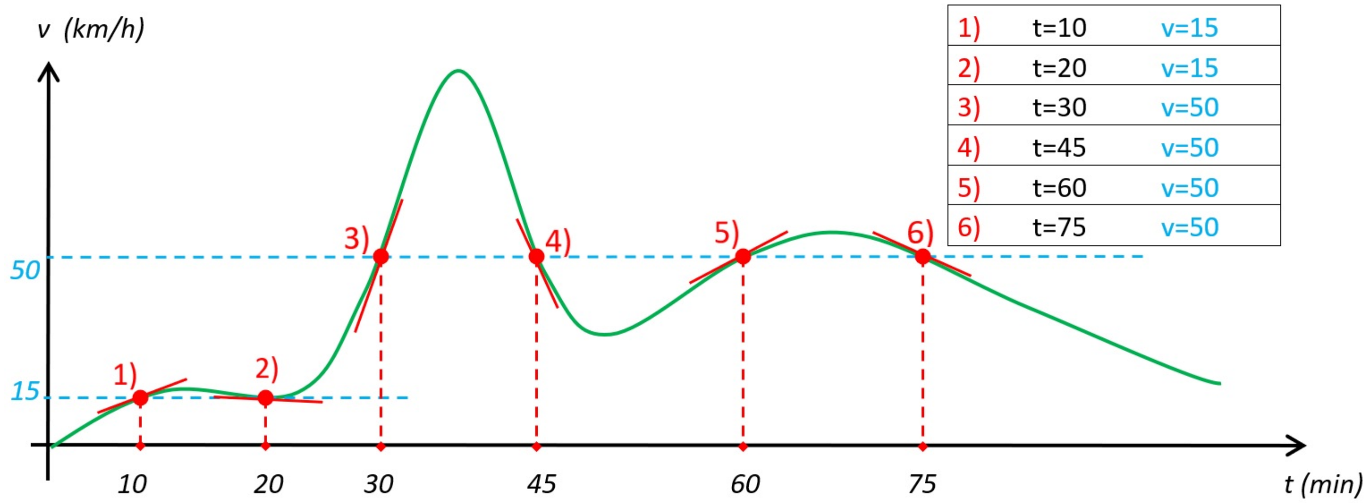
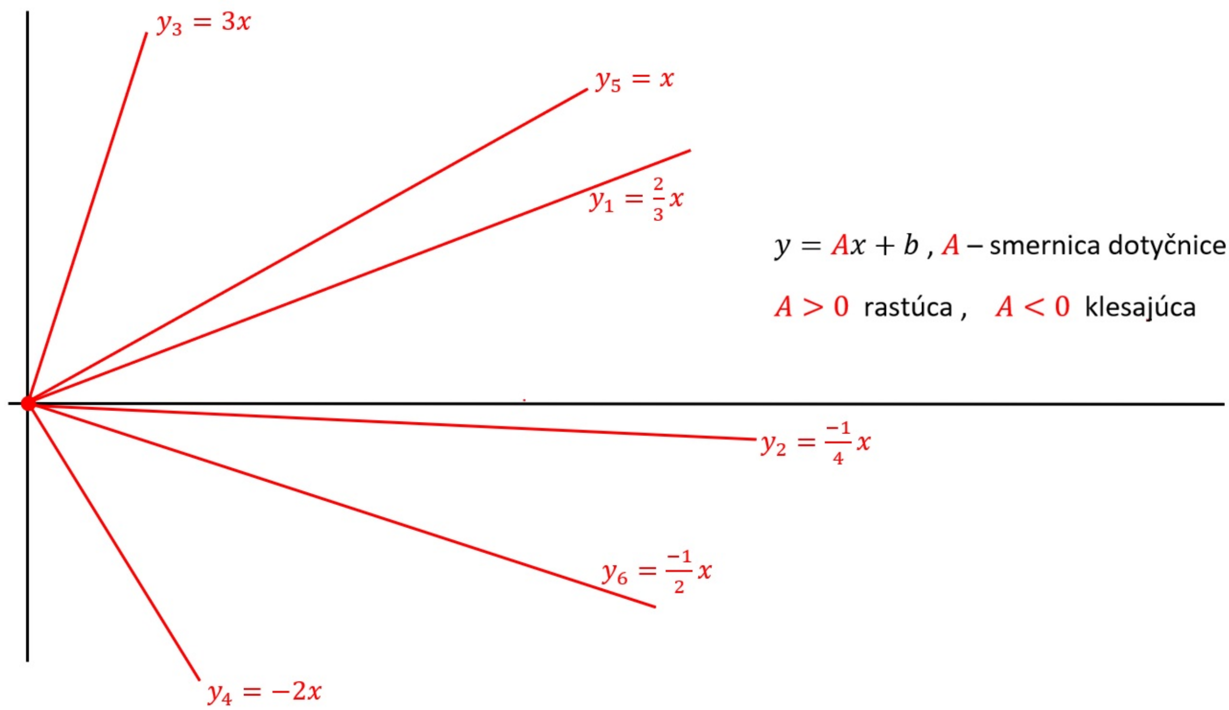
5. Derivácie funkcií a jej aplikácie



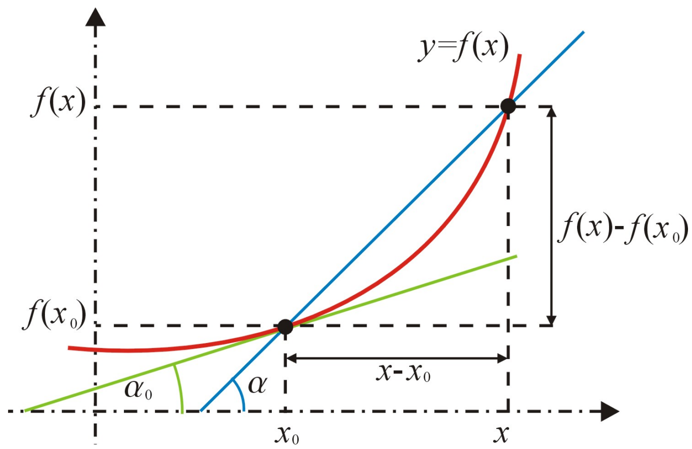
1)	t=10	v=15
2)	t=20	v=15
3)	t=30	v=50
4)	t=45	v=50
5)	t=60	v=50
6)	t=75	v=50



Derivácia elementárnych funkcií

Definícia 5.1: Derivácia funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ - (ozn. $f'(x_0)$): reálne číslo

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Vzorec	podmienky	Vzorec	podmienky
$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$, c – konštanta	$(x)' = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$	$(\mathrm{cotg}\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$	$(\mathrm{arccotg}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Vlastnosti derivácie:

- $\big(c\,f(x)\big)' = c\,f'(x)$ pre $c \in \mathbb{R}$
- $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$

- $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ pre $g(x)\neq 0$
- $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\,g'(x)$

Definícia 5.2: Derivácia druhého rádu funkcie f - (ozn. f''): funkcia, ktorá vznikne ako derivácia prvej derivácie funkcie, t.j. $(f')' = f''$

Cvičenie 5.1. Pomocou definície nájdite deriváciu funkcie f v bode x_0:

a) $f(x)=x^3-3,\quad x_0=0$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-1},\quad x_0=2$

c) $f(x)=x^3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right),\quad x_0=\frac{\pi}{4}$

d) $f(x)=\sqrt{1+x^2},\quad x_0=0$

e) $f(x)=\sqrt{x-1},\quad x_0=1$

f) $f(x)=e^{2x},\quad x_0=0$

Cvičenie 5.2. Nájdite derivácie daných funkcií:

a) $y=x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}$

b) $y=x^2+2-\sin x$

c) $y=e^x+2\ln x-8x^6$

d) $y=x^4+\cos x$

e) $y=(x+3)\log_2 x$

f) $y=(x^2+3x-5)e^x$

g) $y=\dfrac{\sin x}{x^3+1}$

h) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$

i) $y=\dfrac{2^x+x}{\operatorname{arctg} x}$

j) $y=\operatorname{tg}(x^3-\sin x)$

k) $y=2\ln(3\sqrt[3]{x}+2x^5)$

l) $y=3^{x^2-\cos x-2}$

m) $y=\ln\left(\dfrac{1}{\arccos x}\right)$

n) $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3x^6+5x-2}{\arcsin x}\right)$

o) $y=3^{x\log_3 x}$

p) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

q) $y=e^{\sin x}\sin x$

r) $y=\sqrt{\dfrac{(x+2)\cos x^2}{x(x^3-8)}}$

s) $y=\ln\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

t) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x+4)^5}\sqrt{(x-1)^3}}$

u) $y=\dfrac{x}{\operatorname{tg} e^x}$

v) $y=\arccos\ln(x^8-\sin x)$

w) $y=\dfrac{5x^2}{x^2+1}\sin^3 x\cos^4 x$

z) $y=\log_6\sin e^{2x}$

Cvičenie 5.3. Vypočítajte $f''(0)$ a $f''(1)$, ak

a) $f(x)=x^5-7x+12$

b) $f(x)=x\sqrt{x^2+3}$

c) $f(x)=\operatorname{tg}2x$

d) $f(x)=xe^{-x^2}$

Aplikácie derivácií: L'Hospitalovo pravidlo

Pre limitu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$ platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokiaľ platia nasledujúce vlastnosti:

- existuje okolie bodu a, v ktorom funkcie f a g majú deriváciu,
- $g'(x)\neq 0$ v tom okolí,
- existuje limita $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

V prípade neurčitej limity typu $0\cdot\infty$, môžeme súčin $f(x)\cdot g(x)$ písať v tvare $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ alebo $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ a dostanema teda limity typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$, na čo už vieme aplikovať L´Hospitalovo pravidlo.

Cvičenie 5.4. Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^8-x}{x^8-1}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{6}}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$ h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+1}{2x^4+6x-5}$

j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2^x}$ l) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg}x}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ n) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ o) $\lim\limits_{x\to0+}\ln x\sin x$

p) $\lim\limits_{x\to0}x^2\,e^{\frac{1}{x^2}}$ q) $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x\,\ln\dfrac{1}{x}$ r) $\lim\limits_{x\to\infty}x\,\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Výsledky: a) 2 b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ e) $\frac{5}{2}$ f) 3 g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{-1}{2}$
i) 0 j) 1 k) 0 l) 0 m) 0 n) 2 o) 0 p) ∞ q) 0 r) 0

Aplikácie derivácií: Taylorov polynóm

Chceme aproximovať funkciu f v okolí bodu x_0 pomocou polynómu n-tého stupňa

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \ldots + A_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

tak, aby

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ P_n''(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned} \qquad (2)$$

Dosadením (1) do (2) vypočítame koeficienty A_i polynómu $P_n(x)$:

Definícia 5.3:

- **Taylorov polynóm (n-tého stupňa) funkcie f v bode** x_0 (ozn. $T_n(x)$):

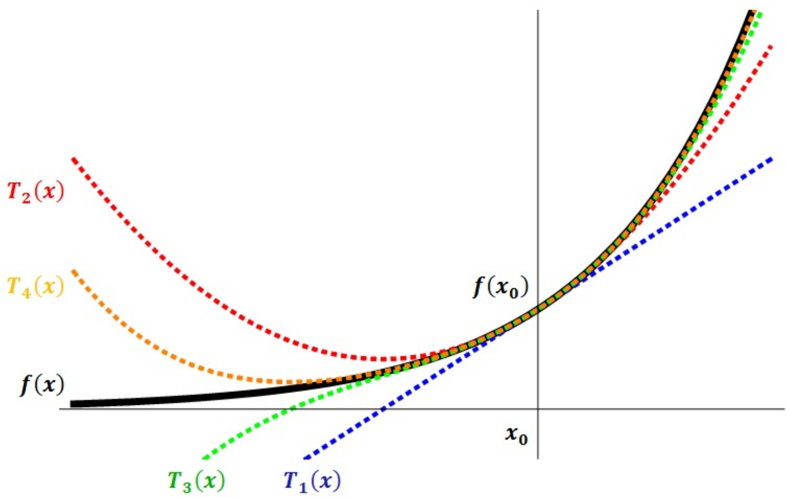
  $$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

  kde $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1$

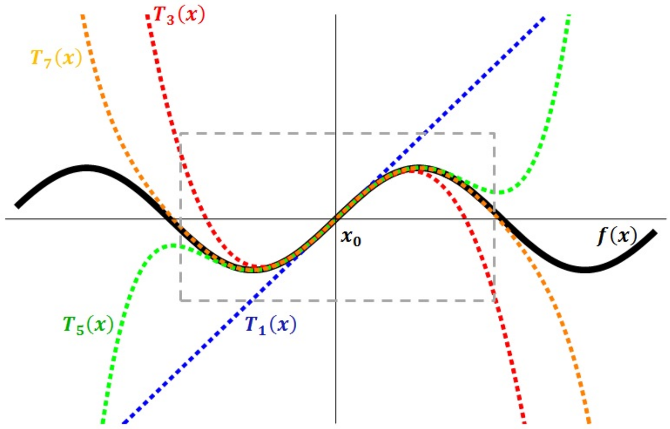
- **Taylorov vzorec:** $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, kde $R_n(x)$ je chyba akej sa dopúšťame, ak aproximujeme $f(x) \approx T_n(x)$,

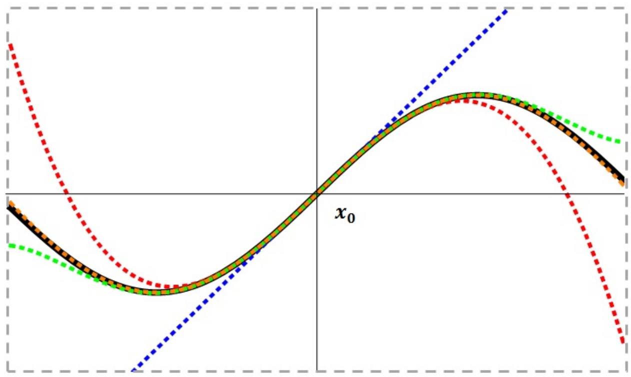
  $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x)$$

Na obrázku je funkcia $f(x) = e^x$ a Taylorové polynómy tejto funkcie v bode $x_0 = 0$ stupňa $n = 1, 2, 3, 4$.



Na obrázku je funkcia $f(x) = \sin x$ a Taylorové polynómy tejto funkcie v bode $x_0 = 0$ stupňa $n = 1, 3, 5, 7$.





Taylorov polynóm 1. stupňa je vlastne dotyčnicou funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, f(x_0)]$, teda je to priamka

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\big(x - x_0\big).$$

Dotykový vektor funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$ je vektor so súradnicami $(f'(x_0), -1)$.
Tzv. **normálový vektor** v bode $[x_0, f(x_0)]$ je vektor, ktorý je kolmý na dotykový vektor a prechádza bodom $[x_0, f(x_0)]$. Má súradnice $\big(-1, -f'(x_0)\big)$ alebo $\left(\dfrac{-1}{f'(x_0)}, -1\right)$.

Cvičenia

4. Nájdite Taylorov mnohočlen stupňa n v bode a pre funkciu

a) $y = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$ v bode 0, $n = 4$,

b) $y = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$ v bode -2, $n = 4$,

c) $y = e^{-\frac{x}{2}}$ v bode 0, $n = 4$,

d) $y = \ln x$ v bode 1, $n = 5$,

e) $y = \sqrt{x}$ v bode 1, $n = 4$,

f) $y = \operatorname{tg} x$ v bode $\frac{\pi}{4}$, $n = 3$,

g) $y = \operatorname{arctg} x$ v bode 0, $n = 3$.

Výsledky

4. a) aj b) $T_4(x) = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$,
c) $T_4(x) = \frac{x^4}{384} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + 1$,
d) $T_5(x) = -\frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{10x^3}{3} - 5x^2 + 5x - \frac{137}{60}$,
e) $T_4(x) = -\frac{5x^4}{128} + \frac{7x^3}{32} - \frac{35x^2}{64} + \frac{35x}{32} + \frac{35}{128}$,
f) $T_3(x) = \frac{8}{3}x^3 + 2(1-\pi)x^2 + (\frac{\pi^2 - 2\pi + 4}{2})x + 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{24}$,
g) $T_3(x) = -\frac{x^3}{3} + x$.

Aplikácie derivácií: Priebeh funkcie

Monotónnosť:

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode intervalu (a,b) deriváciu, potom

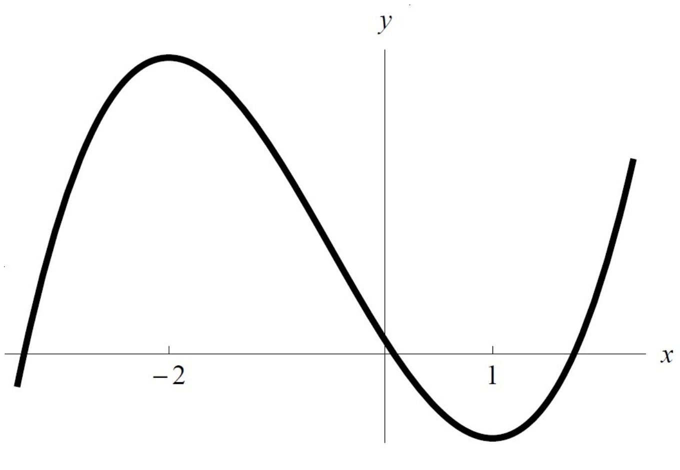
a.) ak $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **rastúca** na intervale (a,b),

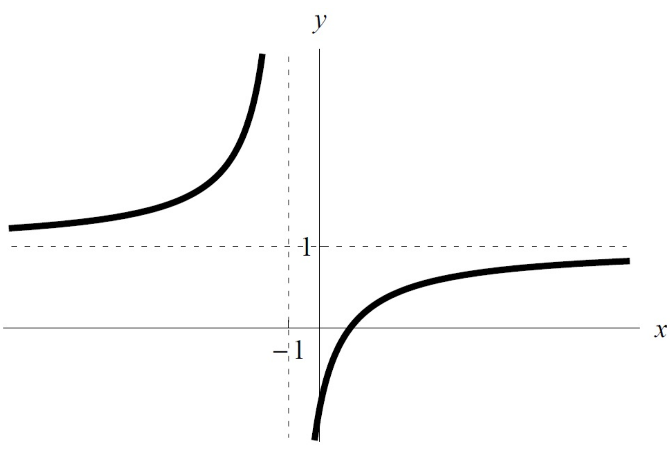
b.) ak $f'(x) < 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **klesajúca** na intervale (a,b),

c.) ak $f'(x) \geq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **neklesajúca** na intervale (a,b),

d.) ak $f'(x) \leq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **nerastúca** na intervale (a,b).

Na obrázku vľavo je graf funkcie $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, vpravo $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

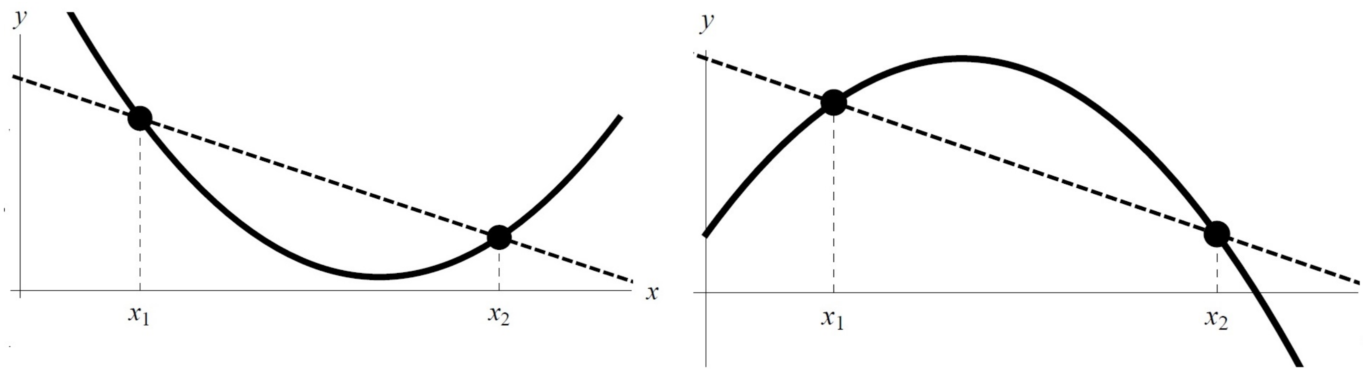




Konvexnosť-konkávnosť:

Definícia 5.4:

- **Konvexná funkcia na intervale I:** pre všetky body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a pre každú konštantu $t \in (0,1)$ platí, že
$$f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_2\big) \leq t\,f(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
(obrázok vľavo), t.j. ak graf funkcie na intervale (x_1, x_2) leží **pod** priamkou, ktorá spája body $f(x_1)$ a $f(x_2)$



- **Konkávna funkcia na intervale I:** pre všetky body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a pre každú konštantu $t \in (0,1)$ platí, že
$$f\big(t\,x_1 + (1-t)\,x_2\big) \geq t\,f(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
(obrázok vpravo), t.j. ak graf funkcie na intervale (x_1, x_2) leží **nad** priamkou, ktorá spája body $f(x_1)$ a $f(x_2)$

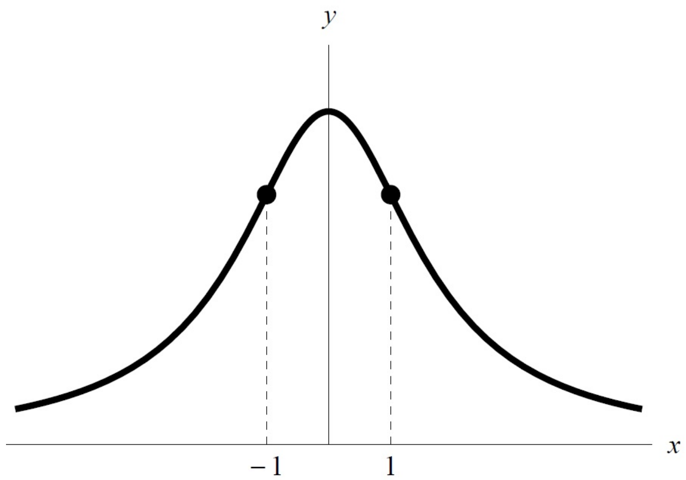
- **Inflexný bod:** bod, v ktorom sa konvexnosť mení na konkávnosť alebo naopak

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode intervalu (a,b) prvú a druhú deriváciu, potom

a.) ak $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **konvexná** na intervale (a,b),

b.) ak $f''(x) \leq 0$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak f je **konkávna** na intervale (a,b)

Na obrázku je graf funkcie $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$



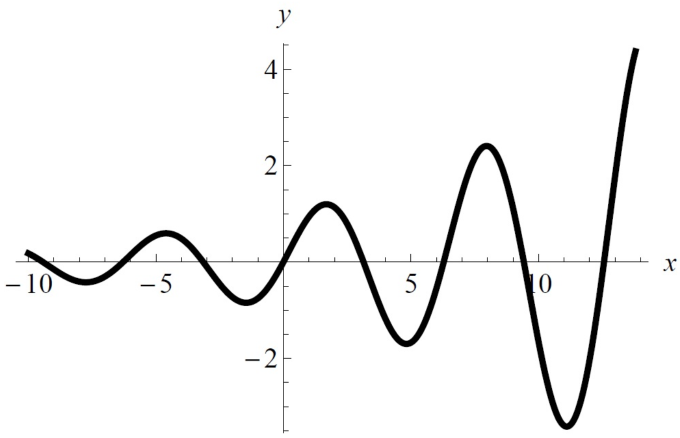
Lokálne, globálne extrémy:

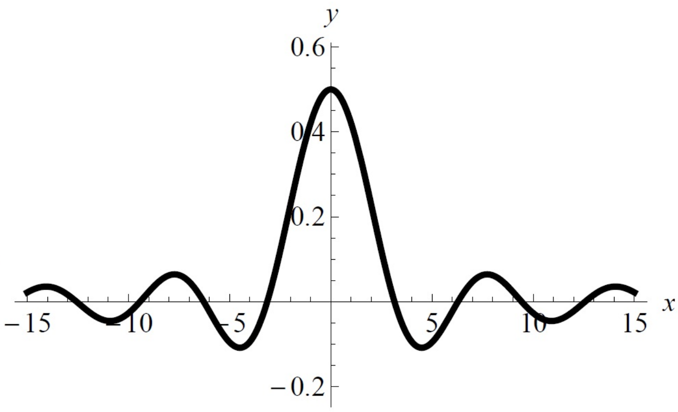
Definícia 5.5:

- **Lokálne minimum**, resp. **lokálne maximum funkcie f v bode x_0:** (obrázok vľavo) ak existuje ε-ové okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu x_0, že pre všetky $x \in O_\varepsilon(x_0)$ platí

$$f(x_0) \le f(x), \quad \text{resp.} \quad f(x_0) \ge f(x).$$

- **Globálne minimum**, resp. **globálne maximum funkcie f v bode x_0:** (obrázok vpravo) ak $f(x_0) \le f(x)$, resp. $f(x_0) \ge f(x)$ platí pre všetky body z definičného oboru funkcie f.





Hľadanie extrémov pomocou prvej derivácie:

Ak pre okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$ platí, že

$$f'(x) > 0 \quad \text{pre} \quad x < x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam rastúca)}$$

a

$$f'(x) < 0 \quad \text{pre} \quad x > x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam klesajúca)},$$

tak v bode x_0 má funkcia **lokálne maximum**.

Ak pre okolie $O_\varepsilon(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$ platí, že

$$f'(x) < 0 \quad \text{pre} \quad x < x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam klesajúca)}$$

a

$$f'(x) > 0 \quad \text{pre} \quad x > x_0 \quad \text{(t.j. funkcia je tam rastúca)},$$

tak v bode x_0 má funkcia **lokálne minimum**.

Nech f je spojitá na intervale (a,b), má v každom bode $x_0 \in (a,b)$ deriváciu a nech má v tomto bode lokálny extrém. Potom $f'(x_0) = 0$.

!!!Opačná implikácia nemusí platiť!!!

Definícia 5.6:

- **Stacionárny bod:** bod, pre ktorý platí $f'(x_0) = 0$

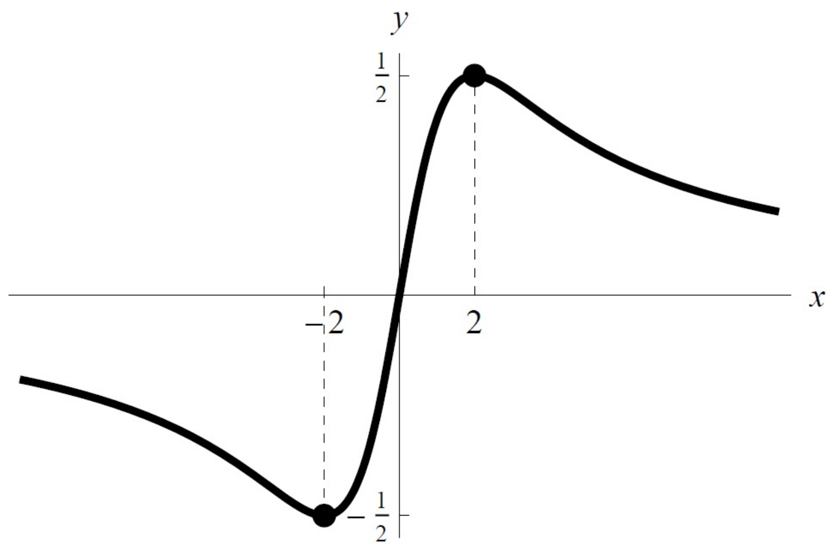
Hľadanie extrémov pomocou druhej derivácie:

Nech $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ má v bode $x_0 \in (a,b)$ prvú aj druhú deriváciu a nech $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Potom

a.) ak $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 **lokálne maximum**,

b.) ak $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 **lokálne minimum**.

Na obrázku je graf funkcie $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$



Asymptoty grafu funkcie:

Asymptota je priamka, ku ktorej sa graf funkcie blíži, ale nikdy nepretína - dotyčnica v nekonečnu.
Definícia 5.7:

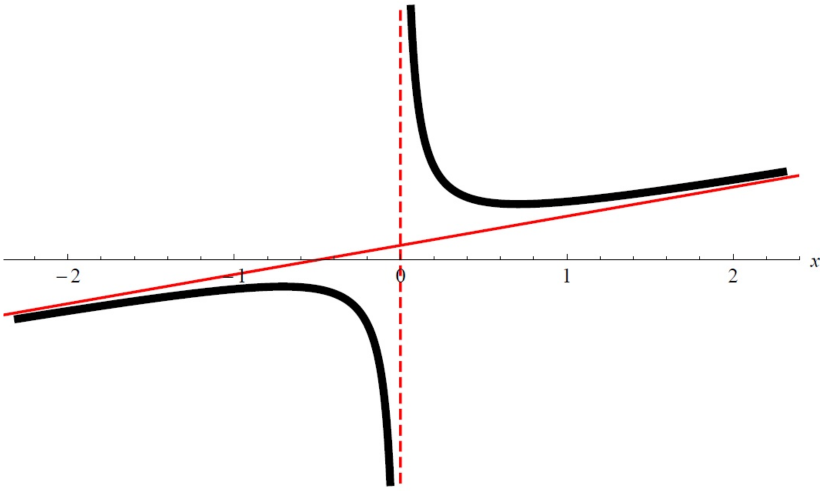
- **Asymptota bez smernice:** priamka daná rovnicou $x = a$, ak sa nastane aspoň jeden z nasledujúcich prípadov

  1) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$

- **Asymptota so smernicou:** priamka daná rovnicou $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big)$$

Na obrázku je graf funkcie $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{8x}$



Priebeh funkcie:

Vlastnosti, ktoré treba vyšetriť:

1) definičný obor
2) všetky body nespojitosti a intervaly spojitosti
3) priesečníky s osou x a y
4) párnosť/nepárnosť, periodičnosť
5) intervaly monotónnosti, intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexné body, lokálne extrémy
6) asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou
7) nakresliť graf

Cvičenie 4.5. Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$ a načrtnite jej graf:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

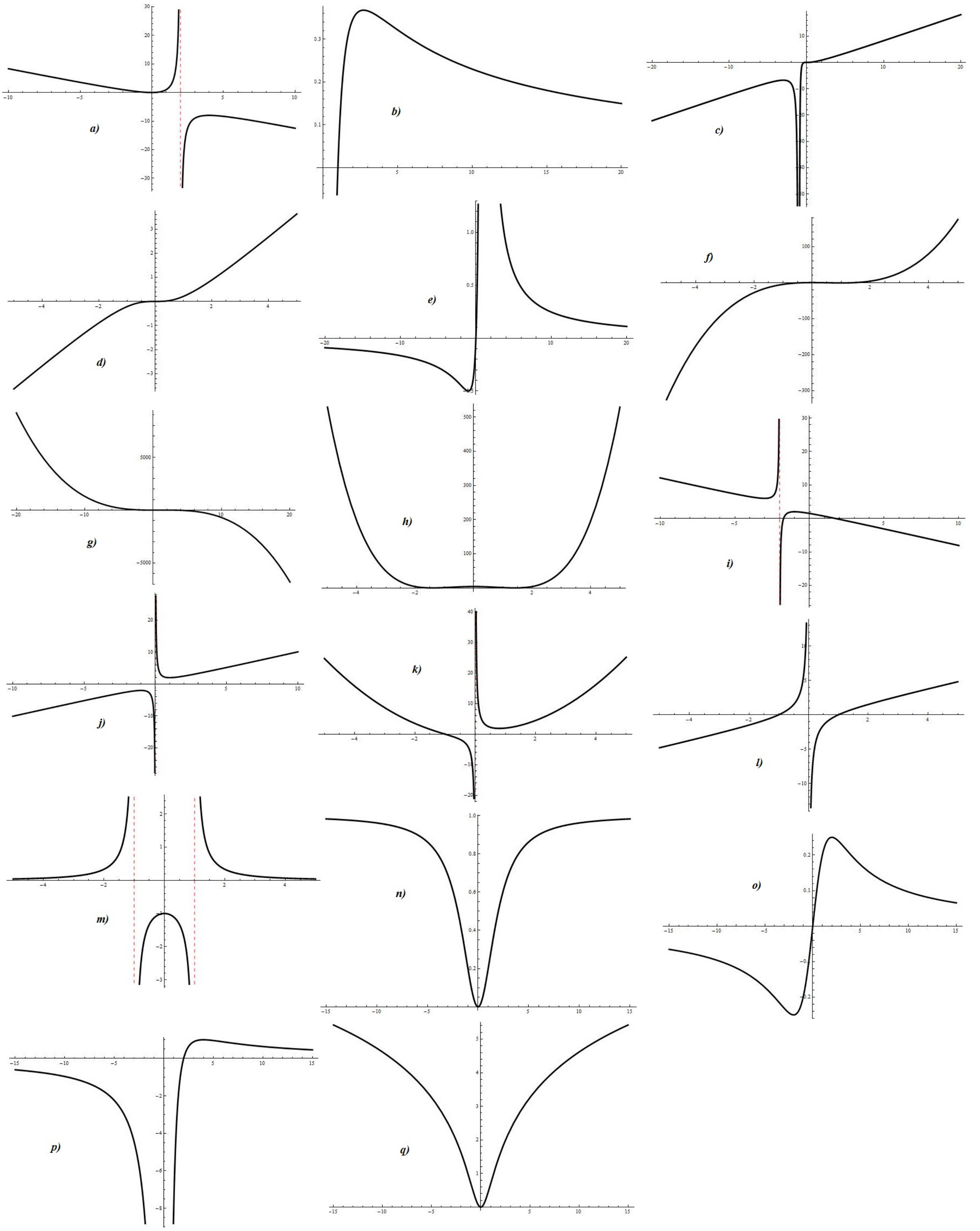
d) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ e) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$ f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

g) $f(x) = 2 - x^3 + 3x^2$ h) $f(x) = (2-x^2)^2$ i) $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+2}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ k) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ l) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ n) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ o) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

p) $f(x) = \dfrac{8(x-2)}{x^2}$ q) $f(x) = \ln(1+x^2)$ r) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} + x$


a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
k)
l)
m)
n)
o)
p)
q)