Nevlastný integrál

(použitý materiál http://www.evlm.stuba.sk/~velichova/M1_P/Nevlastny_Integral.pdf)

Nevlastný integrál na neohraničenom intervale

• vplyvom hornej hranice

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $\langle a, \infty)$ a integrovateľná na intervale $\langle a, t\rangle$ pre každé $t > a$.
Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

potom túto limitu nazývame nevlastný integrál funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, \infty)$.

• vplyvom dolnej hranice

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $(-\infty, b\rangle$ a integrovateľná na intervale $\langle t, b\rangle$ pre každé $t < b$.
Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

potom túto limitu nazývame nevlastný integrál funkcie $f(x)$ na intervale $(-\infty, b\rangle$.

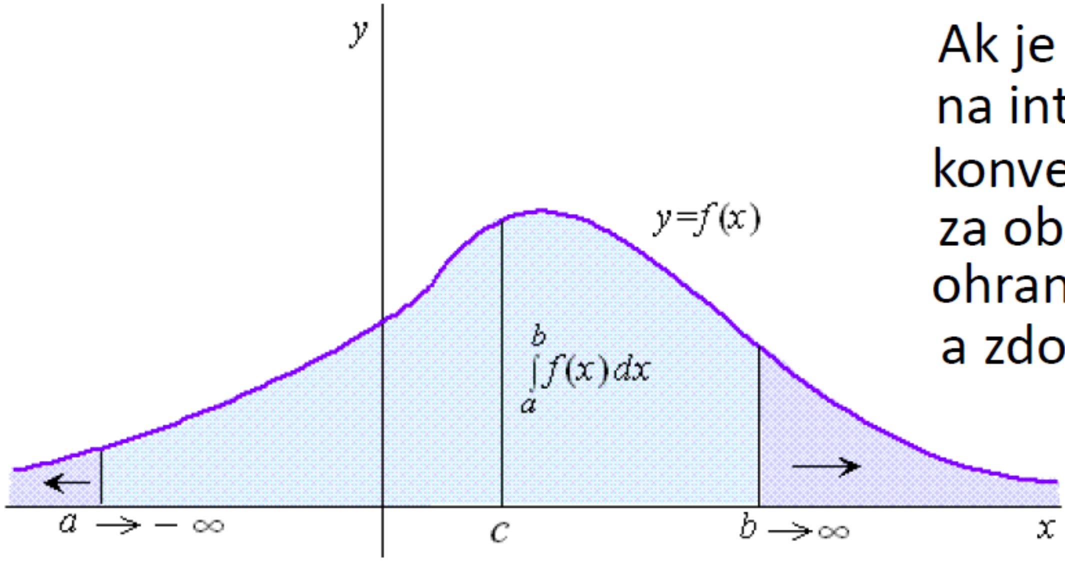
Ak vlastná limita existuje, hovoríme, že nevlastný integrál konverguje.
Ak vlastná limita neexistuje, príslušný nevlastný integrál diverguje.

Nech je funkcia *f*(*x*) definovaná na intervale (- ∞, ∞) a nech *c* je ľubovoľné reálne číslo. Ak existujú nevlastné integrály

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

potom ich súčet nazývame nevlastný integrál funkcie *f*(*x*) na intervale (-∞, ∞).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, c \in R$$



Ak je funkcia *f*(*x*) spojitá a nezáporná na intervale (- ∞, ∞), a nevlastný integrál konverguje, jeho hodnotu považujeme za obsah nekonečnej rovinnej oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie *f*(*x*) a zdola súradnicovou osou *x*.

Nevlastný integrál z neohraničenej funkcie

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $\langle a, b)$ a v okolí bodu b je neohraničená

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$$

Ak je integrovateľná na každom intervale $\langle a, t \rangle$, pre $t < b$ a existuje vlastná limita

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

potom túto limitu nazývame nevlastný integrál vplyvom funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b)$

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $(a, b\rangle$ a v okolí bodu a je neohraničená

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Ak je integrovateľná na každom intervale $\langle t, b\rangle$, pre $a < t$ a existuje vlastná limita

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

potom túto limitu nazývame nevlastný integrál vplyvom funkcie $f(x)$ na intervale $(a, b\rangle$

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$