Úloha: zistiť približne hodnotu čísla $\sqrt{5}$

Riešenie: Využijeme k tomu Taylorov polynóm 1. stupňa, teda že platí $f(x) \approx T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$

Pre nás je $f(x) = \sqrt{x}$ a hľadám hodnotu tejto funkcie v bode $x = 5$. Aproximácia má lokálny charakter, to vlastne znamená, že hľadám bod x_0 blízke k bodu $x = 5$ a ešte taký, v ktorom budem vedieť počítať funkčnú hodnotu. Ten bod je $x_0 = 4$. Zistime deriváciu danej funkcie: $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a dosadím hodnotu $x_0 = 4$, teda $f'(4) = \frac{1}{4}$. Poďme dosadiť x_0 do $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$: $\sqrt{x} \approx \sqrt{4} + f'(4)\,(x - 4)$ a teda $\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4}.1$, čo je $\sqrt{5} \approx 2 + 0{,}25 = 2{,}25$.

Môžeme využiť aj Taylorov polynóm 2. stupňa, teda že platí $f(x) \approx T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$. Zistíme aj druhú deriváciu danej funkcie: $f''(x) = (f')' = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$, $f''(x_0) = f''(4) = \frac{-1}{4\left(\sqrt{4}\right)^3} = \frac{-1}{32}$. Poďme dosadiť x_0 do $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$: $\sqrt{x} \approx \sqrt{4} + f'(4)\,(x - 4) + \frac{f''(4)}{2}(x - 4)^2$ a teda $\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4}.1 + \frac{\frac{-1}{32}}{2}.1^2$, čo je $\sqrt{5} \approx 2 + 0{,}25 - 0{,}015625 = 2{,}234375$.

Ak by ste na kalkulačke zistili tú hodnotu $\sqrt{5}$, tak by Vám vyšla približne $2{,}236067$ čo znamená chybu $0{,}013933$ v prípade $T_1(x)$ a chybu $0{,}001692$ v prípade $T_2(x)$.

Úloha: zistiť približne hodnotu čísla $\sqrt[6]{1{,}06}$

Riešenie: Využijeme k tomu Taylorov polynóm 1. stupňa, teda že platí $f(x) \approx T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$

Pre nás je $f(x) = \sqrt[6]{x}$ a hľadám hodnotu tejto funkcie v bode $x = 1{,}06$. Opäť hľadám bod x_0 veľmi blízke k bodu $x = 1{,}06$ a ešte taký, v ktorom budem vedieť počítať funkčnú hodnotu. Ten bod je $x_0 = 1$. Zistime deriváciu danej funkcie: $f'(x) = \left(\sqrt[6]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{1}{6}x^{\frac{-5}{6}}$, a dosadím hodnotu $x_0 = 1$, teda $f'(1) = \frac{1}{6}$. Poďme dosadiť do $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$:

$\sqrt[6]{1{,}06} \approx \sqrt[6]{1} + f'(1)\,(1{,}06 - 1)$ a teda $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1 + \frac{1}{6}.0{,}06$, čo je $\sqrt[6]{1{,}06} \approx 1 + 0{,}01 = 1{,}01$. Ak by ste na kalkulačke aj zistili tú hodnotu, tak by Vám vyšla $1{,}00975$ čo znamená chybu rádovo $0{,}00025$.

Úloha: zistiť monotónnosť a lokálne extrémy

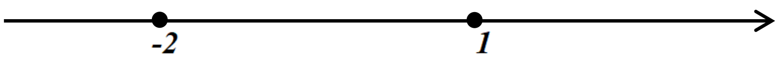
1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

Derivácia tejto funkcie je $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

Chcem zistiť, pre aké x je tento výraz kladný, pre aké záporný a teda najlepšie by bolo zistiť v akom bode sa tá zmena nastane. Preto zistíme nulový bod derivácie, teda kedy sa tá derivácia rovná 0.

Najlepšie sa to zistí, keď to upravíme na súčin: $f'(x) = 6(x^2 + x - 2) = 6(x - 1)(x + 2) = 0$, čo je v prípade pre $x = 1$ a $x = -2$. Tieto body sú tzv. stacionárne body.

Tieto hodnoty vyznačíme na číselnej osi a zistime na aké intervaly delia definičný obor funkcie.



Stačí nám vždy dosadiť jeden konkrétny bod z toho intervalu a zistiť celkové znamienko derivácie.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)=6(x-1)(x+2)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

Takže, funkcia je rastúca na intervale $x\in(-\infty,-2)$ a $x\in(1,\infty)$, a je klesajúca na intervale $x\in(-2,1)$. Z toho už môžeme usúdiť, že v bode $x=-2$ je lokálne maximum a v bode $x=1$ je lokálne minimum.

Ukážeme to aj pomocou druhej derivácie: $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=(6x^2+6x-12)'=12x+6$.

Dosadíme do toho stacionárne body:

$f''(-2)=-18$, čo je <0, preto naozaj je tam lokálne maximum

$f''(1)=18$, čo je >0, preto naozaj je tam lokálne minimum.

2. $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

Najprv treba zistiť definičný obor, čo je $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$.

Opäť derivujeme tú funkciu $f'(x)=\frac{1.(x+1)-(x-1).1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$.

V toto prípade nemá zmysel zistiť nulový bod derivácie, keďže v čitateli je konštanta. Takže musíme zistiť znamienko derivácie. Keďže v menovateli je druhá mocnina, tak celá derivácia je vždy kladná. Ale pozor na definičný obor!

Preto teda funkcia je rastúca na intervale $x\in(-\infty,-1)$ a $x\in(-1,\infty)$. Pozor, nie na zjednotení týchto intervalov!!! O tom sme sa rozprávali na prednáške!!! Táto funkcia nemá lokálne extrémy.

Úloha: zistiť konvexnosť, konkávnosť pre $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$

Aby sme mohli vypočítať 2. deriváciu, potrebujeme najprv vypočítať prvú: $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

Druhá derivácia je $f''(x)=\frac{-2(x^2+3)^2+2x2(x^2+3)2x}{(x^2+3)^4}=\frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}=\frac{6(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3}$. Chceme zistiť, v ktorom bode (ak vôbec taký existuje) sa zmení konkávnosť na konvexnosť a opačne, teda hľadáme inflexný bod

$$f''(x)=\frac{6(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3}=0$$

Túto podmienku spĺňajú body $x=1$ a $x=-1$.

Opäť môžeme aj na číselnej osi vyznačiť tieto body a príslušné intervaly a zistíme znamienko druhej derivácie na tých intervaloch:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)=\dfrac{6(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3}$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	inflex. bod	$\cap$	inflex. bod	$\cup$

Funkcia je konvexná na intervale $x\in(-\infty,-1)$ a $x\in(1,\infty)$, a je konkávna na intervale $x\in(-1,1)$.

Úloha: vyšetriť priebeh funkcie $f(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$

1) definičný obor

$x + 2 \neq 0$ preto $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) body nespojitosti a intervaly spojitosti

Funkcia je nespojitá v bode $x = -2$ a preto graf funkcie je možné nakresliť bez toho, že by sme zdvihli ceruzku iba na intervale $x \in (-\infty, -2)$ a na intervale $x \in (-2, \infty)$ - intervaly spojitosti.

3) priesečníky s osou x a y

Body na osi x, teda pre ktoré platí, že $y = 0$: $\frac{3-x^2}{x+2} = 0$, čo je vtedy ak $3 - x^2 = 0$, teda $x = \sqrt{3}$ a $x = -\sqrt{3}$.

Body na osi y, teda pre ktoré platí, že $x = 0$: $y = \frac{3-0^2}{0+2}$, čo je $y = \frac{3}{2}$.

4) párnosť'/nepárnosť', periodičnosť'

$f(-x) = \frac{3-(-x)^2}{(-x)+2} = \frac{3-x^2}{-x+2}$, čo nie je ani $f(x)$ a ani $-f(x)$, preto nie je ani párna a ani nepárna

5) intervaly monotónnosti, intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexné body, lokálne extrémy

Monotónnosť: $f'(x) = \left(\frac{3-x^2}{x+2}\right)' = \frac{-2x(x+2)-(3-x^2).1}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x-3+x^2}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2} = \frac{-(x^2+4x+3)}{(x+2)^2} = \frac{-(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$

Stacionárne body, teda kde $f'(x) = 0$ sú $x = -3$ a $x = -1$. Číselnú os teda rozdelíme týmito bodmi a samozrejme aj bodom nespojitosti.

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	$(-2, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
$f(x)$	↘	lok. min.	↗	↗	lok. max.	↘

Konvexnosť/konkávnosť: $(f'(x))' = \left(\frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}\right)' = \frac{(-2x-4)(x+2)^2-(-x^2-4x-3)2(x+2)}{(x+2)^4} =$

$= \frac{(-2x-4)(x+2)-(-x^2-4x-3)2}{(x+2)^3} = \frac{-2x^2-4x-4x-8+2x^2+8x+6}{(x+2)^3} = \frac{-2}{(x+2)^3}$

Nemáme inflexný bod, lebo $f''(x) \neq 0$, ale znamienko druhej derivácia sa mení na intervaloch spojitosti.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

6) asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou

Asymptota bez smernice: keďže

$\lim\limits_{x\to-2} \frac{3-x^2}{x+2} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-2+} \frac{3-x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-2-} \frac{3-x^2}{x+2} = \infty \end{cases}$, tak ABS je priamka $x = -2$

Asymptota so smernicou: keďže

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3-x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{x^2+2x} = -1\,,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3-x^2}{x+2} - (-1)x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+2} = 2$$

teda ASS je priamka $y = -x + 2$

7) nakreslit' graf