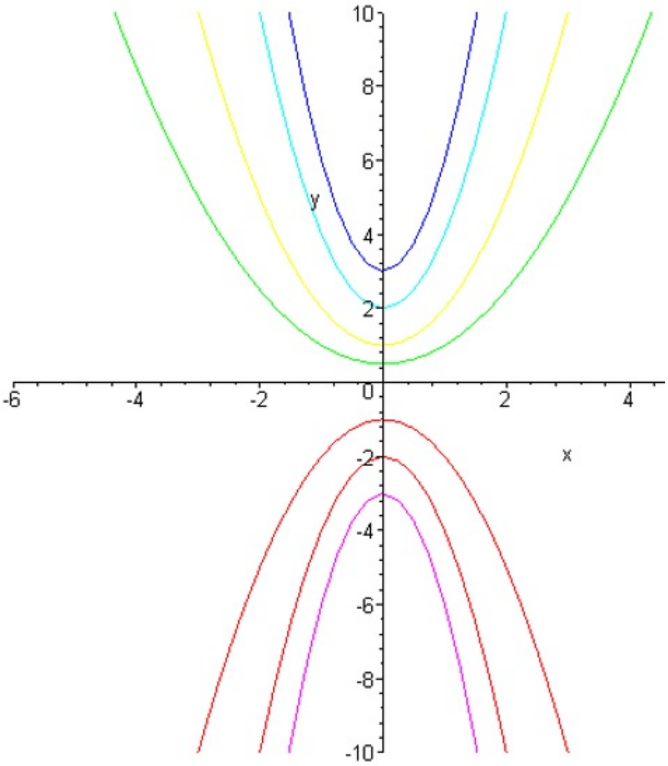
a potom riešenie, ktoré prechádza bodom $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Podľa vzorca všeobecné riešenie je

$$y(x) = Ce^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} =$$

$$= Ce^{ln(1+x^2)} = C(1+x^2)$$

Riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(1) = 2$ je potom $y(x) = 1 + x^2$ (žltá krivka).




Riešenie nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(x) = ce^{-\int f(x)dx} + e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)$$

kde $c$ je ľubovoľná konštanta.

**Vlastnosti nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice**:

- pre danú začiatočnú podmienku existuje práve jedno riešenie
- funkcia, ktorú dostaneme ako rozdiel dvoch riešení nehomogénnej diferenciálnej rovnice, je riešením homogénnej diferenciélnej rovnice
- všeobecné riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice ($y_{VNH}$) je súčtom všeobecného riešenia homogénnej diferenciálnej rovnice ($y_{VH}$) a partikulárneho riešenia nehomonénnej diferenciálnej rovnice ($y_{PNH}$)

- ak $y_1$ je riešenie nehomonénnej rovnice s pravou stranou $g_1(x)$ a $y_2$ je riešenie nehomonénnej rovnice s pravou stranou $g_2(x)$, tak ak $y_1 + y_2$ je riešenie nehomonénnej rovnice s pravou stranou $g_1(x) + g_2(x)$
- metódy na zistenie partikulárneho riešenia nehomogénnej diferenciálnej rovnice:
  - meóda variácie konštánt
  - Eulerova meóda

Príklad 5:

Nájdime riešenie rovnice $y' - \frac{y}{x} = xe^x$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(1) = 5$.

$y_{VH}$:

Rovnica $y' - \frac{y}{x} = 0$ je separovaná, preto:

1. $y \equiv 0$ je riešenie
2. ak $y \neq 0$, tak

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln|y| = ln|x| + c_1 \quad \Rightarrow \quad y = cx$$

kde $c \in R - \{0\}$

Obidve možnosti 1. a 2. sa dajú napísať spolu $y_{VH} = Cx$, kde $C \in R$.

$y_{PNH}$:

Metóda variácie konštánt:

To vlastne znamená, že namiesto konštanty $C$ v $y_{VH}$ uvažujeme o funkcii $C(x)$, ktorú dourčíme z toho, že $y_{PNH} = C(x)x$ je, ako aj názov hovorí, partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice.

$y'_{PNH} = C'(x)x + C(x)$

Dosadením do danej diferenciálnej rovnice získame

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = xe^x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad C(x) = e^x$$

preto $y_{PNH} = e^x x$ a všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice je $y_{VNH} = Cx + xe^x$.

Eulerova metóda:

Pri tejto metóde nepotrebujeme zisťovať osobitne $y_{VH}$. Táto metóda spočíva v tom, že ak rovnicu $y' + p(x)y = q(x)$ vynásobím výrazom $e^{\int p(x)dx}$, na ľavej strane diferenciálnej rovnice dostaneme deriváciu $\left(ye^{\int p(x)dx}\right)'$. Stačí potom celú rovnicu (ľavú aj pravú stranu) zintegrovať.

Čo v našom prípade znamená, že násobíme výrazom

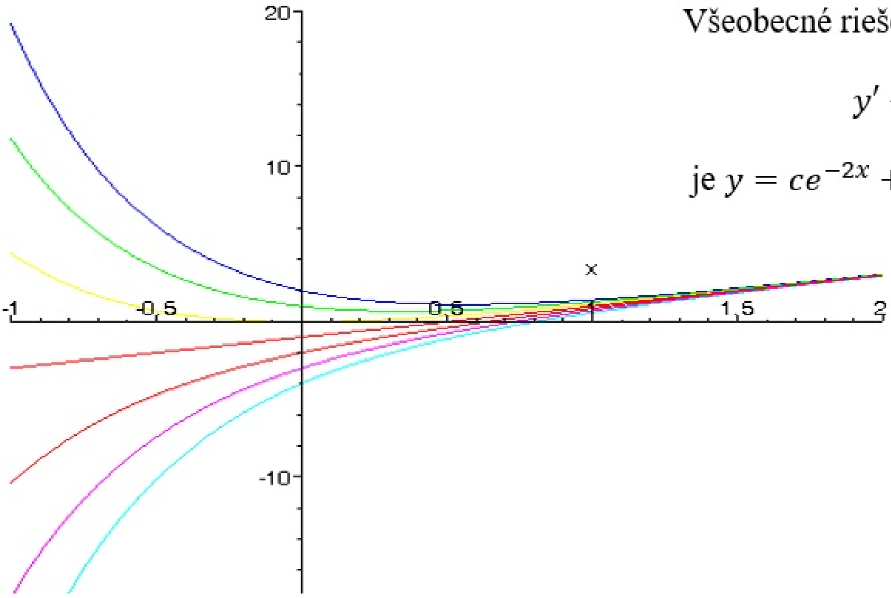
$$e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-ln|x|} = \frac{1}{x}$$

a dostaneme

$$\left(y\frac{1}{x}\right)' = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = e^x + C \Rightarrow \quad y = xe^x + Cx.$$

Riešenie začiatočnej podmienky je potom $y = (5 - e)x + xe^x$.

Príklad 6:




Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' + 2y = 4x$$

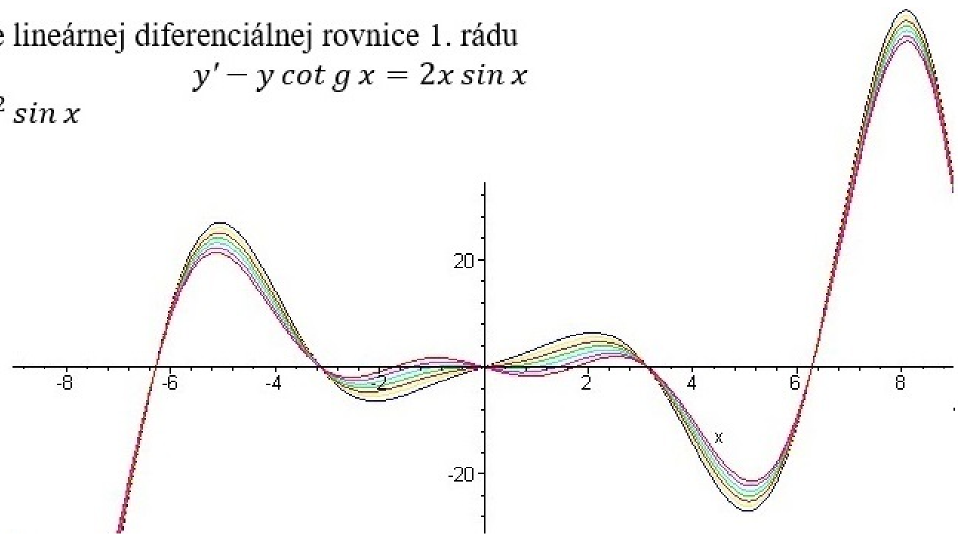
je $y = ce^{-2x} + 2x - 1$

Príklad 7:

Všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 1. rádu

$$y' - y\,cot\,g\,x = 2x\,sin\,x$$

je $y = c\,sin\,x + x^2\,sin\,x$



**LINEÁRNE DIFERENCIÁLNE RONVICE DRUHÉHO RÁDU S KONŠTANTNÝMI KOEFICIENTMI**

Tvar rovnice je

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\,,$$

kde $a_0$, $a_1$, $a_2$ sú dané čísla.

Riešenia hľadáme v tvare

$$y = e^{\lambda x}\,,$$

kde $\lambda$ je číslo, ktoré rieši kvadratickú rovnicu

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0\,,$$

tzv. **charakteristickú rovnicu**.

Môžu nastať nasledujúce prípady:

a) $\lambda_1$, $\lambda_2$ sú 2 rôzne reálne korene,

b) $\lambda_1 = \lambda_2$ je dvojnásobný reálny koreň,

c) $\lambda_1$, $\lambda_2$ sú komplexné korene, pričom sú navzájom komplexne združené, tj. $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$.

V závislosti od týchto možnosti diferenciálna rovnica má nasledovné riešenia:

a) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = e^{\lambda_2 x}$,

b) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$,

c) $y_1 = e^{(a+ib)x}$ a $y_2 = e^{(a-ib)x}$.

Všeobecné riešenie potom je v tvare lineárnej kombinácie týchto 2 riešení, teda $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$:

a)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}\,,$$

b)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}\,,$$

c)

$$y = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x}\,,$$

pričom ak napíšeme komplexnú funkciu $e^{ax} e^{\pm ibx}$ v goniometrickom tvare $e^{ax}(\cos(bx) \pm i \sin(bx))$, a pre tieto uvažujeme lineárnu kombináciu, tak získame

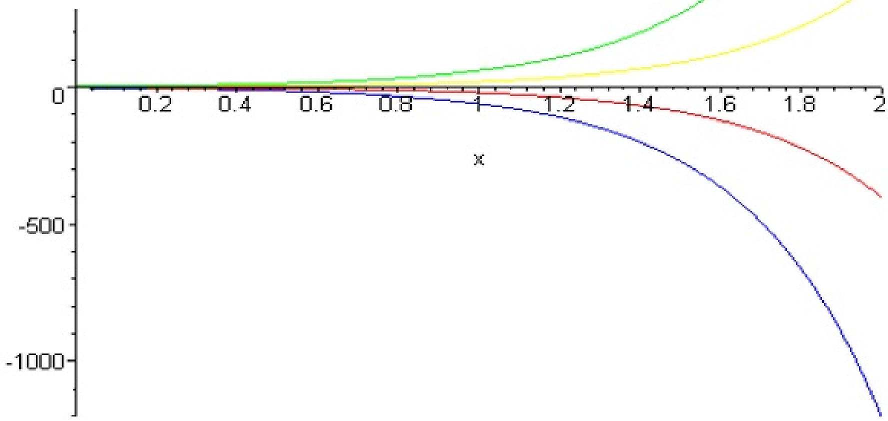
$$y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)\,.$$

Príklad 8:

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' - y' - 6y = 0$$

je $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$
Grafom všeobecného riešenia je sústava exponenciálnych kriviek pre $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, grafom partikulárneho riešenia $y = 0$ pre $c_1 = c_2 = 0$ je priamka, súradnicová os $x$.



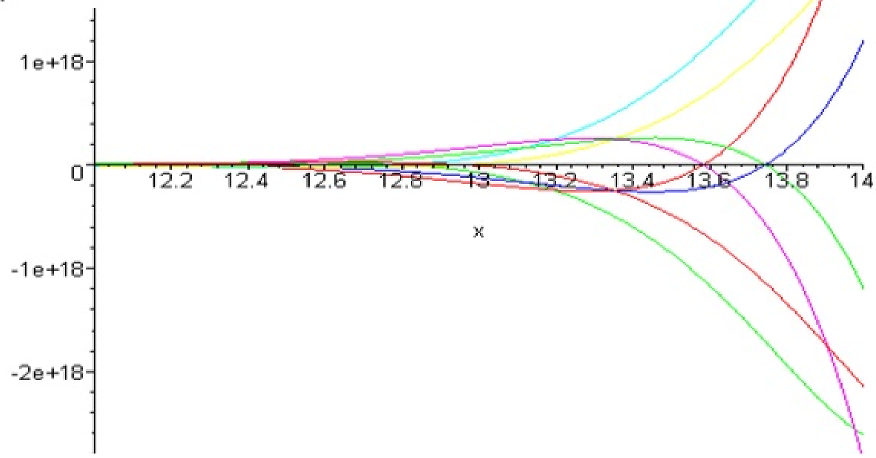

Príklad 9:
Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$ je $y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$.

Príklad 10:

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

je $y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ .



Príklad 11:

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + 4y = 0$$

je $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočné podmienky $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$ dostaneme po dosadení $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Hľadané partikulárne riešenie je funkcia $y = \cos 2x$ (červená krivka) .