

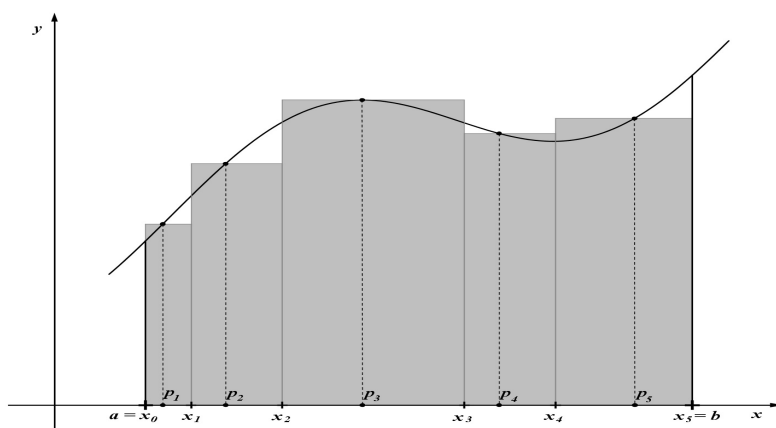
6. Neurčitý a určitý integrál

Na intervale $\langle a, b \rangle$ je definovaná nezáporná funkcia f . Počítajme obsah rovinatej oblasti ohraničenej grafom funkcie f , osou x a priamkami $x = a$, $x = b$.

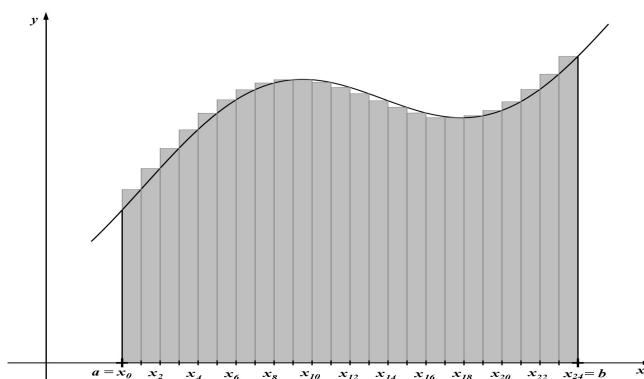
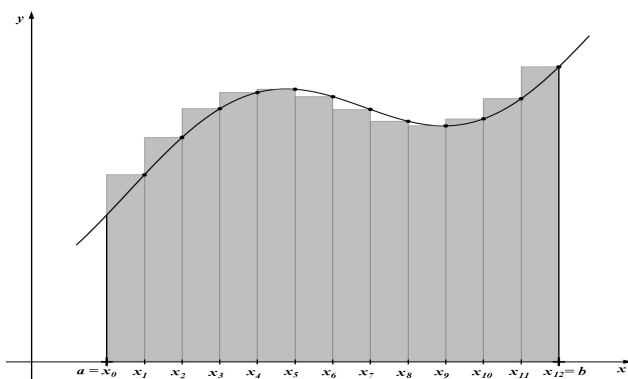
Môžeme postupovať nasledovne:

1. Rozdelíme bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ interval $\langle a, b \rangle$ na n podintervalov.
2. V každom podintervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ zvolíme ľubovoľný bod p_i .
3. V každom podintervale nahradíme príslušnú časť plochy obdĺžnikom so základňou dĺžky $x_i - x_{i-1}$ a výškou $f(p_i)$.
4. Sčítame obsahy všetkých takýchto obdĺžnikov

$$S = f(p_1)(x_1 - x_0) + f(p_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(p_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n f(p_i)(x_i - x_{i-1}).$$



Dostávame približnú hodnotu hľadaného obsahu. Ak zhustíme deliace body, hodnota S sa viac priblíži skutočnej hodnote. Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka d najdlhšieho podintervalu bude blížitiť k nule. Dostávame vždy presnejší "odhad" pre S .



Nech f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b \rangle$ a F je funkcia primitívna k f v intervale $\langle a, b \rangle$. **Určitý integrál** funkcie f v intervale $\langle a, b \rangle$ je **číslo** $F(b) - F(a)$. Tento fakt zapisujeme nasledovne

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Uvedený vzťah sa volá **Newtonova-Leibnizova formula**.

Neurčitý a určitý integrál sú vo svojej podstate naprosto odlišné matematické objekty. Kým neurčitý integrál je množina funkcií, určitý integrál je číslo.

Neurčitý integrál

Definícia 6.1:

- **Funkcia F je primitívnu funkciou k funkcii f na intervale (a, b) :** ak $\forall x \in (a, b)$ platí:
 $F'(x) = f(x)$

Vlastnosti primitívnych funkcií:

- Ak F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale (a, b) , tak $F + c$ je tiež primitívnu funkciou k funkcii f na intervale (a, b) , pričom $c \in \mathbb{R}$.
- Ak F a G sú primitívne funkcie k funkcii f na intervale (a, b) , tak existuje reálne číslo c tak, že $F(x) = G(x) + c$ pre všetky $x \in (a, b)$.

Definícia 6.2:

- **Neurčitý integrál funkcie f na intervale (a, b) - (ozn. $\int f(x) dx$):** množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale na intervale (a, b)

Vlastnosti neurčitého integrálu:

- Ak k funkcii f existuje primitívna funkcia na intervale (a, b) , tak pre všetky $x \in (a, b)$ platí:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

- Ak f' existuje na intervale (a, b) , tak $\int f'(x) dx = f(x) + c$

- Ak majú funkcie f aj g v intervale (a, b) primitívne funkcie, tak v tomto intervale platí

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \quad \int (k f(x)) dx = k \int f(x) dx$$

kde k je ľubovoľné reálne číslo.

Základné neurčité integrály

Vzorec	podmienky
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$x \neq 0, a \in \mathbb{R}, a \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$x \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int a^x dx = a^x \frac{1}{\ln a} + c$	$x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$	$x \neq \{-1, 1\}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + c = -\operatorname{arccos} x + c$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2+a} \right + c$	$x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Cvičenie 6.1. Vypočítajte integrály:

1. $\int (3x^2 + 2x - 1) dx.$
2. $\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} \right) dx.$
3. $\int x^2(x^2 + 1) dx.$
4. $\int (x^3 + 1)^2 dx.$
5. $\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x} dx.$
6. $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x}} dx.$
7. $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} dx.$
8. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x} dx.$
9. $\int (\cos x + 2\sqrt[5]{x^3}) dx.$
10. $\int \left(\sin x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} \right) dx.$
11. $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) dx.$
12. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+2}{x^2+1} \right) dx.$
13. $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)} dx.$
14. $\int \cotg^2 x dx.$
15. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx.$
16. $\int \frac{dx}{x^2+7}.$
17. $\int 4^{2-3x} dx.$
18. $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx.$

Výsledky:

1. $x^3 + x^2 - x + c.$
2. $-\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} + c.$
3. $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + c.$
4. $\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x + c.$
5. $\frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + c.$
6. $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + c.$
7. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c.$
8. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8 \ln|x| + c.$
9. $\sin x + \frac{5}{4}x\sqrt[5]{x^3} + c.$
10. $-\cos x + \frac{3}{2} \arcsin x + c.$
11. $\frac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x} + c.$
12. $x + \arctg x - \frac{1}{10^x \ln 10} + c.$
13. $\frac{1}{3}(x - \arctg x) + c.$
14. $-x - \cotg x + c.$
15. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + c.$
16. $\frac{1}{\sqrt{7}} \arctg \frac{x}{\sqrt{7}} + c.$
17. $-\frac{1}{3 \ln 4} 4^{2-3x} + c.$
18. $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$

Substitučná metóda

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I , nech funkcia φ má deriváciu v intervale (a, b) a nech pre každé $x \in (a, b)$ je $\varphi(x) \in I$. Potom

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c$$

Postup pri používaní substitučnej metódy:

1. V integrovanej funkcii hľadáme takú funkciu φ , ktorá sa tam vyskytuje spolu so svojou deriváciou, alebo jej číselným násobkom.
2. Zavedieme novú premennú t , pre ktorú je $t = \varphi(x)$.

3. Upravíme daný interál na tvar $\int f(t)dt$ kde $dt = \varphi'(x)dx$ a počítame $\int f(t)dt = F(t) + c$.

4. Vo výsledku nahradíme $t = \varphi(x)$: $F(\varphi(x)) + c$

Niekedy, ak je funkcia φ monotónna, tretí bod tohoto postupu je výhodné realizovať tak, že si vyjadríme inverznú funkciu $x = \varphi^{-1}(t)$ a (alebo) $dx = (\varphi^{-1})'(t)dt$ a dosadíme do pôvodného integrálu.

Príklad: Ukážeme platnosť vzťahu $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$.

Riešenie:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) a dx = \left| \begin{array}{l} t = ax+b \\ dt = a dx \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int f(t) dt = \frac{1}{a} F(t) + c = \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$$

Ak F je primitívnou funkciou k funkcii f , tak v príslušných intervaloch platí

$$\begin{aligned} \int x f(x^2) dx &= \frac{1}{2} F(x^2) + c, & \int \frac{f(\ln x)}{x} dx &= F(\ln x) + c, \\ \int \frac{f(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx &= F(\operatorname{arctg} x) + c, & \int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= 2F(\sqrt{x}) + c, \\ \int f(\sin x) \cos x dx &= F(\sin x) + c, & \int \frac{f(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx &= F(\operatorname{tg} x) + c. \end{aligned}$$

Cvičenie 6.2. Použitím algebraickej úpravy (ak je potrebná) a substitúcie lineárnej funkcie vypočítajte integrály:

19. $\int \sin 3x dx.$

20. $\int \frac{dx}{5-3x}.$

21. $\int e^{3-2x} dx.$

22. $\int \sqrt[3]{3x-2} dx.$

23. $\int (4-7x)^{11} dx.$

24. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

26. $\int \frac{dx}{x^2+16}.$

Cvičenie 6.3. Použitím naznačenej substitúcie vypočítajte integrály:

27. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}}, \quad t = x^2 - 4.$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+4)}}, \quad t = \frac{\sqrt{x}}{2}.$

28. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx, \quad t = \sin x.$

34. $\int \frac{x dx}{1+x^4}, \quad t = x^2.$

29. $\int \sqrt{\cos^3 x} \sin x dx, \quad t = \cos x.$

35. $\int \frac{dx}{e^x-1}, \quad t = e^{-x}.$

30. $\int x e^{x^2} dx, \quad t = x^2.$

36. $\int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}} dx, \quad t = \operatorname{arctg} e^x.$

31. $\int \frac{dx}{x \ln x}, \quad t = \ln x.$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad t = \frac{1}{x}.$

32. $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx, \quad t = x^3 + 1.$

38. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}, \quad t = \sqrt{x+1}.$

Výsledky:

- | | | |
|---|--|--|
| 19. $-\frac{1}{3} \cos 3x + c.$ | 27. $\sqrt{x^2 - 4} + c.$ | 28. $\ln 1 + \sin x + c.$ |
| 20. $-\frac{1}{3} \ln 3x - 5 + c.$ | 29. $-\frac{2}{5} \sqrt{\cos^5 x} + c.$ | 30. $\frac{1}{2} e^{x^2} + c.$ |
| 21. $-\frac{1}{2} e^{3-2x} + c.$ | 31. $\ln \ln x + c.$ | 32. $\frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 1)^3} + c.$ |
| 22. $\frac{1}{4} (3x - 2) \sqrt[3]{3x - 2} + c.$ | 33. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2} + c.$ | 34. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + c.$ |
| 23. $-\frac{(4-7x)^{12}}{84} + c.$ | 35. $\ln e^{-x} - 1 + c.$ | 36. $\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + c.$ |
| 24. $\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + c.$ | 37. $\arccos \frac{1}{x} + c.$ | 38. $\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}.$ |
| 25. $\arcsin \frac{x}{3} + c.$ | | |
| 26. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + c.$ | | |

Metóda per partes (integrovanie po častiach)

Nech funkcie u a v majú derivácie na intervale (a, b) . Potom platí:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Ako voliť funkciu u' a v v metóde per partes?

1. Nemal by byť problém vypočítať funkcie $u(x) = \int u'(x)dx$ a $v'(x)$.
2. Integrál $\int u(x)v'(x)dx$ by mal byť ľahší ako pôvodný integrál.

Metódu integrovania per partes používame o.i. pri integráloch typu $\int P(x)f(x)dx$, kde $P(x)$ je polynóm (!!!môže byť aj $P(x) = 1$) a f je trigonometrická, exponenciálna, logaritmická alebo cyklometrická funkcia. Pritom volíme:

1. $u' = f$ a $v = P$, ak f je trigonometrická alebo exponenciálna funkcia a postup opakujeme n -krát, kde n je stupeň polynómu P ,
2. $u' = P$ a $v = f$, ak f je cyklometrická alebo logaritmická funkcia.

Cvičenie 6.4. Použite naznačené metódy per partes na výpočet integrálov:

63. $\int \ln x \, dx$, $u' = 1$, $v = \ln x$.
 64. $\int \frac{\ln x \, dx}{x^2}$, $u' = \frac{1}{x^2}$, $v = \ln x$.
 65. $\int x \cos x \, dx$, $u' = \cos x$, $v = x$.
 66. $\int x e^{-2x} \, dx$, $u' = e^{-2x}$, $v = x$.
 67. $\int \operatorname{arccotg} x \, dx$, $u' = 1$, $v = \operatorname{arccotg} x$.
 68. $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$, $u' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $v = x$.
 69. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$, $u' = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$, $v = x$.
 71. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$, $u' = 1$, $v = \sqrt{1-x^2}$.
 72. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$, $u' = \operatorname{tg}^2 x$, $v = x$.

Cvičenie 6.5. Použitím metódy per partes vypočítajte integrály:

73. $\int x \ln x \, dx$.
 74. $\int x \sin 3x \, dx$.
 75. $\int 5x e^{-4x} \, dx$.
 76. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.
 77. $\int \arccos x \, dx$.
 79. $\int (2x+1) \cos\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \, dx$.
 80. $\int \frac{x \, dx}{5^x}$.
 81. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$.
 82. $\int 4x^3 \ln(x^5) \, dx$.

Cvičenie 6.6. Opakovaným použitím metódy per partes vypočítajte integrály:

83. $\int x^2 \sin x \, dx$.
 84. $\int e^x \cos 2x \, dx$.
 85. $\int (x^2 + 5) \cos x \, dx$.
 87. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx$.
 88. $\int x \ln^2 x \, dx$.
 89. $\int \ln^2 x \, dx$.
 90. $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} \, dx$.
 91. $\int \sin(\ln x) \, dx$.
 92. $\int x^2 e^{3x} \, dx$.
 93. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx$.
 94. $\int x^3 \cos x \, dx$.

Výsledky

63. $x \ln x - x + c$. 64. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$.
 65. $x \sin x + \cos x + c$. 66. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$.
 67. $x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$. 68. $-x \cotg x + \ln |\sin x| + c$.
 69. $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \cotg x + c$.
 71. $\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c$. 72. $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + c$.

Vo výsledkoch nasledujúcich cvičení je ešte pred výsledkom uvedená voľba funkcie u' v metóde per partes, ktorou je možné integrál riešiť. Funkciu v si čitateľ doplní:

73. $u' = x$, $I = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$.
 74. $u' = \sin 3x$, $I = -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + c$.
 75. $u' = e^{-4x}$, $I = -\frac{5}{4}xe^{-4x} - \frac{5}{16}e^{-4x} + c$.
 76. $u' = x$, $I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$.
 77. $u' = 1$, $I = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$.
 79. $u' = \cos(\frac{\pi}{3} - 5x)$, $I = -\frac{2x+1}{5} \sin(\frac{\pi}{3} - 5x) + \frac{2}{25} \cos(\frac{\pi}{3} - 5x) + c$.
 80. $u' = 5^{-x}$, $I = -\frac{x5^{-x}}{\ln 5} - \frac{5^{-x}}{\ln^2 5} + c$.
 81. $u' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + c$.
 82. $u' = 4x^3$, $I = 5x^4 \ln x - \frac{5}{4}x^4 + c$.
 83. $u' = \sin x$, $I = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$. 90. u' je jedno, $I = -\frac{8}{17}e^{-2x}(\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}) + c$.
 84. u' je jedno, $I = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2 \sin 2x) + c$. 91. $u' = 1$, $I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$.
 85. $u' = \cos x$, $I = (x^2 + 3) \sin x + 2x \cos x + c$. 92. $u' = e^{3x}$, $I = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + c$.
 87. $u' = e^{-x}$, $I = -e^{-x}(x^2 + 5) + c$. 93. $u' = \cos 2x$, $I = \frac{2x^2+10x+11}{4} \sin 2x + \frac{2x+5}{4} \cos 2x + c$.
 88. $u' = x$, $I = \frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x) + \frac{1}{4}x^2 + c$. 94. $u' = \cos x$, $I = (x^3 - 6x) \sin x + (3x^2 - 6) \cos x + c$.
 89. $u' = 1$, $I = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$.

Integrovanie racionálnych funkcií

Definícia 6.3:

- **Racionálna funkcia** f : $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x), Q_m(x)$ sú polynómy stupňa $m, n \in \mathbb{N}$,
- **Rýdzoracionálna funkcia** f : ak pre racionálnu funkciu platí, že $n < m$,
- **Elementárne (parciálne) zlomky**: zlomky v tvare

$$\text{I.) } \frac{a}{x-r}, \quad \text{II.) } \frac{a}{(x-r)^n}, \quad \text{III.) } \frac{ax+b}{x^2+px+q}, \quad \text{IV.) } \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$$

Vlastnosti racionálnych funkcií:

- Ak pre racionálnu funkciu f platí, že $n \geq m$, tak ju úpravou (delením $P_n(x) : Q_m(x)$) prevedieme na tvar $f(x) = R_k(x) + \frac{S_l(x)}{Q_m(x)}$, pričom funkcia $\frac{S_l(x)}{Q_m(x)}$ už je rýdzoracionálnou funkciou.
- Každú rýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. To, že aké elementárne zlomky sa objavia v rozklade, závisí od menovateľa $Q_m(x)$. Platí totiž:

- Polynóm $Q_m(x)$ možno zapísať jediným spôsobom v tvare

$$(x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2} \dots (x - a_k)^{n_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

kde a_1, \dots, a_k sú navzájom rôzne reálne korene polynómu $Q_m(x)$, polynómy $x^2 + p_1x + q_1, \dots, x^2 + p_sx + q_s$ nemajú reálne korene a sú navzájom rôzne, $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$

- Sčítance vystupujúce v súčte elementárnych zlomkov možno rozdeliť na skupiny patriace k jednotlivým členom rozkladu polynómu $Q_m(x)$, tj. na skupinu elementárnych zlomkov patriacu k členu $(x - a_1)^{n_1}, \dots$, skupinu elementárnych zlomkov patriacu k členu $(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}$, pričom:

- * skupina patriaca k členu tvaru $(x - \alpha)^i$ pozostáva z parciálnych zlomkov

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)}, \frac{A_2}{(x - \alpha)^2}, \dots, \frac{A_i}{(x - \alpha)^i}$$

- * skupina patriaca k členu tvaru $(x^2 + \beta x + \gamma)^j$ pozostáva z parciálnych zlomkov

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + \beta x + \gamma)}, \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2}, \dots, \frac{B_jx + C_j}{(x^2 + \beta x + \gamma)^j}$$

- $\frac{2x^2 + 1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$

- $\frac{2x-3}{x(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{C_1}{x+3} + \frac{C_2}{(x+3)^2} + \frac{C_3}{(x+3)^3}$

- $\frac{x^3 - 8}{x^2(x^2+2)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$

Integrovanie elementárnych zlomkov :

I.)

$$\int \frac{a}{x-r} dx = \left| \begin{array}{l} t = x-r \\ dt = dx \end{array} \right| = a \int \frac{dt}{t} = a \ln|t| + c = a \ln|x-r| + c.$$

II.) Pre $n > 1$:

$$\int \frac{a}{(x-r)^n} dx = \left| \begin{array}{l} t = x-r \\ dt = dx \end{array} \right| = a \int t^{-n} dt = a \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + c.$$

III.)

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}$$

1.

$$\frac{a}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{l} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)dx \end{array} \right| = \frac{a}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{a}{2} \ln(x^2+px+q) + c$$

2.

$$\begin{aligned} \int \frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q} dx &= \left(b-\frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+K^2} = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{K}\right)^2+1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{x+\frac{p}{2}}{K} \\ dt = \frac{1}{K} dx \end{array} \right| = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{b-\frac{ap}{2}}{K} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{K} + c, \end{aligned}$$

$$\text{kde } K^2 = \frac{4q-p^2}{4}$$

IV.) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou.

Cvičenie 6.7. Vypočítajte integrály rýdzoracionálnych funkcií:

95. $\int \frac{dx}{x^2+2x}.$

96. $\int \frac{dx}{x^2-1}.$

97. $\int \frac{dx}{x^3+x}.$

98. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$

99. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$

100. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$

101. $\int \frac{2 dx}{x^2+2x+5}.$

102. $\int \frac{dx}{3x^2+5}.$

103. $\int \frac{dx}{x^3+1} dx.$

104. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}.$

Cvičenie 6.8. Vypočítajte integrály racionálnych funkcií:

$$105. \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

$$106. \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

$$107. \int \frac{x^2 dx}{x^2 - 6x + 10}.$$

$$108. \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx.$$

$$109. \int \frac{(x-1)^2}{x^2 + 3x + 4} dx.$$

$$110. \int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx.$$

Výsledky:

$$95. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + c.$$

$$96. \ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + c.$$

$$97. \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c.$$

$$98. \frac{1}{12} \ln \left| \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+2)^4} \right| + c.$$

$$99. \frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c.$$

$$100. \ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + c.$$

$$101. \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c.$$

$$102. \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} x \right) + c.$$

$$103. \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$

$$104. \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

$$105. x + 3 \ln |x - 3| - 3 \ln |x - 2| + c.$$

$$106. 5x + \ln \left| \frac{\sqrt{x(x-4)}^{\frac{16}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}} \right| + c.$$

$$107. x + 3 \ln(x^2 - 6x + 10) + 8 \operatorname{arctg}(x - 3) + c.$$

$$108. x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| + c.$$

$$109. x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 3x + 4) + \frac{9}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c.$$

$$110. x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.$$

Určitý integrál

Súvis medzi určitým a neurčitým integrálom - Newtonov-Leibnizov vzorec

Nech f je integrácie schopná funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$ a F je jej primitívna funkcia. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Vlastnosti určitého integrálu

Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Ak funkcie sú spojité v intervaloch, v ktorých integrujeme, tak platí

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))dx = c \int_a^b f(x)dx + d \int_a^b g(x)dx, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

Cvičenie 6.9. Vypočítajte určité integrály.

1. $\int_{-1}^1 (x+1)^2 dx,$
2. $\int_0^1 (x^2 - 2x + 3) dx,$
3. $\int_0^{\pi} \sin x dx,$
4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$
5. $\int_{-7}^5 |x+1| dx,$
7. $\int_1^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx,$
8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x + \cos x dx.$

9. Funkcia f je definovaná

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \sqrt{x}, & x \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

Vypočítajte $\int_0^2 f(x) dx.$

Výsledky:

1. $\frac{8}{3},$
2. $\frac{7}{3},$
3. 2,
4. $\frac{\pi}{4},$
5. 36,
7. $\frac{64}{3},$
8. 0.
9. $\frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 1).$

Metódy počítania určitého integrálu

Metóda per partes pre určité integrály

Nech funkcie f a g majú spojité derivácie v intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Substitučná metóda pre určité integrály

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (t = \varphi(x)) = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)dt.$$

Pri počítaní určitých integrálov zo zložitejších funkcií môžeme postupovať v zásade dvomi spôsobmi:

- Oddelíme fázu výpočtu primitívnej funkcie od fázy výpočtu určitého integrálu.
- Neoddelíme fázu výpočtu primitívnej funkcie od fázy výpočtu určitého integrálu.

Cvičenie 6.10. Vypočítajte určité integrály.

10. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3},$
11. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx,$
12. $\int_9^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$
13. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx,$
14. $\int_0^\pi x \cos(2x - \frac{\pi}{2}) dx,$
15. $\int_{\sqrt{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$
16. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}},$
17. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}},$
18. $\int_1^3 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx,$
19. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx,$
20. $\int_0^1 \frac{3x}{1+x^2} dx,$
21. $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x e^{x^2} dx,$
22. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})},$
23. $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$
24. $\int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx,$
25. $\int_0^1 \sqrt{x^5+2x}(5x^4+2) dx,$
26. $\int_0^\pi \sin 2x \cos^2 2x dx,$
27. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx,$
28. $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx,$
29. $\int_0^\pi \cos^2 x dx,$
30. $\int_0^\omega \cos(\omega x) dx,$
31. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}},$
32. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x} dx,$
33. $\int_0^\pi \sin 3x \cos 2x dx,$
34. $\int_0^\pi \cos 3x \cos 4x dx,$
35. $\int_{-\pi}^{-\pi} \sin^2 3x dx,$
36. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2},$
37. $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{x^2+1} dx,$
38. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x-x^2},$
39. $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{x^2-3x+2},$
40. $\int_0^1 \frac{3x^2}{x^2+2x+1} dx,$
41. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{5x^2}{x^2+1} dx,$
42. $\int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx,$
43. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+2} dx,$
44. $\int_0^1 \frac{12 dx}{\sqrt{4-x^2}},$
45. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}},$
46. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{5}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$
47. $\int_0^2 \frac{x dx}{x^2+4x+3},$
48. $\int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2 2x} dx,$
49. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} dx,$

50. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\cot^2 x + 1} dx,$
51. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} dx,$
52. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx,$
53. $\int_1^2 x \ln x dx,$
54. $\int_0^1 \ln(x+1) dx,$
55. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx,$
56. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx,$
57. $\int_0^{\frac{1}{4}} (x-1)\sqrt{2x+1} dx,$
58. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{dx}{\cos^3 x},$
59. $\int_0^1 \ln(x^2+1) dx,$
60. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx,$
61. $\int_0^1 \arcsin x dx,$
62. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx,$
63. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx,$
64. $\int_0^{\ln 2} x \cosh x dx,$
65. $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$

Výsledky:

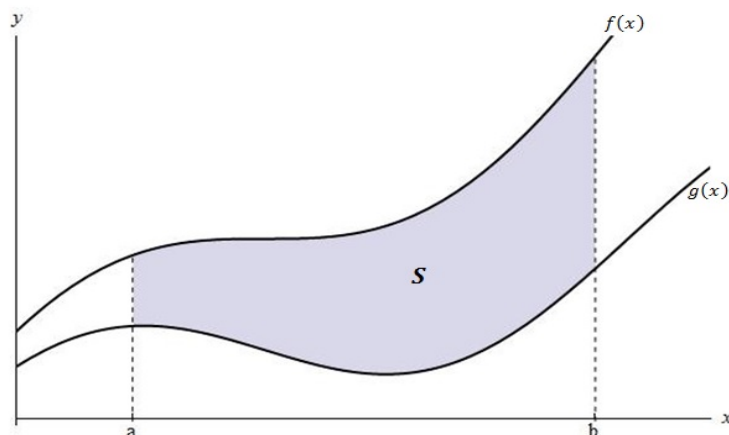
10. $\frac{2}{9},$
11. $\sqrt{2} - 1,$
12. 3,
13. $-\frac{1}{3},$
14. $-\frac{\pi}{2},$
15. $\frac{\pi}{12},$
16. $\frac{\pi}{12},$
17. $\frac{\pi}{6},$
18. $\sin(\ln 3),$
19. $\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right),$
20. $\frac{3}{2} \ln 2,$
21. $\frac{1}{2},$
22. $2 \ln 2,$
23. $2 - \sqrt{3},$
24. $\frac{2}{\ln 2},$
25. $2\sqrt{3},$
26. 0,
27. 2,
28. 4,
29. $\frac{\pi}{2},$
30. 0,
31. $\frac{\pi}{2},$
32. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$
33. $-\frac{6}{5},$
34. 0,
35. $\pi,$
36. $\ln \sqrt{3},$
37. $4 - \ln 3,$
38. $2 \ln 3,$
39. $3 \ln 2 - 2 \ln 3,$
40. $\frac{9}{2} - 6 \ln 2,$
41. $5\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right),$
42. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4},$
43. $2 \ln 3 - 3 \ln 2,$
44. $2\pi,$
45. $\frac{2-\sqrt{2}}{3},$
46. $-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{3},$
47. $\ln \frac{5\sqrt{5}}{9},$
48. 2,
49. 4,
50. $2 \ln(\sqrt{2}+1),$
51. $\ln 2,$
52. $2 - \frac{\pi}{2},$
53. $2 \ln 2 - \frac{3}{4},$
54. $2 \ln 2 - 1,$
55. $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2},$
56. $\frac{1}{2},$
57. $\frac{168}{15},$
58. $\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3}),$
59. $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2},$
60. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$
61. $\frac{\pi}{2} - 1,$
62. $-4\pi,$
63. $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right),$
64. $\frac{3}{4} \ln 2 - \frac{1}{4},$
65. $\frac{e^2+3}{8}.$

Použitie určitého integrálu v geometrii

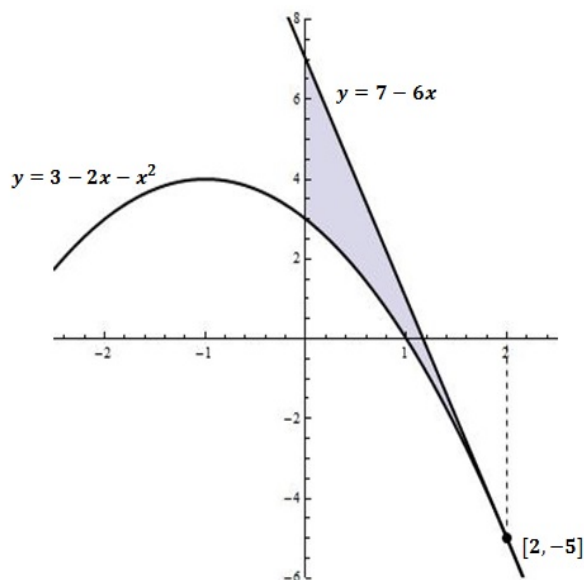
Obsah rovinnej oblasti

Obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f(x) \geq g(x)$ (a priamkami $x = a, x = b$) na intervale $\langle a, b \rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



Príklad: Nájďme obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y . Príklad je znázornený na nasledujúcom obrázku.



Riešenie: Spomínaná dotyčnica má rovnicu $y = 7 - 6x$ (oddôvodnite!). V intervale integrácie $\langle 0, 2 \rangle$ platí $7 - 6x \geq 3 - 2x - x^2$, preto

$$P = \int_0^2 (7 - 6x - (3 - 2x - x^2)) dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{8}{3}$$

Cvičenie 6.11. Vypočítajte obsahy rovinných oblastí ohraničených uvedenými krivkami. **148.** Parabolou $y = 4x - x^2$ a osou o_x . **149.** Parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $x + y = 3$. **150.** Parabolou $y = x^2 - 2$ a priamkou $y = 2$. **151.** Osou o_x a krivkou $y = x^2 - x^3$. **152.** Krivkami $y = x^2$ a $y = x^3$. **153.** Krivkou $y = \cos x$ a priamkou $y = -\pi$ pre $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$. **154.** Krivkou $y = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ a priamkou $y = x$. **155.** Krivkami $y = \sin x$ a $y = \cos x$ pre $x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle$. **156.** Krivkami $y = 2^x$ a $y = 2x - x^2$, priamkou $x = 2$ a osou o_y . **157.** Parabolami $y = 4x^2, y = \frac{x^2}{9}$ a priamkou $y = 2$. **158.** Krivkami $y = \ln x$ a $y = \ln^2 x$. **159.** Parabolou $y = x^2 - 2x + 2$, jej dotyčnicou v bode $T = [3, 5]$ a osou o_y . **160.** Krivkou $y = e^{-x} \sin x$ a osou o_x v intervale $\langle 0, \pi \rangle$.

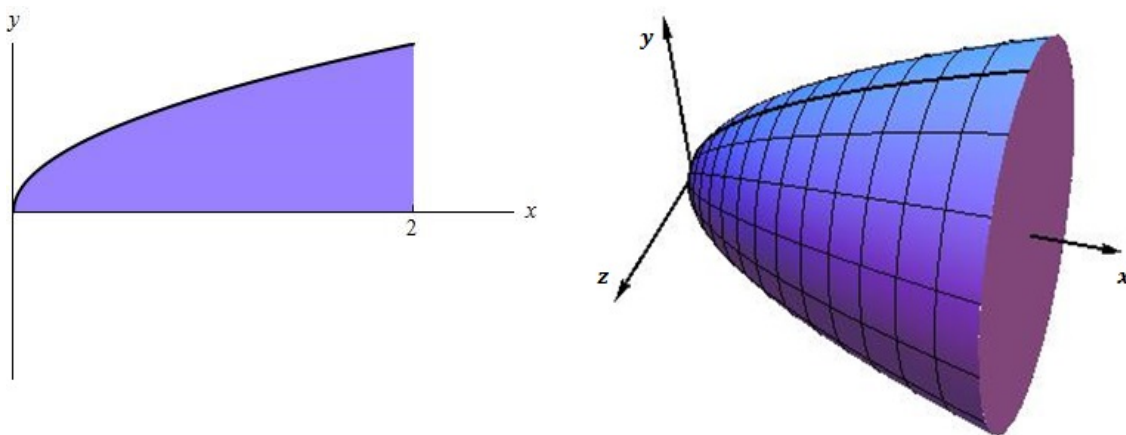
Výsledky

148. $\frac{32}{3}$, **149.** $\frac{9}{2}$, **150.** $\frac{32}{3}$, **151.** $\frac{1}{12}$, **152.** $\frac{1}{12}$, **153.** $2\pi^2$, **154.** $\frac{4}{\pi} - 1$, **155.** $2\sqrt{2}$, **156.** $\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$, **157.** $\frac{20\sqrt{2}}{3}$, **158.** $3 - e$, **159.** 9 , **160.** $\frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

Objem telies

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f \geq 0$ (a priamkami $x = a, x = b$) a osou o_x v intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

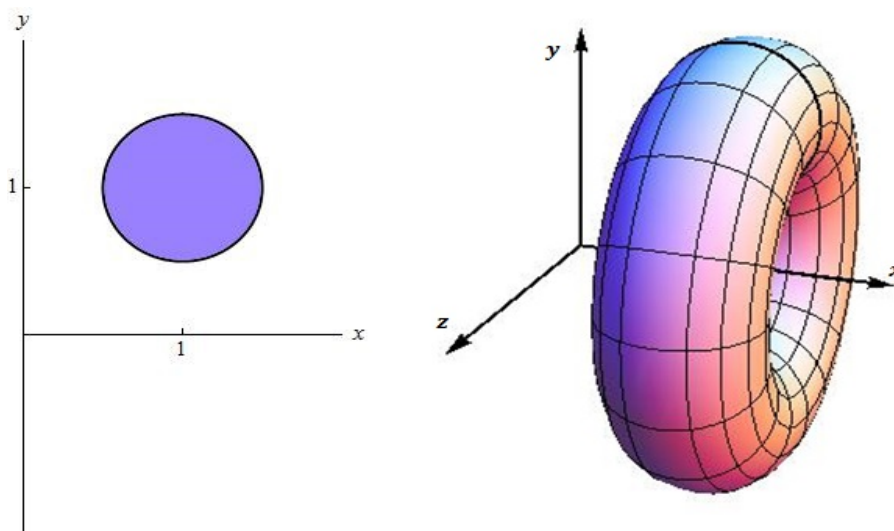
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f \geq g \geq 0$ (a priamkami $x = a, x = b$) v intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

Cvičenie 6.12. Vypočítajte objemy telies určených rotáciou rovinnných oblastí ohraničených danými krivkami okolo osi o_x . **176.** Parabolou $y = x^2$ a priamkou $y = 4$. **177.** Parabolou $y = 3x - x^2$ a priamkou $y = x$. **178.** Parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $y = x + 3$. **179.** Krivkami $y = \sqrt{x}$ a $y = \frac{x^2}{8}$. **180.** Krivkou $y = \sin x$ a osou o_x v intervale $\langle 0, \pi \rangle$. **181.** Krivkami $y = \sin x, y = \cos x$ a osou o_y v intervale $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$. **182.** Krivkou $y = e^x \sqrt{x}$ a priamkami $x = 1, y = 0$. **183.** Krivkou $y = \sin x$ a priamkou $y = \frac{2}{\pi}x$.



Výsledky

176. $\frac{256\pi}{5}$, 177. $\frac{56\pi}{15}$, 178. $\frac{117\pi}{5}$, 179. $\frac{24\pi}{5}$, 180. $\frac{\pi^2}{2}$, 181. $\frac{\pi}{2}$, 182. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$, 183. $\frac{\pi^2}{6}$.

Dĺžka krivky

Dĺžku rovinatej krivky, ktorá je grafon funkcie f , ktorá má spojitú deriváciu v intervale $\langle a, b \rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$D = \pi \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Cvičenie 6.13. Vypočítajte dĺžky daných kriviek. **196.** $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}, x \in \langle 0, 3 \rangle$, **197.** $y = \frac{x^2}{4}, x \in \langle 0, 2\sqrt{2} \rangle$, **198.** $y = \ln(\sin x), x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$, **199.** $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, x \in \langle 0, 1 \rangle$, **200.** $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle$, **201.** $y = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right), x \in \langle a, b \rangle$, **202.** $y = \ln x, x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$, **203.** $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, x \in \langle 0, 1 \rangle$, **204.** $y = 2\sqrt{x}, x \in \langle 1, 2 \rangle$,

Výsledky

196. 12, 197. $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{6}$, 198. $\frac{1}{2}\ln 3$, 199. $\frac{2}{3}(\sqrt[4]{8} - 1)$, 200. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$, 201. $\ln\left(\frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}\right)$, 202. $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$, 203. $4 - 2\sqrt{2}$, 204. $\sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}$.

Obsah povrchu rotačnej plochy

Obsah povrchu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie f v intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Cvičenie 6.14. Vypočítajte obsahy povrchov rotačných plôch, ktoré vzniknú rotáciou danej krivky okolo osi o_x . **214.** $y = kx, x \in \langle a, b \rangle, 0 < a < b, k > 0$, **215.** $y = x^3, x \in \langle 0, 1 \rangle$, **216.** $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 2 \rangle$, **217.** $y = e^{-x}, x \in \langle 0, \infty \rangle$, **218.** $y = \frac{x^2}{2}, x \in \langle 0, \frac{3}{4} \rangle$,

Výsledky

214. $\pi k \sqrt{k^2 + 1}(b^2 - a^2)$, 215. $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$, 216. $\frac{13\pi}{3}$, 217. $\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$, 218. $\pi\left(\frac{255}{1024} - \frac{\ln 2}{8}\right)$.