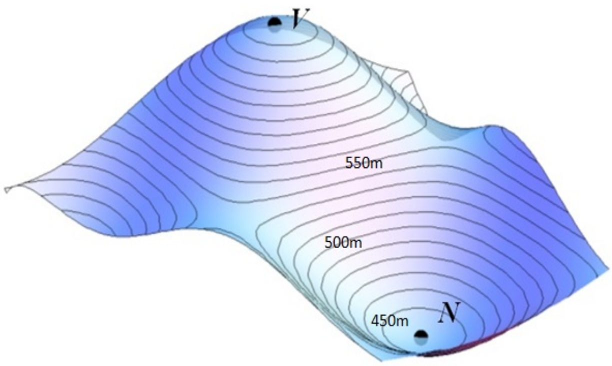
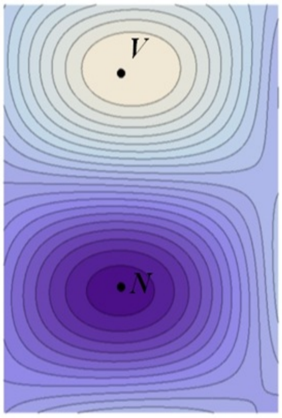
# 7. Funkcie dvoch premenných

## Základné pojmy

**Definícia 7.1:** Nech $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ označuje množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel a nech $M\subset\mathbb{R}^2$.

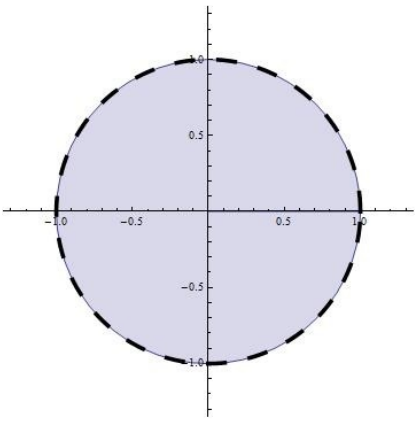
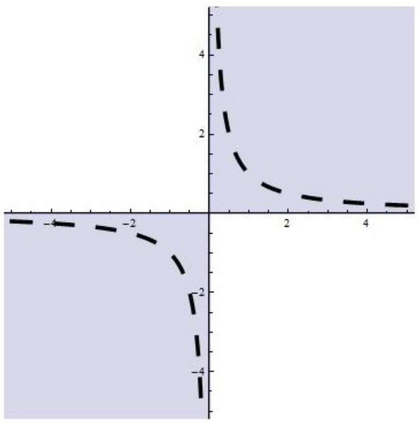
- **Funkcia $f$ dvoch premenných**: priradenie $f: M\to\mathbb{R}$, ktoré každej dvojici reálnych čísel $(x,y)\in M$ priradí práve jedno reálne číslo $z=f(x,y)$.
- **Definičný obor funkcie** $f$ (ozn. $D_f$): najväčšia podmnožina $D_f\subset\mathbb{R}^2$, pre ktorú je priradenie $(x,y)\mapsto z=f(x,y)$ korektne matematicky definované.
- **Vrstevnica funkcie $f$ prislúchajúca výške $c$**: množina bodov $(x,y)$ v rovine, v ktorých má funkcia $z=f(x,y)$ konštantnú hodnotu, t.j. $z=c$, pre niektoré reálne číslo $c$ .






Príklad: Nájdime a znázornime definičný obor funkcie

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \text{a} \qquad g(x,y)=\frac{1}{4-\sqrt{xy}}.$$

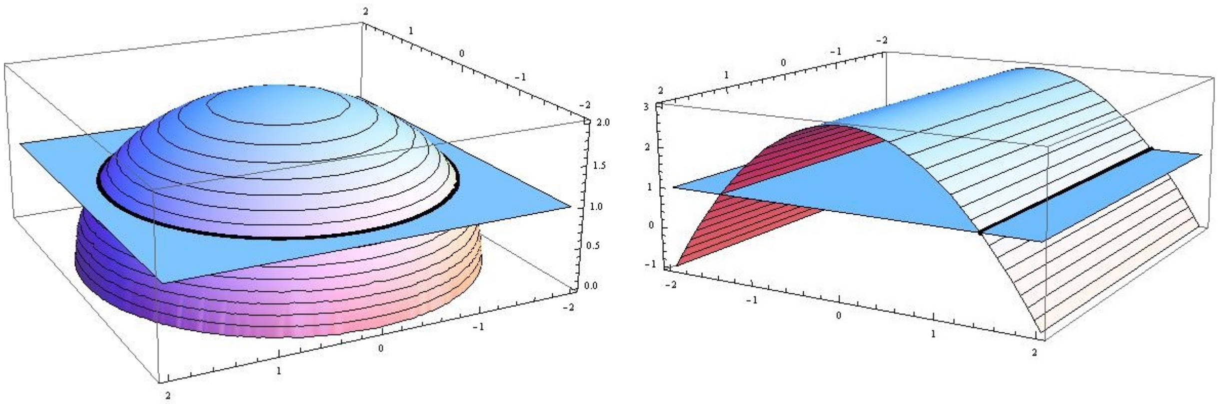
Riešenie:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 > 0\} \quad \text{teda} \quad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0 \text{ a } \sqrt{xy} \neq 4\} \quad \text{teda} \quad D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0 \text{ a } xy \neq 16\}.$$

Príklad: Zistime a nakreslime niekoľko vrtevníc funkcie

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \qquad \text{a} \qquad g(x,y) = 3 - y^2.$$



Riešenie: Rovnica

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = c$$

má riešenie len pre $0 \leq c \leq 2$. Ak $c = 2$, tak riešenie rovnice $x^2 + y^2 = 0$ je bod $(x,y) = (0,0)$ a preto vrstevnica je bod v priestore $(x,y,z) = (0,0,2)$. Ak $0 \leq c < 2$, tak vrstevnica je kružnica $x^2 + y^2 = 4 - c^2$.

Rovnica

$$3 - y^2 = c$$

má riešenie len pre $c \leq 3$. Ak $c = 3$, tak riešením rovnice $3 - y^2 = 3$ sú body $(x,0)$, ktoré tvoria jednu priamku v rovine $z = 3$. Ak $c < 3$, tak vrstevnica je dvojica rovnobežných priamok

$$y = \sqrt{3 - c} \qquad \text{a} \qquad y = -\sqrt{3 - c}$$

v rovine $z = c$.

## Cvičenia

**1.** Zistite a znázornite definičné obory nasledujúcich funkcií:

a) $f(x,y) = xy - \cos(x+y)$ b) $g(x,y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$
c) $h(x,y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$ d) $k(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
e) $l(r,t) = \ln(r\cos t)$ f) $m(u,v) = \log_{19}(36 - 9u^2 - 4v^2)$
g) $p(a,b) = \arccos(4a^2 + 9b^2)$ h) $q(a,b) = 1/\sqrt{1 - ab}$
i) $r(x,y) = \arcsin(2x + y)$ j) $s(x,y) = \sqrt{\cos(\pi(x^2 + y^2))}$

**3.** Pomocou znázornenia niekoľkých vrstevníc sa pokúste načrtnúť grafy nasledujúcich funkcií:

a) $f(x,y) = 2x - y + 2$ b) $g(x,y) = 2 - x - y$
c) $h(x,y) = x^2 + y^2$ d) $k(x,y) = x^2 + 4y^2$
e) $l(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ f) $m(x,y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$
g) $p(r,s) = e^{-(r^2+s^2)}$ h) $q(r,s) = 2s/(r^2 + s^2)$
i) $r(u,v) = 2v/(u^2 + v^2)$ j) $s(u,v) = u^2 - v^2$

## Výsledky

**1.**

a) $\mathbb{R}^2$; celá rovina

b) $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 7^2\}$; kruh so stredom v počiatku a polomerom 7.

c) $\{(x,y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$; medzikružie ohraničené kružnicami so stredom v počiatku a polomermi 1 a $\sqrt{3}$.

d) $\{(x,y); |x| \geq |y|\}$; časť roviny ohraničená priamkami $y = x$ a $y = -x$ a obsahujúca os $x$.

e) $\{(r,t); [r > 0\ a\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < t < \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ alebo $[r < 0\ a\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < t < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]\}$; sústava "striedajúcich"sa pásov v rovine.

f) $\{(u,v); u^2/4 + v^2/9 < 1\}$;vnútro elipsy s poloosami 2 a 3.

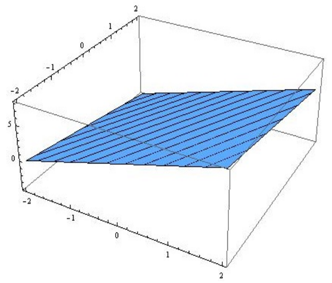
g) $\{(a,b); 4a^2 + 9b^2 \leq 1\}$; elipsa s poloosami 1/2 a 1/3.

h) $\{(a,b); ab < 1\}$;časť roviny ohraničená vetvami hyperboly $b = 1/a$ a obsahujúca bod (0,0).

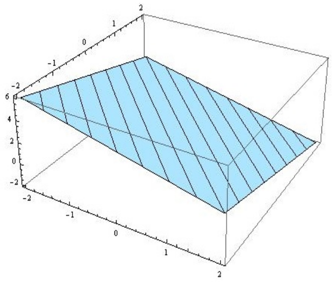
i) $\{(x,y); -1 \leq 2x + y \leq 1\}$;pás ohraničený priamkami $y = -1 - 2x$ a $y = 1 - 2x$ obsahujúci bod (0,0).

j) $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ spolu s $\{(x,y); -\frac{1}{2} + 2k \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} + 2k\}$ pre $k \geq 1$; sústava koncentrických medzikruží.

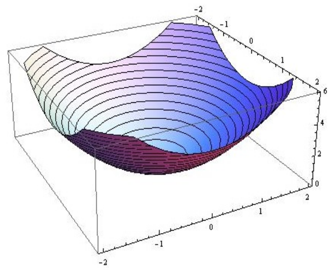
**3.** Riešenia sú na obrázkoch 4.10 až 4.19.



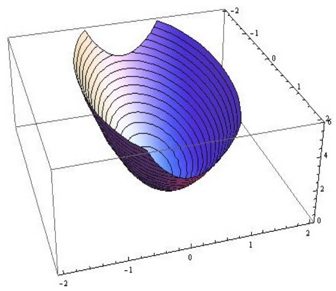
Obr. 4.10: $f(x,y) = 2x - y + 2$



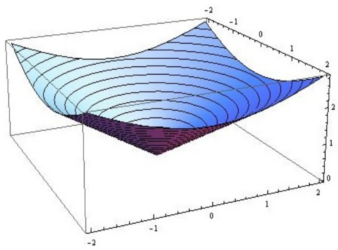
Obr. 4.11: $g(x,y) = 2 - x - y$



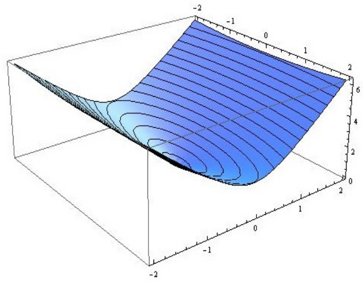
Obr. 4.12: $h(x,y) = x^2 + y^2$



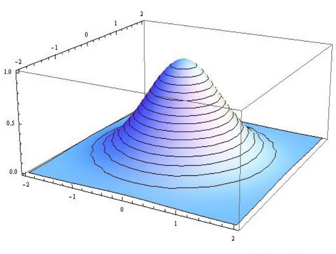
Obr. 4.13: $k(x,y) = x^2 + 4y^2$



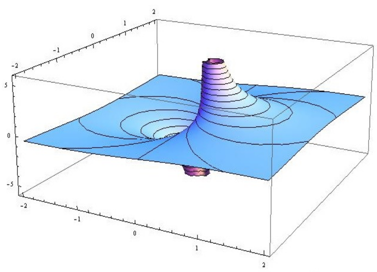
Obr. 4.14: $l(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



Obr. 4.15: $m(x,y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$

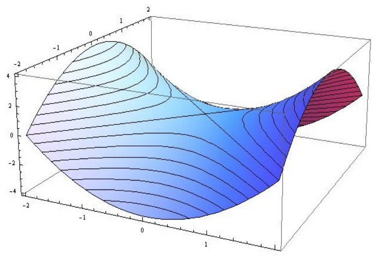


Obr. 4.16: $p(r,s) = e^{-(r^2+s^2)}$



Obr. 4.17: $q(r,s) = 2s/(r^2 + s^2)$

$r(u,v) = 2v/(u^2 + v^2)$



Obr. 4.19: $s(u,v) = u^2 - v^2$

# Parciálne derivácie

**Definícia 7.2:** Nech funkcia $z = f(x,y)$ je definovaná a spojitá na nejakom okolí bodu $(x_0, y_0)$.

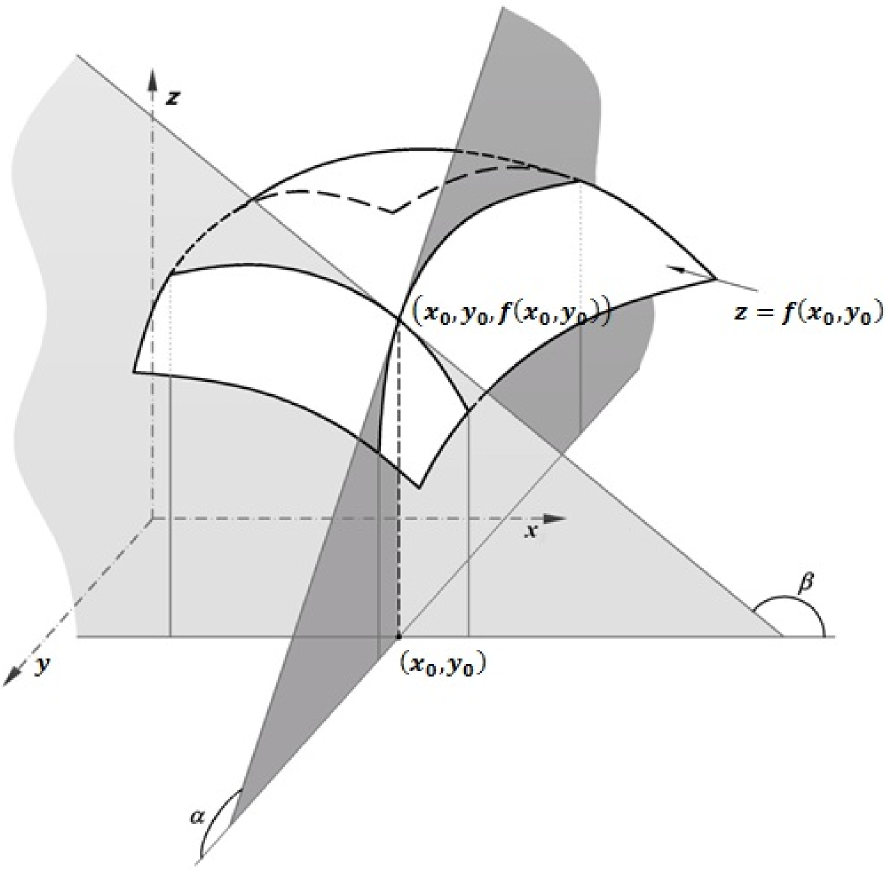
- **Parciálna derivácia funkcie $f$ v bode $(x_0,y_0)$ vzhľadom na premennú $x$** (ozn. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ alebo $f'_x(x_0,y_0)$):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

- **Parciálna derivácia funkcie $f$ v bode $(x_0,y_0)$ vzhľadom na premennú $y$** (ozn. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

alebo $f'_y(x_0,y_0)$):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$




Pravidlo počítania parciálnej derivácie podľa niektorej premennej:

- Všetky ostatné premenné sa pre účely derivovania považujú za konštanty.

**Definícia 7.3:**

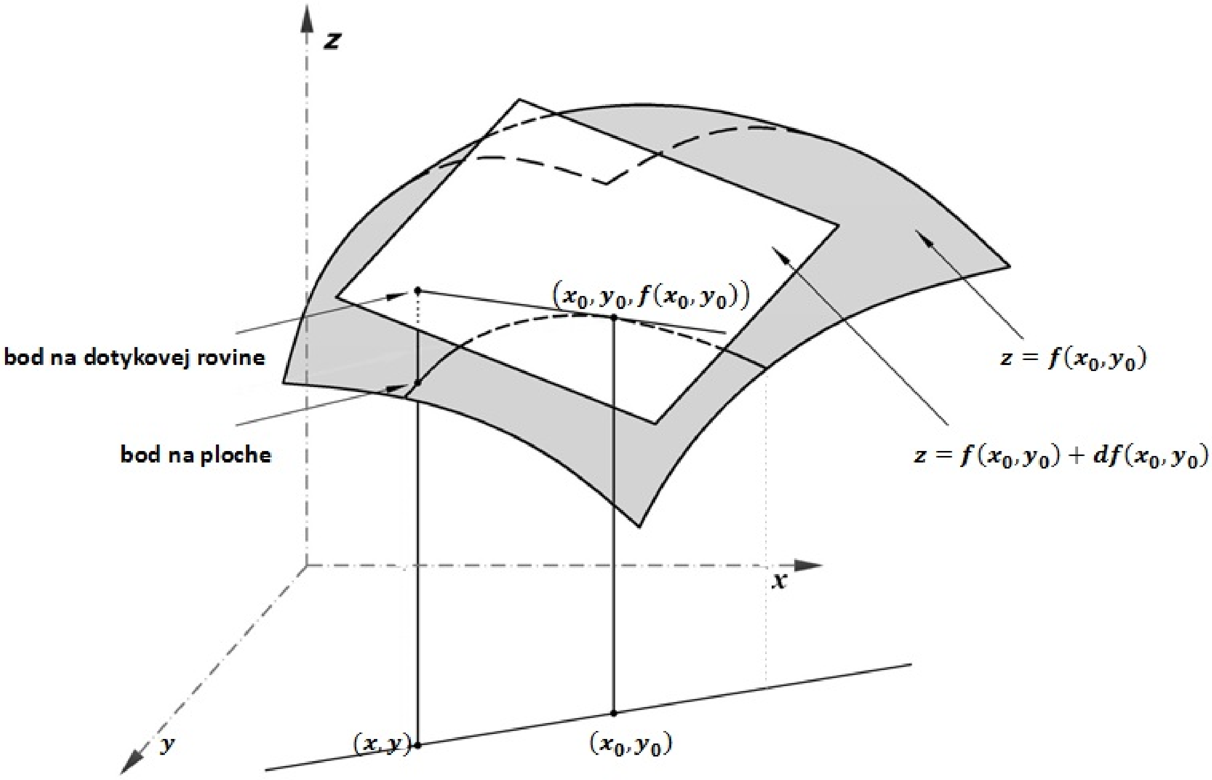
- **Dotyková rovina funkcie $f$ v bode** $(x_0,y_0)$**:** rovina $z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$

**Vlastnosti parciálnych derivácií a diferencovateľných funkcií:**

- **VPD1:** $f'_x(x_0,y_0) = \mathrm{tg}\beta$, $f'_y(x_0,y_0) = \mathrm{tg}\alpha$
- **VPD2:** Pre body $(x,y)$, ktoré sú "blízke" k bodu $(x_0,y_0)$ (t.j. $(x,y)\to(x_0,y_0)$), môžeme funkčnú hodnotu $f(x,y)$ aproximovať nasledovne:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

, tj. dotyková rovina funkcie $f$ v bode $(x_0,y_0)$ aproximuje funkciu $f$ v malom okolí bodu $(x_0,y_0)$.




**Definícia 7.4:**

- **Parciálne derivácie druhého rádu funkcie $f$:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

# Cvičenia

**6.** Vypočítajte všetky prvé parciálne derivácie:

a) $f(x,y) = (\sin^2 x - 3\cos^2 y)^{19}$ b) $g(x,y) = \sqrt{x(3y^3 - x^2)}$

c) $h(x,y) = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$ d) $k(x,y) = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$

e) $l(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ f) $m(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

g) $p(r,s,t) = \ln(\mathrm{tg}(r) - \sqrt{s^2+t^2})$ h) $q(r,s,t) = \sqrt{s\cos t + r\sin t}$

i) $r(x,y,z) = (x+y)^{x+z}$ j) $s(x,y,z) = (2x+3z)^{\sqrt{yz}}$

**10.** Ukážte, že každá z nasledujúcich funkcií spĺňa Laplaceovu rovnicu $f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = 0$:

a) $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2$ b) $f(x,y,z) = 3x(y^2+z^2) - 2x^3$

c) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ d) $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos 5z$

**11.** Ukážte, že pre ľubovoľné konštanty $a,b$ funkcia

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

spĺňa tzv.rovnicu pre šírenie tepla $u''_{xx} = \frac{1}{a^2} u'_t$

**15.** Zistite dotykové roviny ku daným plochám v daných bodoch $B$:

a) $z = x^2 + y^2$ , $B = (1,-2,5)$

b) $z^2 = x^2 + y^2$ , $B = (-3,4,5)$

e) $z = 4\arctan\sqrt{xy}$ , $B = (1,1,\pi)$

f) $z = e^{-(x^2+y^2)/25}$ , $B = (4,3,e^{-1})$

## Výsledky

**6.**

a) $f_x = 19(\sin^2 x - 3\cos^2 y)^{18}\sin 2x;\quad f_y = 57(\sin^2 x - 3\cos^2 y)^{18}\sin 2y.$

b) $g_x = \frac{3}{2}\frac{y^3-x^2}{\sqrt{x(3y^3-x^2)}};\quad g_y = \frac{9y^2}{2}\sqrt{\frac{x}{3y^3-x^2}}.$

c) $h_x = 1/(1+x^2);\quad h_y = -1/(1+y^2).$

d) $k_x = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2-y^2}};\quad k_y = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}\sqrt{x^2-y^2}}.$

e) $l_x = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2};\quad l_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z};\quad l_z = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}.$

f) $m_x = -\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3};$ ďalej symetricky.

g) $p_r = [(\mathrm{tg}(r) - \sqrt{s^2+t^2})\cos^2 r]^{-1};\quad p_t = -s[\sqrt{s^2+t^2}\mathrm{tg}(r) - s^2 - t^2]^{-1};$ atď.

h) $q_r = \frac{\sin t}{2\sqrt{s\cos t + r\sin t}};\quad q_s = \frac{\cos t}{2\sqrt{s\cos t + r\sin t}};\quad q_t = \frac{-s\sin t + r\cos t}{2\sqrt{s\cos t + r\sin t}}.$

i) $r_x = (x+y)^{x+z}[\ln(x+y) + \frac{x+z}{x+y}];\quad r_y = (x+y)^{x+z}\frac{x+z}{x+y};$

$r_z = (x+y)^{x+z}\ln(x+y).$

j) $s_x = 2\sqrt{yz}(2x+3z)^{\sqrt{yz}-1};\quad s_y = \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{y}}(2x+3z)^{\sqrt{yz}}\ln(2x+3z);$

$s_z = (2x+3z)^{\sqrt{yz}}[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}\ln(2x+3z) + \frac{3\sqrt{yz}}{2x+3y}].$

**15.**

a) $2x - 4y - z - 5 = 0$ .

b) $3x - 4y + 5z = 0$ .

e) $x + y - z + (\pi - 2) = 0$ .

f) $8x + 6y + 25ez - 75 = 0$ .

# Extrémy funkcií dvoch premenných

## Lokálne extrémy

**Definícia 7.5:** Nech funkcia $z = f(x,y)$ je definovaná na množine $D_f$.

- **Funkcia $f$ má v bode** $(x_0, y_0) \in D_f$ **lokálne maximum**: ak existuje okolie $O_\delta(x_0, y_0)$ bodu $(x_0, y_0)$ také, že
$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$$
pre každý bod $(x,y) \in O_\delta(x_0,y_0) \cap D_f$

- **Funkcia $f$ má v bode** $(x_0, y_0) \in D_f$ **lokálne minimum**: ak existuje okolie $O_\delta(x_0, y_0)$ bodu $(x_0, y_0)$ také, že
$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$$
pre každý bod $(x,y) \in O_\delta(x_0,y_0) \cap D_f$

- **Lokálne extrémy**: lokálne minimá a lokálne maximá

**Vlastnosti lokálneho extrému:**

- **VLE1:** Ak funkcia $f$ má v bode $(x_0, y_0)$ lokálny extrém, tak dotyková rovina v tomto bode bude rovnobežná so súradnicovou rovinou $xy$.

- **VLE2:** Ak funkcia $f$ má v bode $(x_0, y_0)$ lokálny extrém, tak
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,.$$

**Definícia 7.6:**

- **Stacionárny bod funkcie $f$**: bod $(x_0, y_0) \in D_f$, pre ktorý platí vlastnosť VLE2, t.j.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Stacionárne body sú teda body, v ktorých funkcia môže (!!nemusí!!) mať extrém, t.j. sú "kandidátmi" na existenciu lokálneho extrému.

**Definícia 7.7:**

- **Hessova matica funkcie $f$ v bode** $(x_0, y_0)$ (ozn. $H_f(x_0, y_0)$):

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}, \quad D = \det H_f(x_0,y_0).$$

**Postup pre zistenie existencie lokálneho extrému v stacionárnom bode:**
Nech $(x_0, y_0)$ je stacionárny bod funkcie $f$. Potom platí, že

- ak $D > 0$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, tak v bode $(x_0, y_0)$ má funkcia $f$ lokálne minimum,
- ak $D > 0$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, tak v bode $(x_0, y_0)$ má funkcia $f$ lokálne mmaximum,
- ak $D < 0$, tak v bode $(x_0, y_0)$ funkcia $f$ nemá extrém - tzv. **sedlový bod** .

<u>Príklad:</u> Nájdime všetky lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = 6x^4 + 3y^4 - 3x^2 - 6y^2 + \dfrac{7}{2}$.

<u>Riešenie:</u>
Stacionárne body, t.j. riešenie systému rovníc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^3 - 6x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 - 12y = 0,$$

sú body

$$A = (0,0), \quad B = (0,1), \quad C = (0,-1), \quad D = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad E = \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$
$$F = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad G = \left(-\frac{1}{2}, -1\right), \quad H = \left(\frac{1}{2}, -1\right), \quad I = \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

Hessova matica v ľubovoľnom bode $(x, y)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 72x^2 - 6 & 0 \\ 0 & 36y^2 - 12 \end{pmatrix}.$$

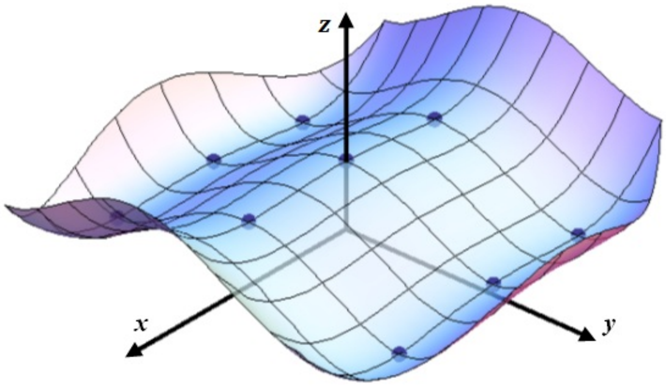
Pre bod $A = (0,0)$ dostaneme

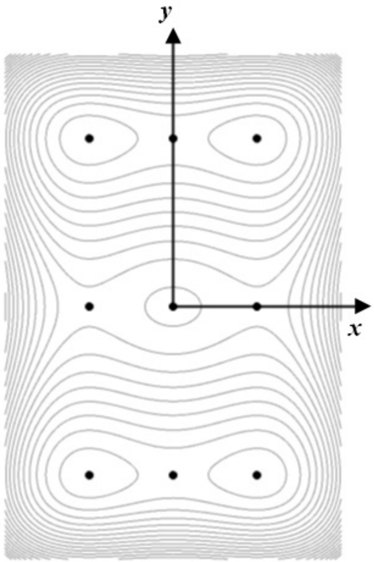
$$H_f(A) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, \qquad \text{teda} \quad D = 72 > 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$$

preto má funkcia $f$ v tomto bode lokálne maximum.

V bodoch $B = (0,1)$ a $C = (0,-1)$ dostaneme

$$H_f(B) = H_f(C) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}, \qquad \text{teda} \quad D = -144 < 0$$




preto funkcia v týchto bodoch lokálny extrém nenadobúda, je tam sedlový bod.

V bodoch $D = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $E = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ dostaneme

$$H_f(D) = H_f(E) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, \qquad \text{teda} \quad D = -144 < 0$$

preto funkcia v týchto bodoch lokálny extrém nenadobúda, je tam sedlový bod .

V bodoch $F = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $G = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, $H = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $I = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ dostaneme

$$H_f = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}, \qquad \text{teda} \quad D = 288 > 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \text{v týchto bodoch},$$

preto má funkcia $f$ v týchto bodoch lokálne minimum.

## Viazané extrémy

**Definícia 7.8:**

- **Viazaný extrém funkcie** $f$ : extrém funkcie $f$ na množine $N$, ktorá je daná vzťahom $g(x,y) = 0$, tzv. **väzbou**

**Metódy hľadania viazaného extrému:**

**1.** Z väzby možno vyjadriť jednu premennú.

Teda $x = m(y)$ alebo $y = k(x)$. Ak dosadíme vyjadrenú premennú do funkcie $z = f(x,y)$, tak zredukujeme počet premenných na jednu a riešime úlohu lokálneho extrému funkcie jednej premennej.

**2.** Z väzby nemožno vyjadriť žiadnu premennú.

Definujeme tzv. **Lagrangeovu funkciu**

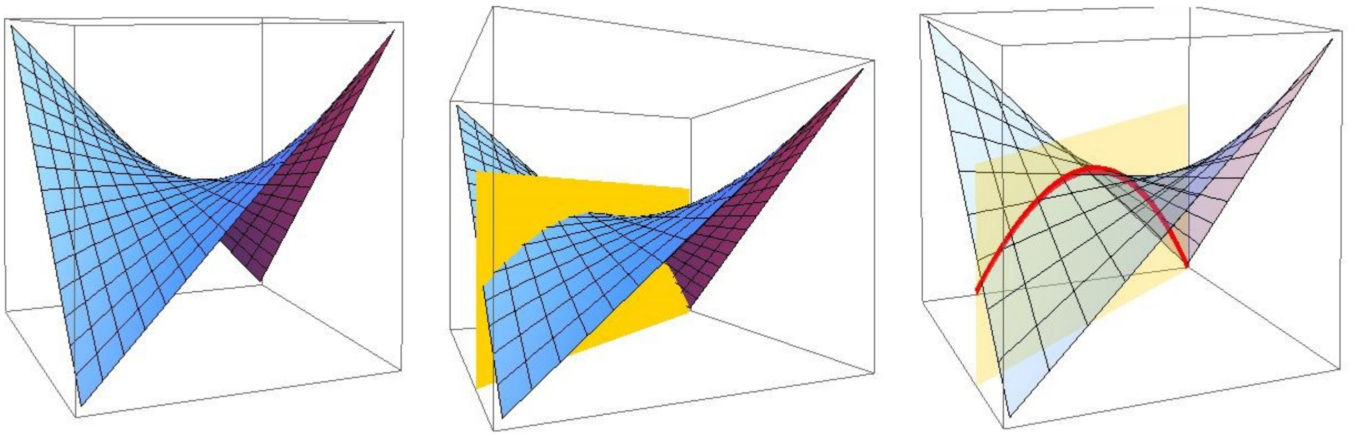
$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

s parametrom $\lambda$ a budeme hľadať lokálne extrémy tejto novej funkcie.
Ak bod $(x_0,y_0)\in N$, s určitým parametrom $\lambda$, je stacionárnym bodom funkcie $L(x,y)$ ,t.j.

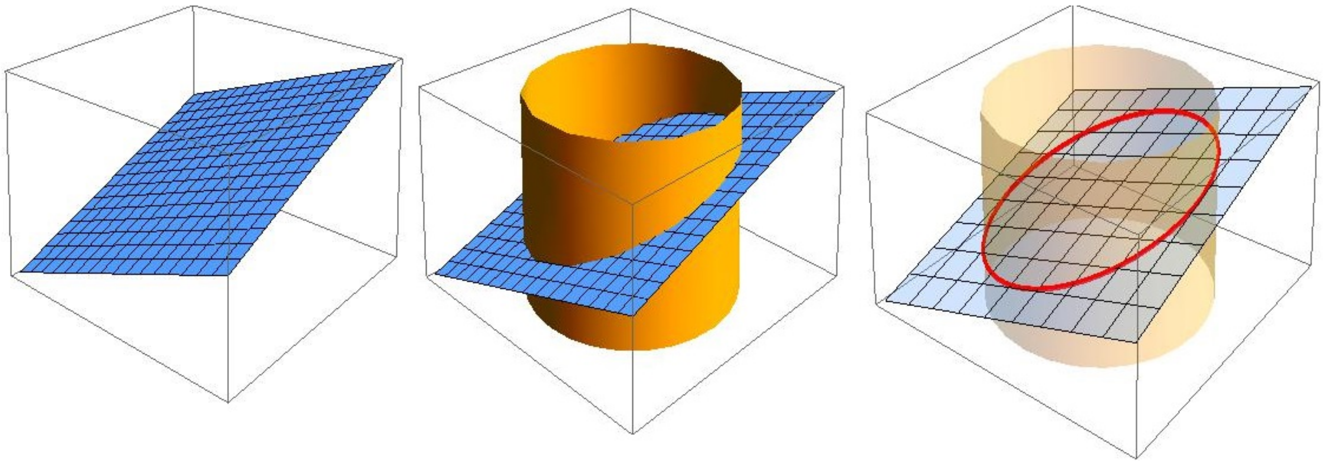
$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$$

pre $(x_0,y_0)\in N$, ($g(x_0,y_0) = 0$ ,) tak je stacionárnym bodom aj pre pôvodnú funkciu $f$.
Ak funkcia $L(x,y)$ má v stacionárnom bode lokálne minimum alebo lokálne maximum, tak má v tomto bode pôvodná funkcia $f$ viazané lokálne minimum, resp. viazané lokálne maximum.
!!Ak má Lagrangeova funkcia v stacionárnom bode sedlový bod, tak o charaktere tohto bodu pre funkcie $f$ neviem nič povedať!!

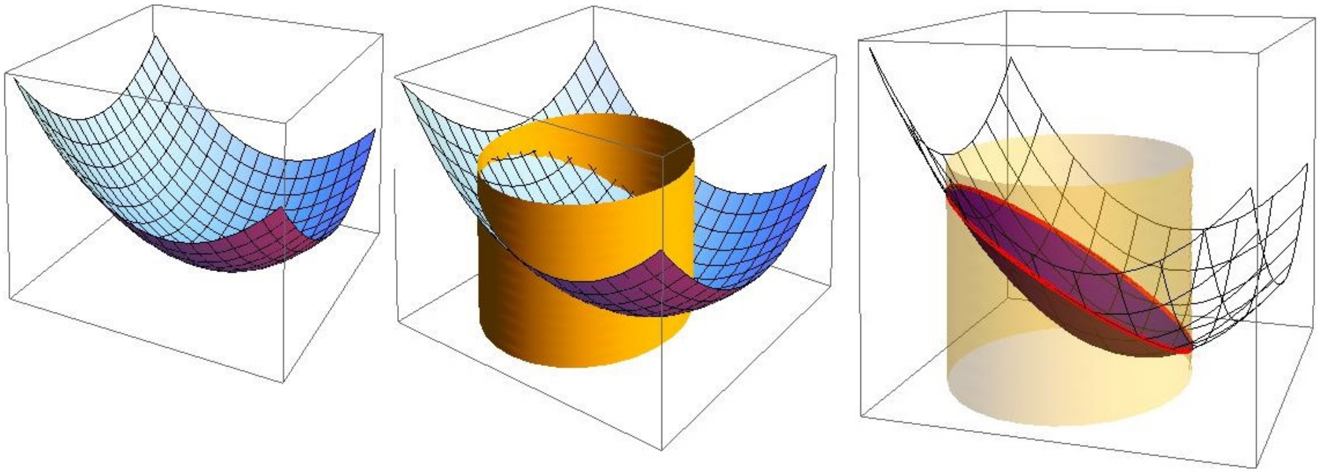
<u>Príklad:</u> Nájdime viazané extrémy funkcie $f(x,y) = xy$ s väzbou $x+y+2=0$.



<u>Príklad:</u> Nájdime viazané extrémy funkcie $f(x,y) = x+y$ s väzbou $x^2+y^2-1=0$.



Príklad: Nájdime extrémy funkcie $f(x,y) = 2 + (x-2)^2 + (y-1)^2$ na množine $x^2 + y^2 \leq 12$.



## Cvičenia

**16.** Určte stacionárne body, lokálne extrémy a sedlové body grafov nasledujúcich funkcií:

a) $f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y + 5$
b) $g(x,y) = x^2 + xy + 7x - y^2 + 11y - 8$
c) $h(u,v) = uv - u^2 - v^2 - 6u$
d) $k(u,v) = 5 + 2u + uv + v^2 + 3v$
e) $l(a,b) = 2a^2 + 3ab + 4b^2 - 5a + 2b$
f) $m(a,b) = 4a + 19 - a^2 - ab - b^2 - b$
g) $p(r,s) = r^2 - 2rs + s^2 + 4r - 4s + 4$
h) $q(r,s) = r^2 - 2s^2 - 3r + 5s - 19$
i) $u(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y - 6$
j) $v(x,y) = xy + 8y - 2x^2 - 3y^2 - 9x - 66$

**18.** Lagrangeovou metódou určte najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $z = f(x,y)$ na krivke $g(x,y) = 0$, ak:

a) $f(x,y) = xy + x - y + 5$ na krivke $x + y = 1$
b) $f(x,y) = 15x^{2/3}y^{1/3}$ na krivke $x + y = c\,, \quad c > 0$
c) $f(x,y) = y^2 - x$ na krivke $x^2 + y^2 = 1$
d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ na krivke $x^2 + y^2 = 9$
e) $f(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2$ na krivke $x^2 + y^2 = 25$
f) $f(x,y) = x + y$ na krivke $xy = 36\,, \quad x,y > 0$
g) $f(x,y) = xy$ na krivke $x + y = 10$
h) $f(x,y) = x^2 + y^2$ na krivke $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$

## Výsledky

**16.**

a) Stacionárny bod (3,2), v ktorom má funkcia lokálne minimum.

b) Stacionárny bod (-5,3), v ktorom má funkcia sedlový bod.

c) Stacionárny bod (-4,-2), v ktorom má funkcia lokálne maximum.

d) Stacionárny bod (1,-2), v ktorom má funkcia sedlový.

e) Stacionárny bod (2,-1), v ktorom má funkcia lokálne minimum.

f) Stacionárny bod (3,-2), v ktorom má funkcia lokálne maximum.

g) Nekonečne mnoho stacionárnych bodov tvaru (r,r+2). Keďže D = 0, nemožno záver urobiť podľa D-testu. Avšak ľahkou úpravou vidíme, že $p(r,s) = (r-s+2)^2$, a teda v každom z uvedených stacionárnych bodov nadobúda naša funkcia lokálne minimum.

h) Stacionárny bod (3/2,5/4), v ktorom má funkcia sedlový bod.

i) Stacionárny bod (3,-3), v ktorom má funkcia lokálne minimum.

j) Stacionárny bod (-2,1), v ktorom má funkcia lokálne maximum.

**18.**

a) Najväčšia hodnota $\frac{25}{4}$ v bode ($\frac{3}{2}$,-$\frac{1}{2}$);najmenšia hodnota neexistuje.

b) Najväčšia hodnota $5c.4^{\frac{1}{3}}$ v bode ($\frac{2c}{3}$, $\frac{c}{3}$);najmenšia hodnota neexistuje.

c) Najväčšia hodnota $\frac{5}{4}$ v bodoch $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; najmenšia hodnota -1 v bode (1,0).

d) Najväčšia hodnota 9 v bodoch (-3,0) a (3,0); najmenšia hodnota -9 v bodoch (0,-3) a (0,3).

e) Najväčšia hodnota 125 v bodoch $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ a $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$; najmenšia hodnota 0 v bodoch $(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ a $(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

f) Najmenšia hodnota 12 v bode (6,6); najväčšia hodnota neexistuje.

g) Najväčšia hodnota 25 v bode (5,5); najmenšia hodnota neexistuje.

h) Najmenšia hodnota 0 v bode (0,0); najväčšia hodnota 20 v bode (2,4).