4. Reálne funkcie jednej reálnej premennej

Základné vlastnosti

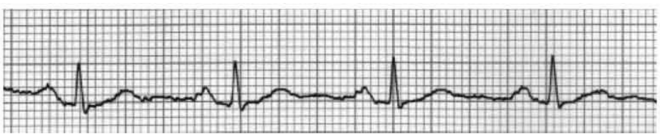
Definícia 4.1:

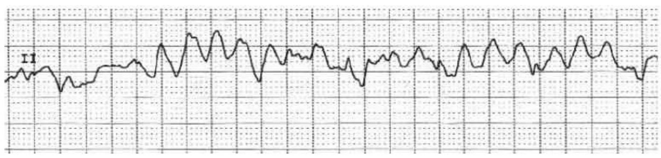
- **Funkcia (zobrazenie) -** (ozn. $f : M \to P$): predpis, podľa ktorého každému prvku $x \in M$ je priradený práve jeden prvok $y \in P$ (x - **vzor**, nezávislá premenná ; y - **obraz**, závislá premenná), t.j. $x \mapsto y = f(x)$
  Je to akoby čierna skrinka, do ktorej vchádza x a vychádza $f(x)$

- **Reálna funkcia jednej reálnej premennej :** funkcia $f : M \to P$, kde $M, P \subset \mathbb{R}$
- **Definičný obor funkcie** f **-** (ozn. $D(f)$): množina M, t.j. množina všetkých čísel x, pre ktoré predpis $f(x)$ má zmysel
- **Obor hodnôt funkcie** f **-** (ozn. $H(f)$): obraz množiny M, t.j. množina všetkých hodnôt y, ktoré môže funkcia nadobúdať
- **Postupnosť -** (ozn. $f(n) = a_n$): funkcia definovaná na množine prirodzených čísel
- **Rovnosť funkcie** f **a** g **-** (ozn. $f = g$): $D(f) = D(g)$ a pre všetky prvky $x \in D(f)$ platí, že $f(x) = g(x)$
- **Graf funkcie** f **:** množina bodov $[x, y]$ v rovine, pre ktoré platí $y = f(x)$

Spôsob zadávania funkcií:

- analyticky: predpisom $y = f(x)$
- graficky: napr. EKG, barometer
- tabuľkou: ak máme konečný počet bodov, napr. zápis meraní



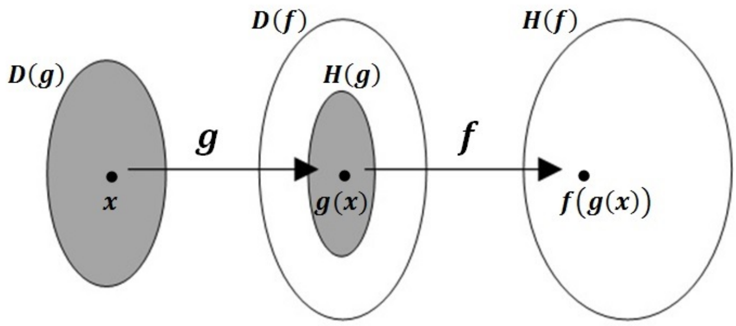


Základné operácie s funkciami: Nech sú dané funkcie $f: D(f) \to \mathbb{R}$ a $g: D(g) \to \mathbb{R}$. Potom môžeme definovať

- **súčet funkcií** f **a** g: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **rozdiel funkcií** f **a** g: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **súčin funkcií** f **a** g: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$
- **podiel funkcií** f **a** g: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pre všetky $x \in D(f) \cap D(g)$ pričom $g(x) \neq 0$
- **superpozícia (zloženie) funkcií** f **a** g: Nech pre každé $x \in D(g)$ je hodnota $g(x) \in D(f)$. Potom na množine $D(g)$ môžeme definovať funkciu

  $$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big),$$

  kde f je tzv. **vonkajšia zložka** a g je tzv. **vnútorná zložka**.



Cvičenie 4.1. Nájdite definičné obory funkcií $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$, $h(x) = \frac{x^2+2x}{x-x^2}$, $i(x) = \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$, $j(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$, $k(x) = \sqrt{|x-1|-2}$, $l(x) = \frac{1}{|x|-3}$, $m(x) = \frac{2}{\sqrt{1-|x+1|}}$. Nájdite hodnoty týchto funkcií v bode $x = 5$.

Cvičenie 4.2. Zistite, či sa rovnajú funkcie

a) $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x^2}$

c) $f(x) = x$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$, $h(x) = \sqrt{x^2}$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $g(x) = x+1$

e) $f(x) = |x|$, $g(x) = x$

f) $f(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}x}$, $g(x) = \mathrm{ctg}x$

g) $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$, $g(x) = \ln(x+2)(x-2)$

h) $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2)$, $g(x) = \ln\frac{x+2}{x-2}$

i) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt{x^2}}$, $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Cvičenie 4.3. Nájdite $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$, ak

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \sin x$

c) $f(x) = 2\ln x$, $g(x) = x^3 - 2$ d) $f(x) = 1 + e^x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

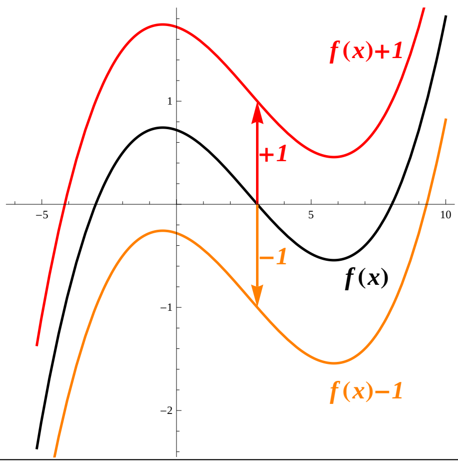
d) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$ e) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \mathrm{tg} x$

Pomocou grafu funkcie f a určitými geometrickými transformáciami, môžeme nakresliť grafy určitých funkcií.

<table>
<tr><th>Nová funkcia:</th><th>Geometrická transformácia grafu funkcie f :</th></tr>
<tr><td>$y = f(x) + a$,
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$</td><td>posunutie grafu funkcie f v smere osi y o hodnotu a

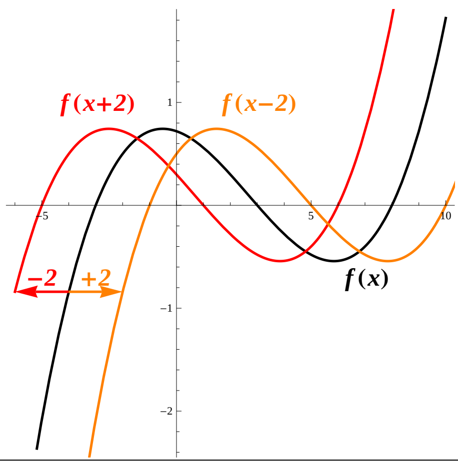
$a > 0$ - posunutie nahor

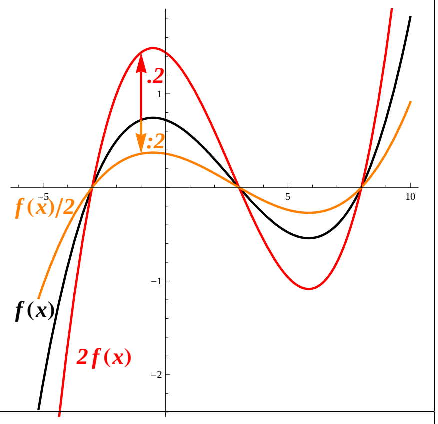
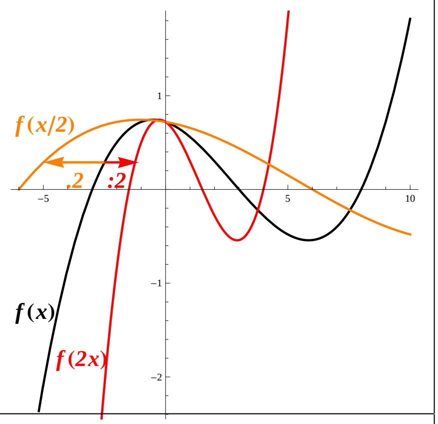
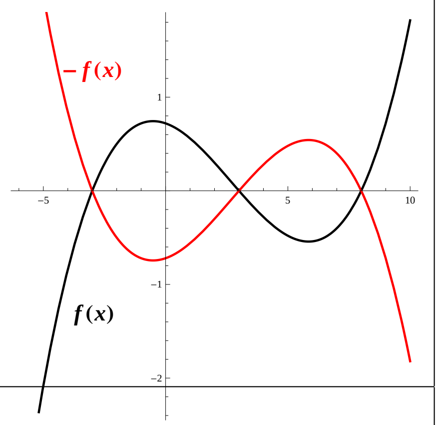
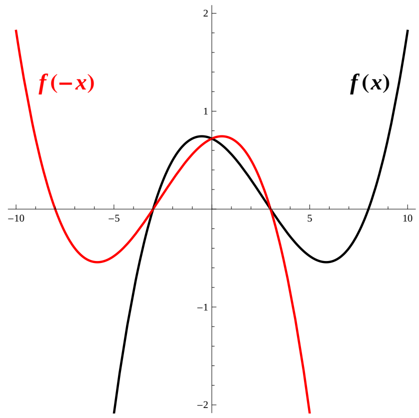
$a < 0$ - posunutie nadol


</td></tr>
<tr><td>$y = f(x + a)$,
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$</td><td>posunutie grafu funkcie f v smere osi x o hodnotu $-a$

$a > 0$ - posunutie doľava

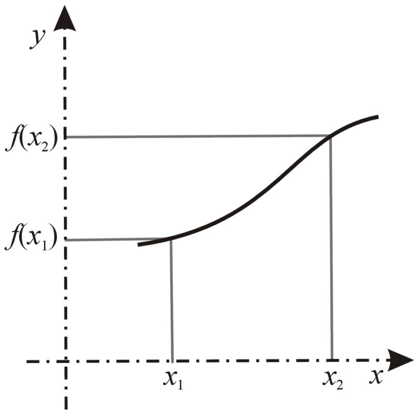
$a < 0$ - posunutie doprava

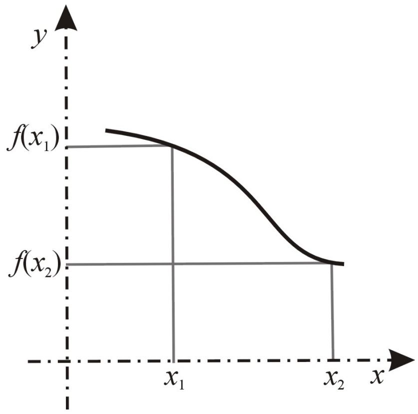

</td></tr>
</table>

Nová funkcia:	**Geometrická transformácia grafu funkcie f :**
$y = af(x)$, $a > 0$	$a > 1$ - roztiahnutie grafu funkcie f od osi x a-krát $0 < a < 1$ - stlačenie grafu funkcie f k osi x $\frac{1}{a}$-krát 
$y = f(ax)$, $a > 0$	$a > 1$ - stlačenie grafu funkcie f k osi y a-krát $0 < a < 1$ - roztiahnutie grafu funkcie f od osi y $\frac{1}{a}$-krát 
$y = -f(x)$	s grafom funkcie f je osovo súmerný podľa osi x 
$y = f(-x)$	s grafom funkcie f je osovo súmerný podľa osi y 

Definícia 4.2: Základné vlastnosti funkcie $f : D(f) \to \mathbb{R}$:

- **monotónnosť :** ak pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$ s vlastnosťou $x_1 < x_2$
  -rastúca: $f(x_1) < f(x_2)$ **-klesajúca:** $f(x_1) > f(x_2)$



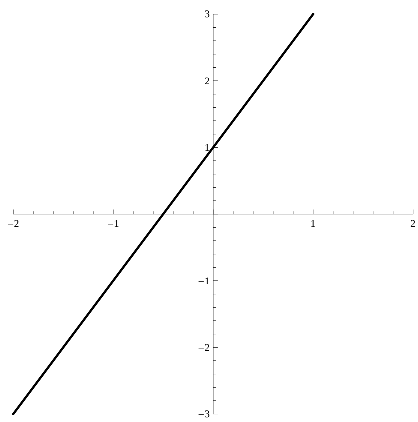


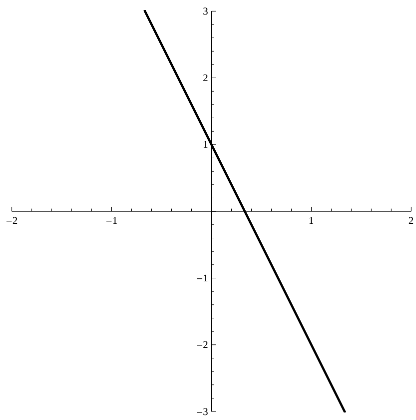
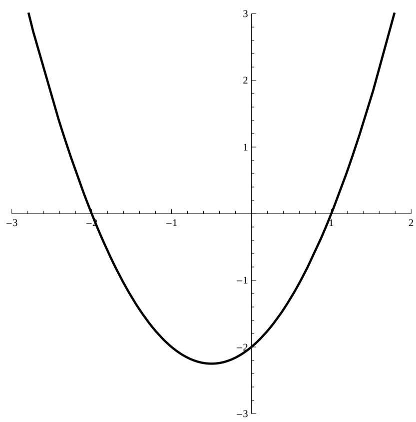
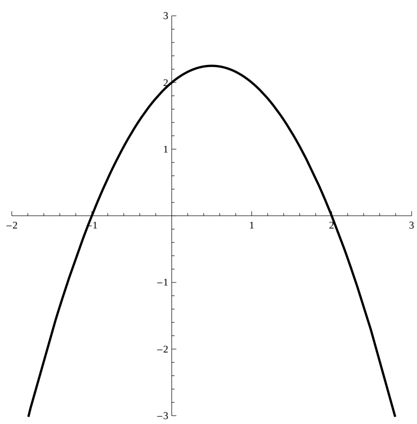
- **ohraničenosť zhora** a/alebo **zdola :** ak množina oboru hodnôt je ohraničená zhora a/alebo zdola, tak hovoríme, že funkcia je zhora a/alebo zdola ohraničená, t.j. ak

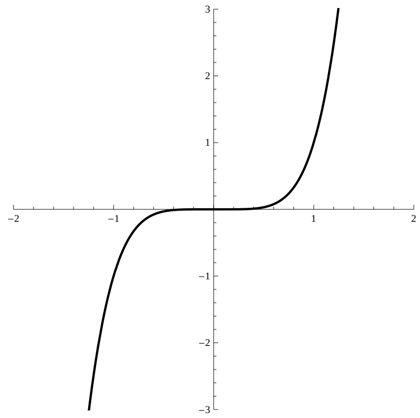
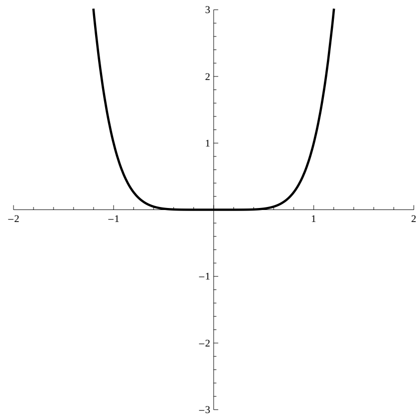
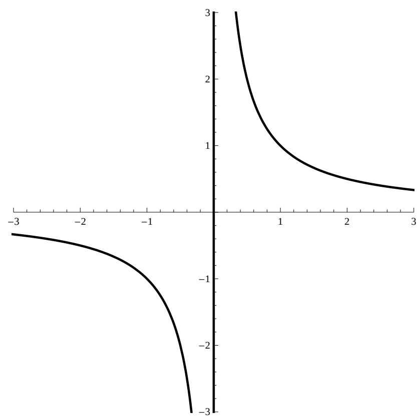
$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(f): \ f(x) \leq k \qquad \text{a/alebo} \qquad \exists l \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(f): \ f(x) \geq l$$

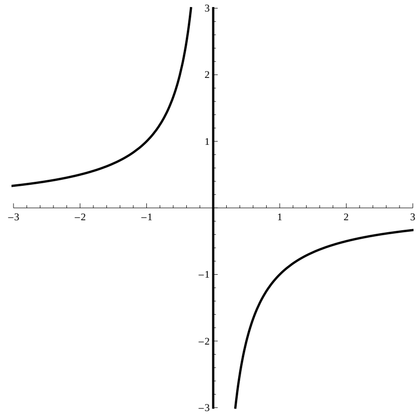
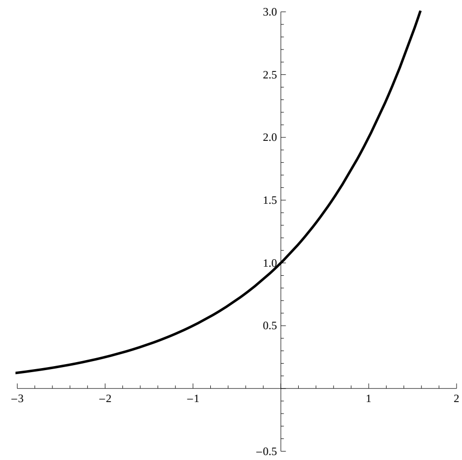
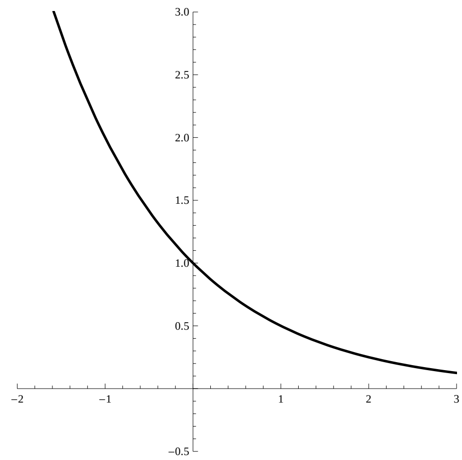
- **párnosť/nepárnosť :** ak pre všetky $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$
  - **párna:** $f(-x) = f(x)$ - graf je súmerný podľa osi y
  - **nepárna:** $f(-x) = -f(x)$ - graf je súmerný podľa začiatku súradnicového systému
- **periodičnosť :** nech $p > 0$ (**základná perióda**) a pre všetky $x \in D(f)$ aj $x + p \in D(f)$ a aj $x - p \in D(f)$, potom funkcia f je **periodická s periódou** p, ak $f(x+p) = f(x) = f(x-p)$

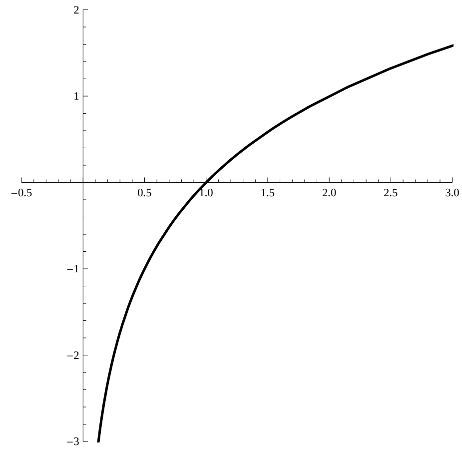
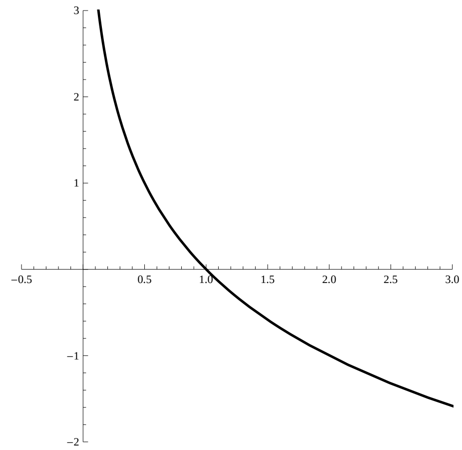
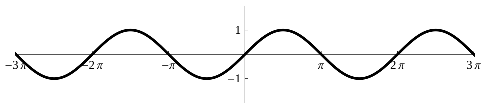
Prehľad elementárnych funkcií a ich základné vlastnosti:

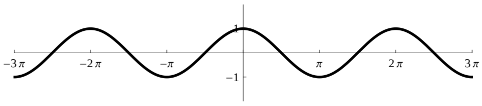
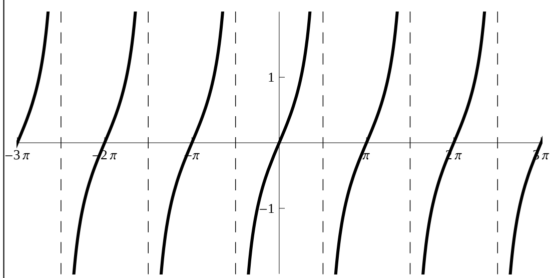
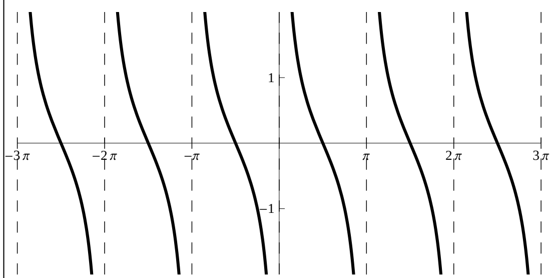
Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = ax + b$, $a > 0$ - **lineárna funkcia** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je nepárna	

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = ax + b$, $a < 0$ - **lineárna funkcia** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** klesajúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je nepárna	
$y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ - **kvadratická funkcia** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = \langle y^V, \infty)$ • **ohraničenosť:** zdola ohraničená, zhora neohraničená • **monotónnosť:** klesajúca na $(-\infty, x^V\rangle$, rastúca na $\langle x^V, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je párna	
$y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$ - **kvadratická funkcia** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = (-\infty, y^V\rangle$ • **ohraničenosť:** zdola neohraničená, zhora ohraničená • **monotónnosť:** rastúca na $(-\infty, x^V\rangle$, klesajúca na $\langle x^V, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** ak $b \neq 0$, tak nie je ani párna ani nepárna, ak $b = 0$, tak je párna	

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = x^n$, n je nepárne číslo - **mocninová funkcia** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nepárna	
$y = x^n$, n je párne číslo - **mocninová funkcia** • $D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = \langle 0, \infty)$ • **ohraničenosť:** zdola ohraničená, zhora neohraničená • **monotónnosť:** klesajúca na $(-\infty, 0\rangle$, rastúca na $\langle 0, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** párna	
$y = \frac{k}{x}$, $k > 0$ - **nepriama úmernosť** • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** klesajúca na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** nepárna	

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = \frac{k}{x}$, $k < 0$ - **nepriama úmernosť** • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ • **párnosť/nepárnosť:** nepárna	
$y = a^x$, $a > 1$ - **exponenciálna funkcia** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = (0, \infty)$ • **ohraničenosť:** zdola ohraničená, zhora neohraničená • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	
$y = a^x$, $0 < a < 1$ - **exponenciálna funkcia** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = (0, \infty)$ • **ohraničenosť:** zdola ohraničená, zhora neohraničená • **monotónnosť:** klesajúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	

Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = \log_a x$, $a > 1$ - **logaritmická funkcia** • $D(f) = (0, \infty)$ $\quad$ $H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	
$y = \log_a x$, $0 < a < 1$ - **logaritmická funkcia** • $D(f) = (0, \infty)$ $\quad$ $H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** klesajúca na celom svojom definičnom obore • **párnosť/nepárnosť:** nie je ani párna ani nepárna	
$y = \sin x$ - **funkcia sinus** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad$ $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$ • **ohraničenosť:** ohraničená zdola aj zhora • **monotónnosť:** rastúca na $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, klesajúca na $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ • **párnosť/nepárnosť:** nepárna • **periodičnosť:** periodická s periódou $p = 2\pi$	

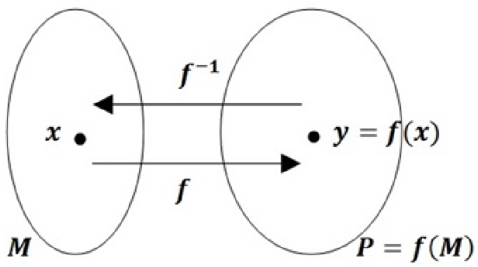
Vlastnosti funkcie f :	**Graf funkcie f :**
$y = \cos x$ - **funkcia kosínus** • $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$ • **ohraničenosť:** ohraničená zdola aj zhora • **monotónnosť:** klesajúca na $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, rastúca na $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ • **párnosť/nepárnosť:** párna • **periodičnosť:** periodická s periódou $p = 2\pi$	
$y = \mathrm{tg} x$ - **funkcia tangens** • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$ $\quad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** rastúca na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$, • **párnosť/nepárnosť:** nepárna • **periodičnosť:** periodická s periódou $p = \pi$	
$y = \mathrm{cotg} x$ - **funkcia kotangens** • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$ $\quad H(f) = \mathbb{R}$ • **ohraničenosť:** nie je ohraničená ani zdola ani zhora • **monotónnosť:** klesajúca na $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ • **párnosť/nepárnosť:** nepárna • **periodičnosť:** periodická s periódou $p = \pi$	

Definícia 4.3:

- **Prostá (injektívna) funkcia :** ak pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- **Inverzná funkcia k funkcii f -** (ozn. f^{-1}): funkcia, ktorá každému $y \in P$ priradí práve to $x \in M$, ktoré funkcia f zobrazí na bod $y \in P$, pričom f musí byť prostá funkcia na množine M a $P = f(M)$



Vlastnosti inverznej funkcie:

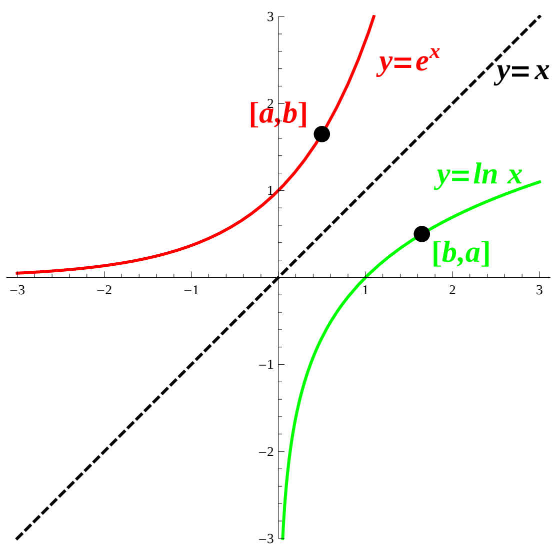
- **VIF1:** každá rýdzomonotónna funkcia je prostá
- **VIF2:** pre všetky $x \in M$, resp. $y \in P$ platí, že

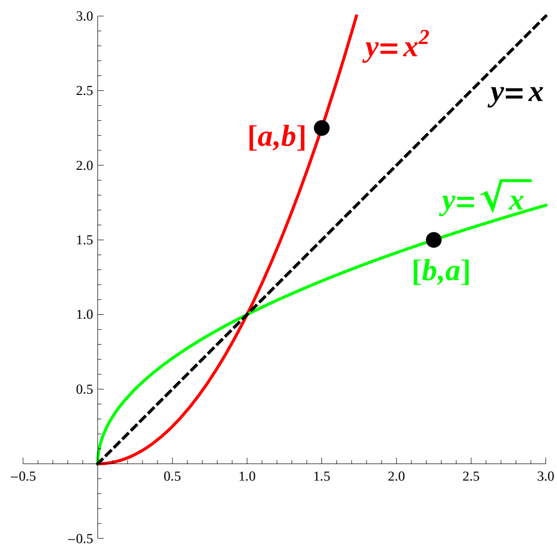
$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x, \qquad \text{resp.} \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

- **VIF3:** $D(f^{-1} = H(f)), H(f^{-1}) = D(f)$

Zistiť inverznú funkciu f^{-1} k funkcii f možno:

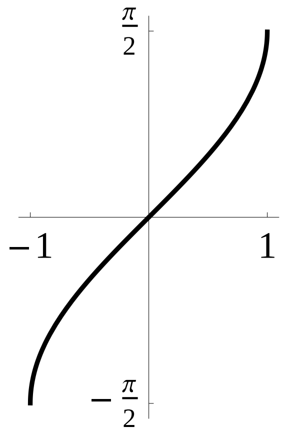
1) graficky: zobrazíme graf funkcie f v osovej súmernosti s osou na priamke $y = x$
2) výpočtom: navzájom vymeníme premenné x a y, t.j. $x = f(y)$ a vyjadríme z toho y





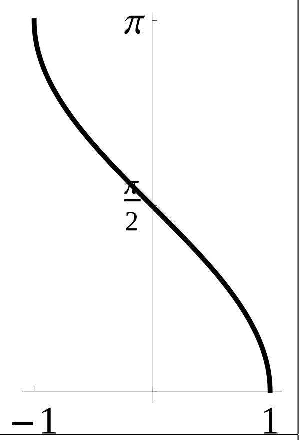
<table>
<tr><th>Vlastnosti funkcie f :</th><th>Graf funkcie f :</th></tr>
<tr><td>
Inverzná funkcia k funkcii $y = \sin x$ pre $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
$y = \arcsin x$ - funkcia arkussinus

$D(f) = \langle -1, 1 \rangle \qquad H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
ohraničenosť: ohraničená zdola aj zhora
monotónnosť: rastúca na celom svojom definičnom obore
párnosť/nepárnosť: nepárna

</td><td>


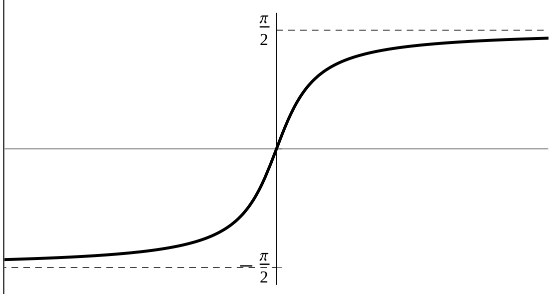
</td></tr>
<tr><td>
Inverzná funkcia k funkcii $y = \cos x$ pre $x \in \langle 0, \pi \rangle$
$y = \arccos x$ - funkcia arkuskosinus

$D(f) = \langle -1, 1 \rangle \qquad H(f) = \langle 0, \pi \rangle$
ohraničenosť: ohraničená zdola aj zhora
monotónnosť: klesajúca na celom svojom definičnom obore
párnosť/nepárnosť: nie je ani párna ani nepárna

</td><td>


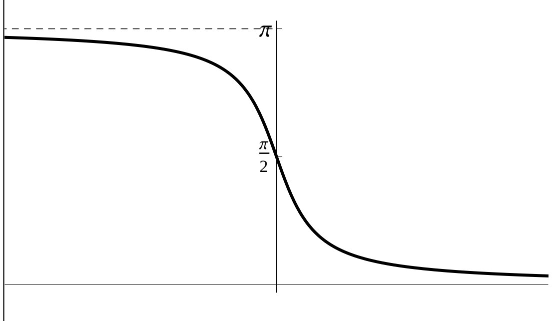
</td></tr>
<tr><td>
Inverzná funkcia k funkcii $y = \mathrm{tg}\, x$ pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
$y = \mathrm{arctg}\, x$ - funkcia arkustangens

$D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
ohraničenosť: ohraničená zdola aj zhora
monotónnosť: rastúca na celom svojom definičnom obore
párnosť/nepárnosť: nepárna

</td><td>


</td></tr>
<tr><td>
Inverzná funkcia k funkcii $y = \mathrm{cotg}\, x$ pre $x \in (0, \pi)$
$y = \mathrm{arccotg}\, x$ - funkcia arkuskotangens

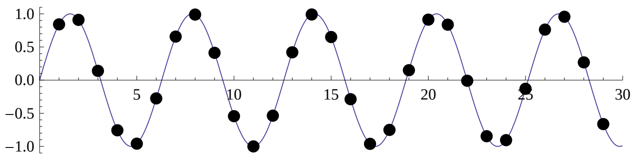
$D(f) = \mathbb{R} \qquad H(f) = (0, \pi)$
ohraničenosť: ohraničená zdola aj zhora
monotónnosť: klesajúca na celom svojom definičnom obore
párnosť/nepárnosť: nie je ani párna ani nepárna

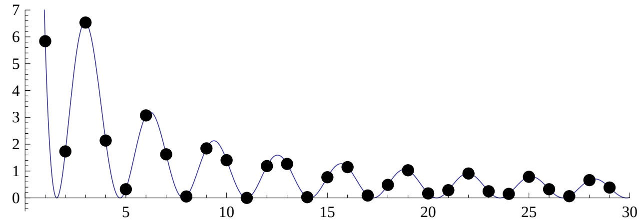
</td><td>


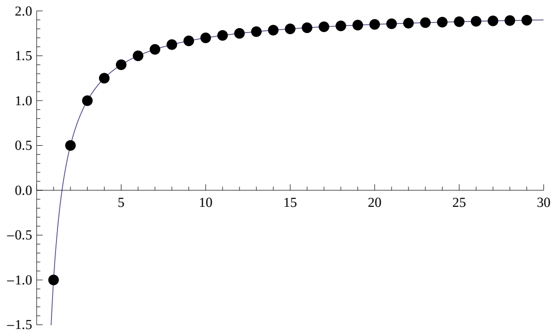
</td></tr>
</table>

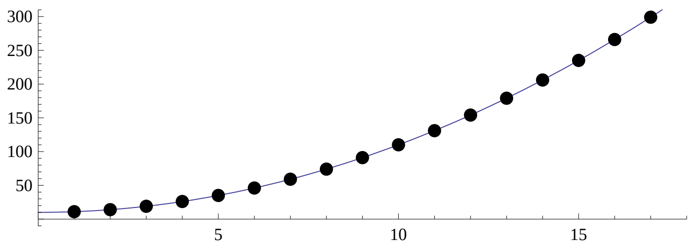
Limita postupnosti

limes = hranica









Definícia 4.4:

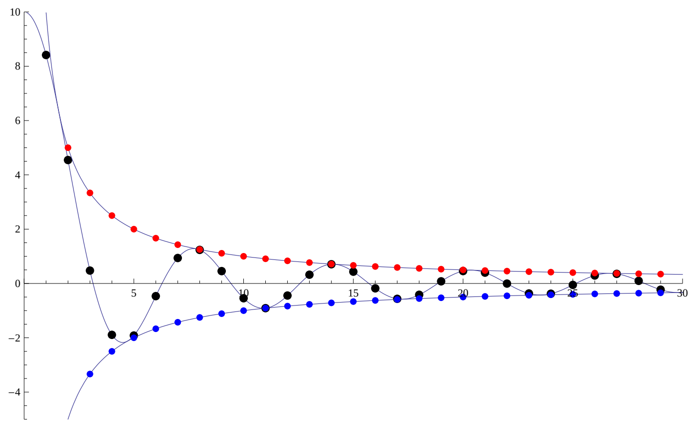
- **Limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **-** (ozn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ alebo $a_n \to a$)
- **Konvergentná postupnosť**: ak postupnosť má konečnú limitu $a \in R$
- **Divergentná postupnosť**: ak nie je konvergentná, t.j. neexistuje limita alebo to nie je konečné číslo
- **Vlastná limita postupnosti**: ak limita postupnosti je reálne číslo, t.j. ak postupnosť je konvergentná
- **Nevlastná limita postupnosti**: ak limita postupnosti je ∞ alebo $-\infty$

Vlastnosti limity postupnosti:

- Každá konvergentná postupnosť má iba jednu limitu
- Ak je postupnosť konvergentná, tak je ohraničená (!!!opačne to nemusí platiť!!!)
- Každá zhora ohraničená, rastúca postupnosť je konvergentná a konverguje k jej supremum
- Každá zdola ohraničená, klesajúca postupnosť je konvergentná a konverguje k jej infimum
- Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné postupnosti, pričom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, potom

- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n| = |a|$; $\lim\limits_{n\to\infty} (k\cdot a_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} k\cdot a_n) = k\cdot a$ pre $k\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$; $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$ za predpokladu, že $b_n \neq 0$ a $b\neq 0$

- Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ a pre skoro všetky n (tj. začínajúc od nejakého n_0) platí, že $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$
- Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, potom $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$



$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, lebo

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a postupnosť $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená

Významné limity:

$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ pre $c\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$ pre $k>0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pre $k>0$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ pre $q>1$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$ pre $q=1$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pre $q\in(-1,1)$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ neexistuje pre $q\leq -1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	

Počítanie s ∞ a $-\infty$:

Sčítanie:	$\infty+\infty=\infty$	$-\infty-\infty=-\infty$	$c+\infty=\infty$ pre $c\in\mathbb{R}$	$c-\infty=-\infty$ pre $c\in\mathbb{R}$
Násobenie:	$\pm\infty\cdot(\pm\infty)=\infty$	$\mp\infty\cdot(\pm\infty)=-\infty$	$c\cdot\infty=\infty$ pre $c>0$	$c\cdot\infty=-\infty$ pre $c<0$
Umocnenie:	$\infty^c=\infty$ pre $c>0$	$\infty^{-c}=\frac{1}{\infty^c}=0$ pre $c>0$	$c^\infty=\infty$ pre $c>1$	$c^\infty=0$ pre $c\in(-1,1)$
!!!Neurčité limity!!!	$\infty-\infty=?$	$0\cdot\infty=?$	$\frac{0}{0}=?$	$\frac{\infty}{\infty}=?$

Cvičenie 4.4. Vypočítajte limity postupnosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^4-5n^2+6)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1-n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1-n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}\right)^3$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)\left(\frac{2}{n^2}-3\right)^2\right]$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-3n+2}{2n^4-3n^3+n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+3}}{n-2}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+\sqrt{n^3+3}}{n^2+n-2}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{n^2}{n+3}\right)$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+1}-2n\right)$ k) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ l) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{n+1}$ n) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ o) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

p) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$ q) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$ r) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{5n-3}$

s) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7-3^n}{2.3^n+3}$ t) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ u) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{1+4^n}$

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{2^n}$ w) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^3}-\frac{10\sin(2n)}{9n-3\sqrt{n}}\right)$ z) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{\cos n}{n}\right)$

Limita funkcie jednej premennej

Definícia 4.5:

- **Funckia má v bode** a **limitu** b **-** (ozn. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$): ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak $x \in (a-\delta, a+\delta)$, tak $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, t.j.ak body blízke bodu a majú funkčnú hodnotu blízku hodnote b.
- **Limita zprava -** (ozn. $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$): ak v definície limity funkcie platí, že $x_n > a$
- **Limita zľava -** (ozn. $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$): ak v definície limity funkcie platí, že $x_n < a$
- **Vlastná limita vo vlastnom bode** : $a \in \mathbb{R}$ a aj $b \in \mathbb{R}$
- **Nevlastná limita vo vlastnom bode** : $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \{-\infty, \infty\}$
- **Vlastná limita v nevlastnom bode** : $a \in \{-\infty, \infty\}$ a $b \in \mathbb{R}$
- **Nevlastná limita v nevlastnom bode** : $a \in \{-\infty, \infty\}$ a $b \in \{-\infty, \infty\}$

!!!Limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje práve vtedy, ak existujú $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ a rovnajú sa!!!

Významné limity:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^k} = \infty$ pre nepárne $k \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^k} = \infty$ pre párne $k \in \mathbb{N}$	$\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^k} = -\infty$ pre nepárne $k \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^k}$ neexistuje pre nepárne $k \in \mathbb{N}$	

Cvičenie 4.5. Vypočítajte limity funkcie:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \right)$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \right)$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{x^2+x-2}{x^2+2x} \right)$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{3x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x - \sin x}{x^3}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$ n) $\lim\limits_{x\to 1} (1 + 5\log x)^{\frac{1}{\log x}}$ o) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$ q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x}$ r) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1)$

s) $\lim\limits_{x\to\infty} \log\frac{x^2+x+3}{x^2-2}$ t) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$ u) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{3^{2x}-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{x}$ w) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$ z) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$

Cvičenie 4.6. Vypočítajte jednostranné limity funkcie f v bode a:

a) $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|},\quad a=1$ b) $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x},\quad a=0$

c) $f(x)=\frac{5}{(x-2)^3},\quad a=2$ d) $f(x)=\frac{1}{2-2^{1/x}},\quad a=0$

e) $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x+1} & \text{pre} \quad x<0 \\ 3x & \text{pre} \quad x\in\langle 0,2) \\ 1 & \text{pre} \quad x\geq 2 \end{cases},\quad a=-1,\ a=0,\ a=2$

Spojitosť funkcie jednej premennej

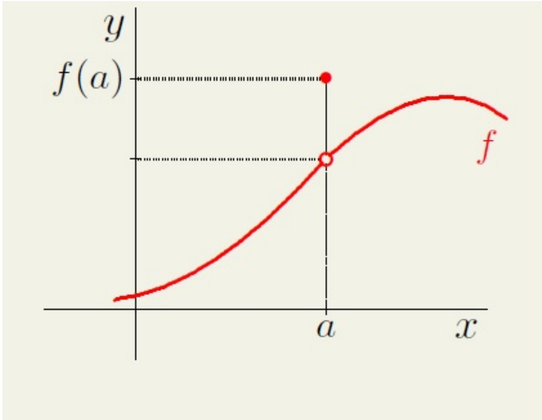
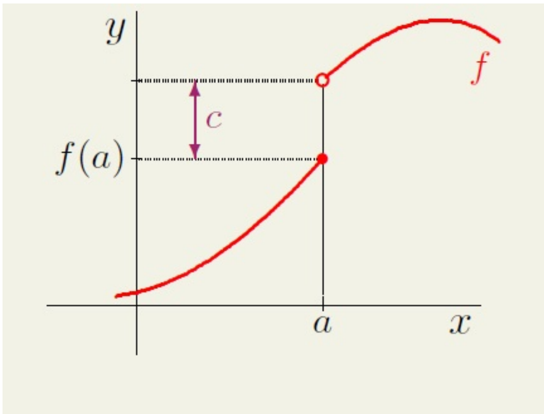
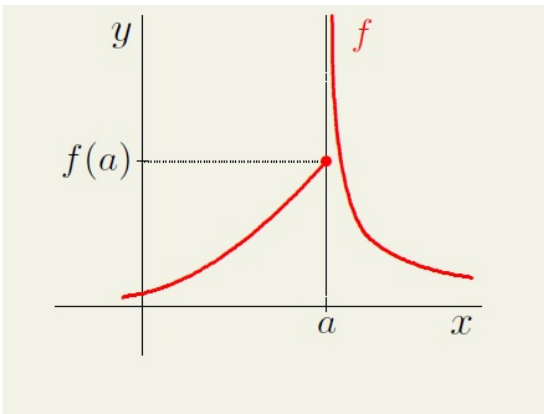
Definícia 4.6:

- **Funckia je spojitá v bode** $a\in D(f)$**:** ak pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(f)$ takú, že $x_n\to a$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$
- **Funkcia je spojitá na množine** M**:** ak je spojitá v každom bode $a\in M$
- **Bod nespojitosti funkcie :** bod, v ktorom funkcia nie je spojitá

Bod $a\in D(f)$ môže byť hromadným alebo izolovaným bodom množiny $D(f)$ (t.j. existuje také jeho okolie, v ktorom neleží žiadny iný bod $D(f)$) :

- funkcia f je vždy spojitá v izolovanom bode,
- ak a je hromadným bodom množiny $D(f)$, tak $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Typ bodov nespojitosti:

<table>
<tr><th>Typ nespojitosti</th><th>Znázornenie</th></tr>
<tr><td>Odstrániteľná nespojitosť:
existuje vlastná $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ale nerovná sa $f(a)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Neodstrániteľná nespojitosť 1. druhu:
neexistuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ale iba limita zprava a limita zľava a tieto sú vlastné a nerovnajú sa</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Typ nespojitosti</td><td>Znázornenie</td></tr>
<tr><td>Neodstrániteľná nespojitosť 2. druhu:
buď existuje len nevlastná limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, alebo neexistuje vôbec, len limita zprava a limita zľava a tieto sú (aspoň jedna) nevlastné</td><td>
</td></tr>
</table>

Vlastnosti spojitých funkcií:

- Každá elementárna funkcia je spojitá všade, kde je definovaná
- Súčet a súčin spojitých funkcií je spojitý
- Funkcia zložená zo spojitých funkcií je spojitá
- Inverzná funkcia spojitej funkcie je spojitá
- Ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$, potom
  - je ohraničená na $\langle a,b\rangle$
  - nadobúda na $\langle a,b\rangle$ svoje maximum a minimum
  - pokiaľ $f(a)>0$ a $f(b)<0$ (alebo opačne), tak existuje prvok $c\in\langle a,b\rangle$ taký, že $f(c)=0$

Cvičenie 4.7. Zistite, kde sú spojité nasledujúce funkcie. Nájdite body nespojitosti a zistite ich typ:

a) $f(x)=(x+3)^2\ \sin\dfrac{1}{(x+3)^2}$ b) $f(x)=e^{-1/x^2}$ c) $f(x)=\operatorname{sgn}(x(1-x^2))$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{x^3+5x^2+6x}$ e) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^x}{x} & \text{pre}\quad x<0\\ 2x-1 & \text{pre}\quad x\geq 0\end{cases}$ h) $f(x)=\sqrt{x}\,\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ i) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$

Cvičenie 4.8. Dokážte, že daná rovnica má na intervale I riešenie:

a) $x^3-x-1=0 \qquad I=\langle 1,2\rangle$ b) $x^3-6x^2+\dfrac{1}{x}+5=0 \qquad I=\langle 1,8\rangle$

c) $e^x+x=0 \qquad I=\langle -1,0\rangle$ d) $\cos x-kx=0,\ k\neq 0 \qquad I=\langle -\pi,\pi\rangle$

e) $\ln x-3+x=0 \qquad I=\langle 1,e\rangle$ f) $x^5-4x^3+2x^2+7x-8=0 \qquad I=\langle 1.3,1.4\rangle$

g) $x^4-4x^3+2x^2+5x-3=0 \qquad I=\langle -1.1,-1\rangle$