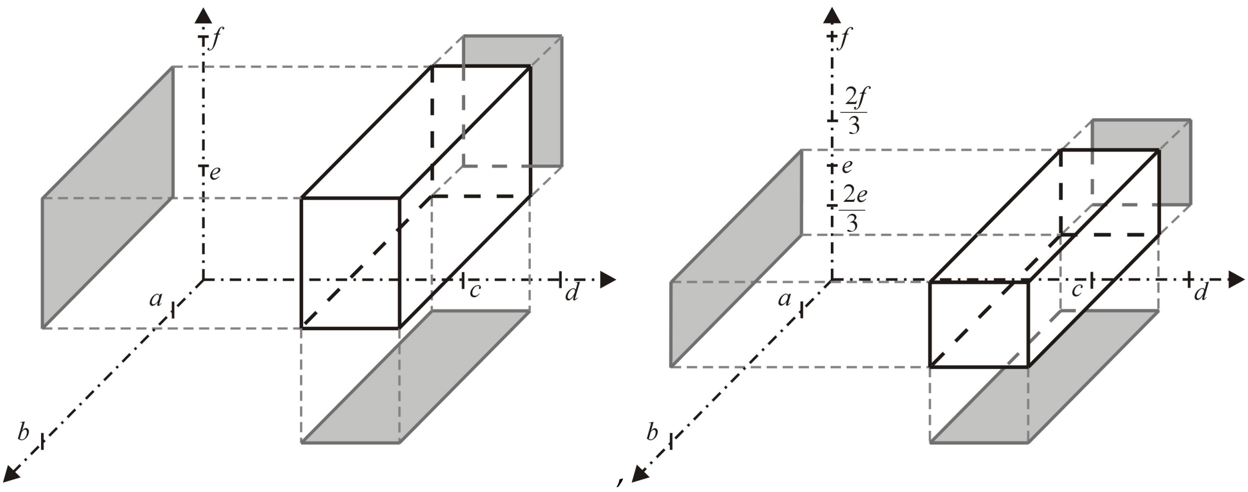
3. Matice a systémy lineárnych rovníc

Obr. 1

Nech $K = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$ je kváder - obrázok 2., resp. 3. vľavo. Pomocou súčinu matíc

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

kde (x, y, z) sú súradnice ľubovoľného vrchola tohto kvádra, pôvodný kváder zväčšíme (ak $p > 1$) alebo zmenšíme (ak $0 < p < 1$) v smere osi z - obrázok 2. vpravo pre $p = \frac{2}{3}$.

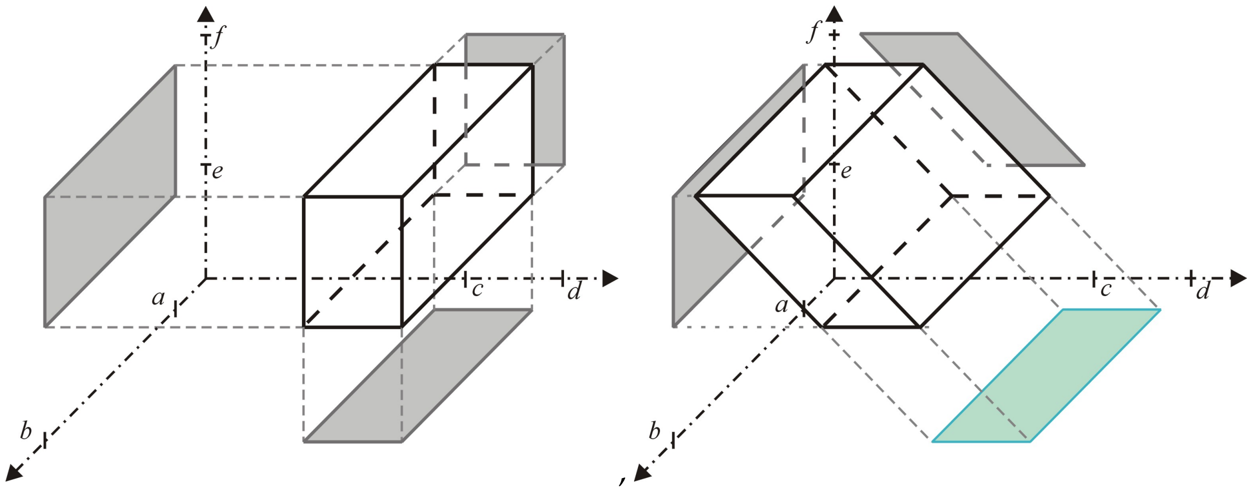


Obr. 2

Pomocou súčinu matíc

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde (x, y, z) sú súradnice ľubovoľného vrchola tohto kvádra, pôvodný kváder sa zdeformuje - obrázok 3. vpravo.



Obr. 3

Nech $m,n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Definícia 3.1:

- **Matica typu** $m \times n$**:** schéma $m.n$ čísel zostavených do m riadkov a n stĺpcov
- **Prvky matice** A**:** a_{ij}
- **Riadky matice** A**:** $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1,2,\dots,m$
- **Stĺpce matice** A**:** $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1,2,\dots,n$

Typy matíc:

- **Štvorcová matica stupňa** n **:** matica typu $m \times n$, kde $m = n$, t.j. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- **Nulová matica -** (ozn. $\boldsymbol{O}$): matica, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$
- **Diagonálna matica :** štvorcová matica stupňa n, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,n$, a v ktorej aspoň jeden prvok $a_{ii} \neq 0$
- **Jednotková matica -** (ozn. $\boldsymbol{I}$): diagonálna matica, pre ktorú $a_{ii} = 1$ pre všetky $i = 1,2,\dots,n$
- **Symetrická matica :** štvorcová matica stupňa n, v ktorej $a_{ij} = a_{ji}$ pre všetky $i,j = 1,2,\dots,n$
- **Trojuholníková matica :** matica typu $m \times n$, v ktorej $a_{ij} = 0$ pre všetky $i > j$

Cvičenie 3.1. Zistite typ nasledujúcich matíc a nájdite, ktoré z nich sú štvorcové, nulové, diagonálne, jednotkové, symetrické a trojuholníkové.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

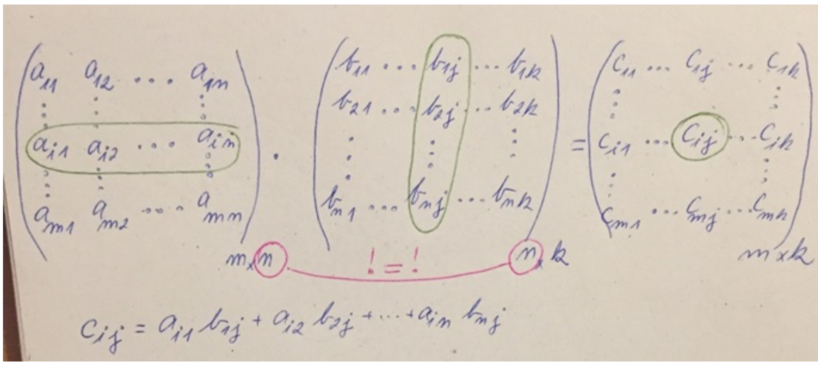
d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e) $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ i) $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

Operácie s maticami:

- **Rovnosť matíc A a B -** (ozn. $A = B$): matice sú rovnakého typu a všetky prvky sa rovnajú, t.j. ak $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ a $a_{ij} = b_{ij}$ pre všetky $i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$
- **Súčet matíc A a B -** (ozn. $A+B$): !!! matice musia byť rovnakého typu, teda ak $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, potom $A+B = C = (c_{ij})_{m\times n}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pre všetky $i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$
- **Násobok matice A s nenulovým číslom α -** (ozn. αA): $\alpha A = C = (c_{ij})_{m\times n}$, kde $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ pre všetky $i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$ (A a C sú matice rovnakého typu)
- **Súčin matíc A a B -** (ozn. $A\cdot B$): ak $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (B_{ij})_{n\times k}$ (!!!počet stĺpcov matice A musí byť totožný s počtom riadkov matice B), potom $A\cdot B = C = (c_{ij})_{m\times k}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$



- **Transponovaná matica k matici A -** (ozn. A^T): ak $A = (a_{ij})_{m\times n}$, potom $A^T = (a^T_{ij})_{n\times m}$, kde $a^T_{ij} = a_{ji}$ pre všetky $i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$

Vlastnosti matíc:

- nulová matica je neutrálny prvok vzhľadom na operáciu sčítania matíc, t.j.

$$A + O = O + A = A$$

- ak A je symetrická matica stupňa n, tak platí $A = A^T$
- jednotková maticka je neutrálny prvok vzhľadom na operáciu násobenia štvorcových matíc rovnakého stupňa, t.j.

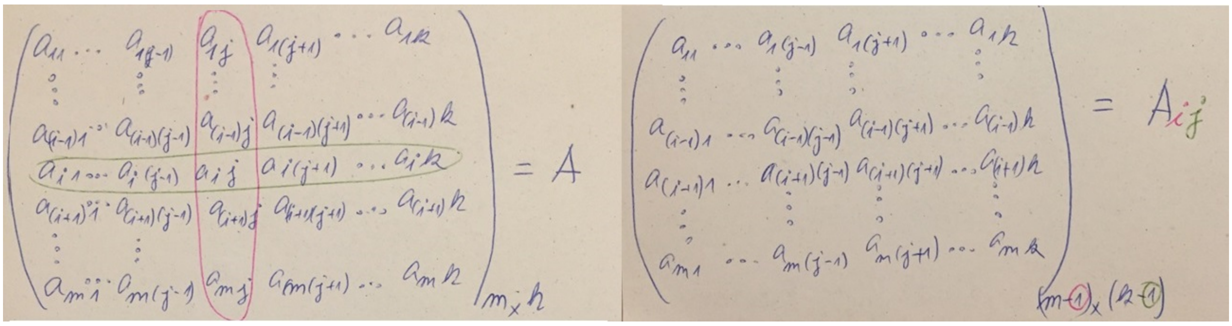
$$A\cdot I = I\cdot A = A$$

- vo všeobecnosti nemusí platiť komutatívny zákon pre násobenie matíc $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times k}$, ale ak platí $A\cdot B = B\cdot A$, tak hovoríme, že A a B sú **k**omutatívne matice
- nech A a B sú typu $m\times n$, C je typu $n\times p$, $\alpha\in\mathbb{R}$, potom platia nasledujúce vzťahy

$$(A^T)^T = A, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad (A + B)^T = B^T + A^T, \quad (A\cdot C)^T = C^T\cdot A^T$$

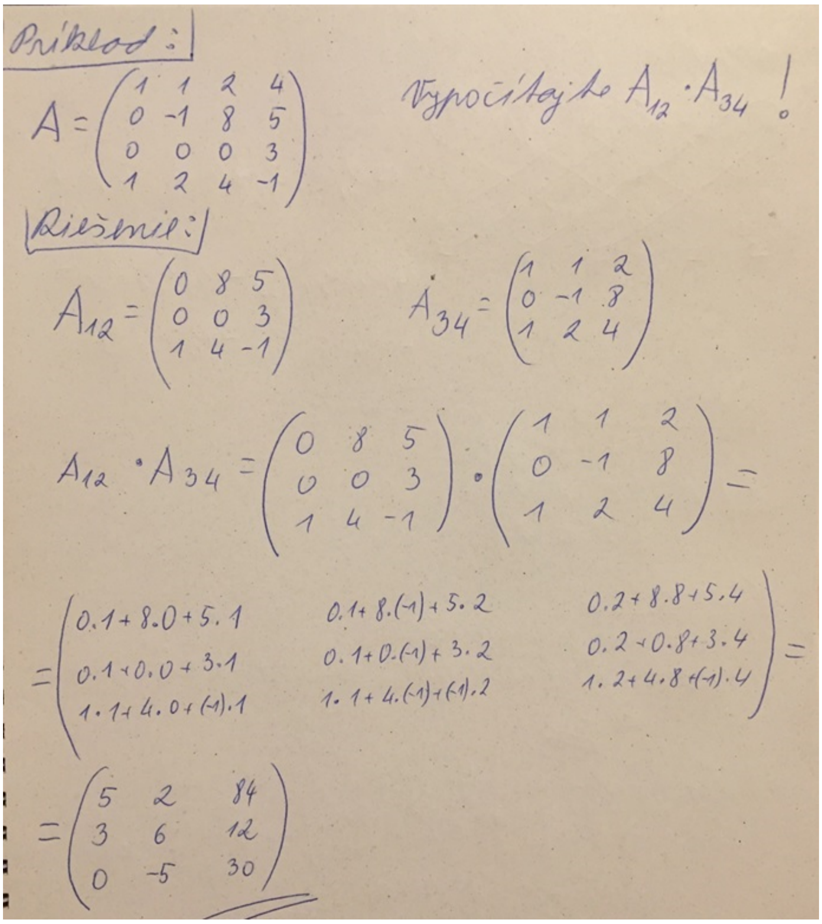
Definícia 3.2:

- **Podmatice matice A -** (ozn. A_{ij}): matica, ktorá vznikne z A vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca



$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(j-1)} & a_{mj} & a_{m(j+1)} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} = A$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(j-1)} & a_{m(j+1)} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{(m-1) \times (n-1)} = A_{ij}$$



Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$ Vypočítajte $A_{12} \cdot A_{34}$!

Riešenie:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} \cdot A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1+8.0+5.1 & 0.1+8.(-1)+5.2 & 0.2+8.8+5.4 \\ 0.1+0.0+3.1 & 0.1+0.(-1)+3.2 & 0.2+0.8+3.4 \\ 1.1+4.0+(-1).1 & 1.1+4.(-1)+(-1).2 & 1.2+4.8+(-1).4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 84 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & -5 & 30 \end{pmatrix}$$

Definícia 3.3:

- **Determinant matice A -** (ozn. det$A$ alebo $|A|$): číslo, ktoré dostaneme z prvkov danej štvorcovej (!!!!) matice A stupňa n nasledujúcim spôsobom:
  - ak A je matica stupňa 1, t.j. $A = a_{11}$, tak det$A = a_{11}$

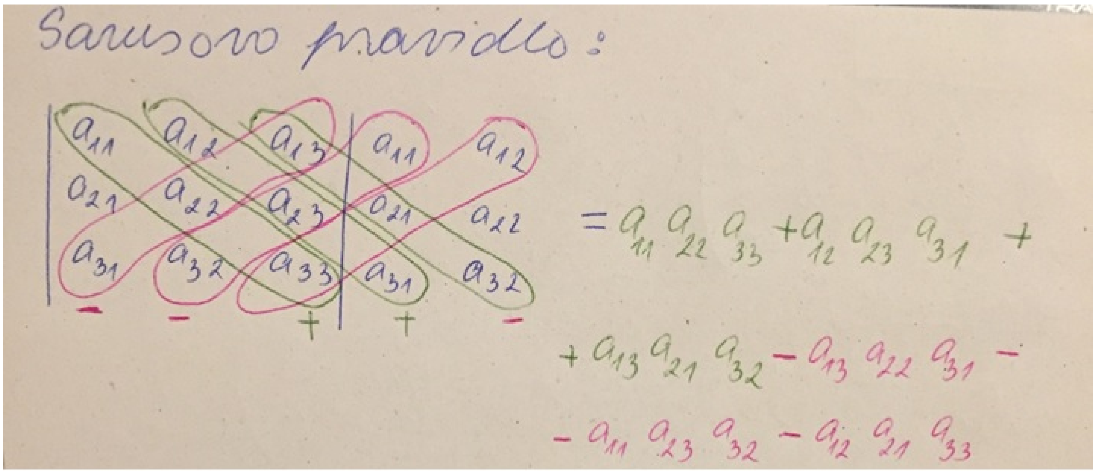
– ak A je matica stupňa 2, t.j. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tak

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

– ak A je matica stupňa 3, t.j. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tak determinant možno počítať tzv. **Sarusovým pravidlom** (!!!platí iba pre determinant matice tretieho stupňa!!):

$$\det A = \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right\} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



– ak A je matica stupňa $n \geq 2$, na výpočet $\det A$ možno použiť tzv. **Laplaceov rozvoj**, z čoho existujú dva typy:

Laplaceov rozvoj podľa i-tého riadku:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}|$$

Laplaceov rozvoj podľa j-tého stĺpca:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j}|A_{2j}| + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj}|A_{nj}|,$$

pričom A_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ sú podmatice matice A definované v Definície 2.2.

Príklad:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Riešenie:

a.) Sarusovo pravidlo:

$$\det A = 1.2.1 + 0.8.0 + 3.4.0 - 3.2.0 - 8.0.1 - 1.0.4 =$$
$$= \underline{\underline{2}}$$

b.) Laplaceov rozvoj podľa 2. riadku:

$$\det A = (-1)^{2+1}\cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= (-4)\cdot 0 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 8\cdot 0 = \underline{\underline{2}}$$

Laplaceov rozvoj podľa 3. riadku:

$$\det A = (-1)^{3+1}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{2}}$$

Laplaceov rozvoj podľa 2. stĺpca:

$$\det A = (-1)^{1+2}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \underline{\underline{2}}$$

Vlastnosti determinantov:

- je jedno, či volíme Laplaceov rozvoj podľa stĺpca alebo riadku a že podľa ktorého stĺpca alebo riadku, výsledok bude vždy rovnaký
- $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det\boldsymbol{A}$, $\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \det\boldsymbol{A}.\det\boldsymbol{B}$
- ak všetky prvky ľubovoľného riadku (stĺpca) matice $\boldsymbol{A}$ sú nulové, tak $\det\boldsymbol{A} = 0$
- ak dva riadky (stĺpce) matice $\boldsymbol{A}$ sú rovnaké alebo jeden je k-násobok druhého, tak $\det\boldsymbol{A} = 0$
- determinant trojuholníkovej matice je rovný súčinu jej všetkých diagonálnych prvkov, t.j. napr. pre $n = 4$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Cvičenie 3.2. Zistite súcet matíc z cvičenia 2.1., ktoré možno scítať a zistite aj typ výslednej matice? Zistite súcin matíc z cvičenia 2.1., ktoré možno vynásobiť a zistite aj typ výslednej matice?

Cvičenie 3.3. Napíšte podmatice A_{12}, A_{22}, A_{31}, A_{14} matice A a vypocítajte súciny $A_{12}A_{22}$, $A_{31}A_{14}$, $A_{12}A_{12}$, $A_{22}A_{31}$, $A_{22}A_{22}$, ak $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Cvičenie 3.4. Vypocítajte determinanty

a) podmatíc A_{12}, A_{22}, A_{31}, A_{14} matice A z cvičenia 2.3.

b) súčinov $A_{12}A_{22}$, $A_{31}A_{14}$, $A_{22}A_{31}$ podmatíc z cvičenia 2.3.

Cvičenie 3.5. Vypocítajte determinant matice A z cvičenia 2.3. pomocou Laplaceovho rozvoja

a) podľa 1. riadku b) podľa 3. riadku c) podľa 4. riadku
d) podľa 1. stĺpca e) podľa 3. stĺpca f) podľa 4. stĺpca.

Cvičenie 3.6. Zistite determinanty nasledujúcich matíc:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definícia 3.4:

- **Regulárna matica :** štvorcová matica $\boldsymbol{A}$, pre ktorú platí, že $\det \boldsymbol{A} \neq 0$
- **Singulárna matica :** štvorcová matica $\boldsymbol{A}$, pre ktorú platí, že $\det \boldsymbol{A} = 0$
- **Inverzná matica k matici $\boldsymbol{A}$ -** (ozn. $\boldsymbol{A}^{-1}$): !!!matica $\boldsymbol{A}$ musí byť regulárna a platí, že
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$
- **Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ -** (ozn. $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$): číslo, ktoré udáva počet nenulových lineárnych nezávislých riadkov matice (t.j. ak žiadny z nich sa nedá zapísať ako súčet konštantných násobkov iných riadkov)
- **Elementárne riadkové operácie -** (ozn. ERO): úpravy matíc, ktoré neovplyvnia hodnosť príslušnej matice, t.j.:
  - vzájomná výmena dvoch riadkov
  - vynásobenie riadku nenulovým číslom
  - pripočítanie ľubovoľného riadku k inému riadku
- **Ekvivalentné matice -** (ozn. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$): ak jedna matica vznikne z druhej iba pomocou ERO

Eliminačná metóda hľadania inverznej matice k matice $\boldsymbol{A}$ stupňa n: !!! $\det \boldsymbol{A} \neq 0$
Maticu

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

upraviť pomocou ERO na

$$(\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n-1} & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n-1} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & x_{n-11} & x_{n-12} & \dots & x_{n-1n-1} & x_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn-1} & x_{nn} \end{array}\right),$$

kde matica $\boldsymbol{X}$ bude tá hľadaná inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Metódy zistenia hodnosti matíc :

1) pomocou ERO previesť maticu $\boldsymbol{A}$ na trojuholníkovú maticu, potom počet nenulových riadkov zadá hodnosť matice, t.j. $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$
2) ak $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica stupňa n, tak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = n$ a maticu $\boldsymbol{A}$ možno previesť pomocou ERO na diagonálnu maticu
3) ak $\boldsymbol{A}$ je singulárna matica stupňa n, tak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) < n$ a maticu $\boldsymbol{A}$ možno previesť pomocou ERO na trojuholníkovú maticu

Pr 1 $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\6&9&3\end{pmatrix}\cdot(-3) \sim \begin{pmatrix}2&3&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow h(A)=1$

$B=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&6&-5\end{pmatrix}\cdot(-2) \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&-1\end{pmatrix} \Rightarrow h(B)=2$

Pr 2

$A=\begin{pmatrix}-5&2&3\\-7&4&2\\-8&2&7\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-7)\\ \cdot 5\\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}-5&2&3\\0&6&-11\\-8&2&7\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-8)\\ \\ \cdot 5\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}-5&2&3\\0&6&-11\\0&-6&11\end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix}-5&2&3\\0&6&-11\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow h(A)=2$

$\det A = \begin{vmatrix}-5&2&3\\-7&4&2\\-8&2&7\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow h(A)<3$ a teda je $h=2$.

Pr 3

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot(-2) \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot(-1) \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&2\\0&-1&-2\end{pmatrix}\cdot(-3) \sim$

$\sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&2\\0&0&8\end{pmatrix} \Rightarrow h(A)=3$

$\det A = \begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&4\\1&1&1\end{vmatrix} = 4 \Rightarrow h(A)=3$ a teda aj platí

Cvičenie 3.7. O ktorých maticiach má zmysel zisťovať, či sú regulárne alebo singulárne? O ktorých možno, tak aj zistite! Okrem toho preveďte všetky matice na trojuholníkovú, resp. diagolánu maticu a zistite ich hodnosť:

a) $\begin{pmatrix}4&-1&1&5\\4&1&0&-1\\2&0&-9&1\\0&-5&0&5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}4&-1&1\\8&2&0\\2&0&-9\\0&-15&0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}8&2&0&-2\\4&-1&1&5\\2&0&-9&1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 8 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -19 & 5 & 0 \\ 3 & 15 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -19 & 5 & 0 \\ 3 & 15 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

Systémy lineárnych rovníc

Definícia 3.5:

- **Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi :** systém nasledujúcich rovníc

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

- **Koeficienty systému :** a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$
- **Absolútne členy systému :** b_i, $i = 1,2,\ldots,m$
- **Neznáme systému :** x_j, $j = 1,2,\ldots,n$
- **Riešenie systému :** n-tica čísel $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, z ktorých po dosadení r_1 do x_1, …, r_n do x_n do systému dostaneme m správnych rovnosti

Systém možno písať aj v maticovom tvare:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B},$$

kde

- **matica koeficientov systému :** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$

- **matica neznámych systému :** $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$

- **matica absolútnych členov systému :** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$

Definícia 3.6:

- **Rozšírená matica systému :** $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

- **Homogénny systém :** ak $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$

- **Nehomogénny systém :** ak existuje aspoň jeden absolútny člen b_i systému, ktorý nie je nulový

- **Ekvivalentné systémy :** dva systémy sú ekvivalentné, ak každé riešenie prvého systému je riešením aj druhého a naopak

Ekvivalentné systémy môžeme dostať **elementárnymi úpravami** pôvodného systému:

- vzájomná výmena dvoch rovníc v systéme
- vynásobenie ľubovoľnej rovnice systému nenulovým číslom
- pripočítanie k ľubovoľnej rovnici inú rovnicu systému

Vlastnosti riešenia homogénnych systémov lineárnych rovníc:

- Vždy má aspoň jedno riešenie, a to tzv. **triviálne**, t.j. nulové.
- Homogénny systém má nenulové riešenie práve vtedy, ak $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$ je menšia ako počet neznámych.
- V prípade, že máme maticu koeficientov štvorcovú, t.j. počet premenných sa rovná počtu rovníc v systéme, tak homogénny systém má nenulové riešenie práve vtedy, ak $\boldsymbol{A}$ je singulárnou maticou.

Metódy riešenia nehomogénnych systémov lineárnych rovníc:

1) **Frobeniova veta :** Systém lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, ak hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná hodnosti rozšírenej matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$, t.j.

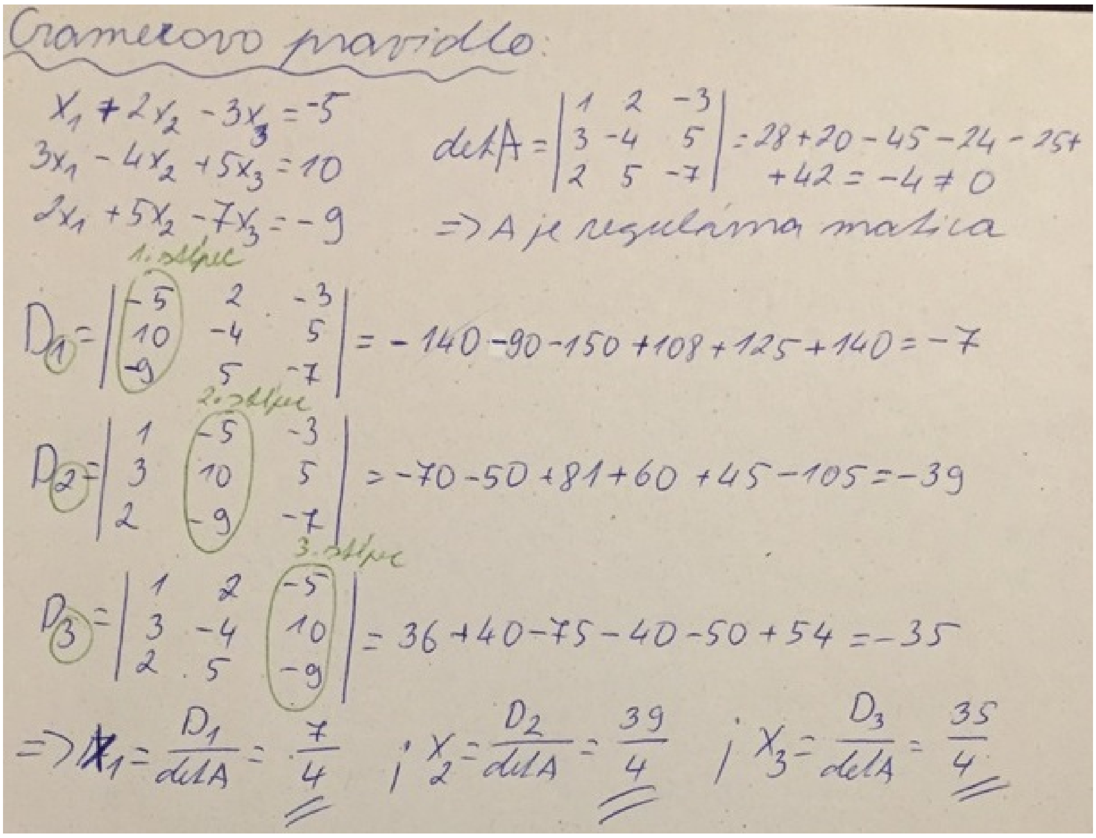
$$\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}).$$

Ak pri vyšetrovaní týchto hodností používame len ERO, tak z matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ dostaneme inú rozšírenú maticu nejakého systému, ktorý je ekvivalentný s pôvodným systémom.

2) **Cramerovo pravidlo :** ak A je regulárna štvorcová matica koeficientov systému, tak systém má jediné riešenie, a to n-ticu $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, kde

$$r_1 = \frac{D_1}{\det \boldsymbol{A}}, \quad r_2 = \frac{D_2}{\det \boldsymbol{A}}, \quad \dots \quad r_n = \frac{D_n}{\det \boldsymbol{A}},$$

pričom D_i, $i = 1, 2, \dots, n$ je determinant matice, v ktorej sme nahradili i-tý stĺpec matice $\boldsymbol{A}$ stĺpcom absolútnych členov



3) **Gaussova eliminačná metóda :** spočíva v tom, aby rozšírenú maticu $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ systému upravili pomocou ERO tak, aby po úprave dostali trojuholníkovú maticu, t.j.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} & b_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \dots & \widetilde{a}_{1n-1} & \widetilde{a}_{1n} & c_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \dots & \widetilde{a}_{2n-1} & \widetilde{a}_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{a}_{n-1n-1} & \widetilde{a}_{n-1n} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{a}_{nn} & c_n \end{array}\right) \sim$$

$$\dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & r_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & r_n \end{array}\right)$$

alebo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-11} & a_{m-12} & \dots & a_{m-1n-1} & a_{m-1n} & b_{m-1} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn-1} & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \dots & \widehat{a}_{1n-1} & \widehat{a}_{1n} & \widehat{c}_1 \\ 0 & \widehat{a}_{22} & \dots & \widehat{a}_{2n-1} & \widehat{a}_{2n} & \widehat{c}_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{a}_{rn} & \widehat{c}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \widehat{c}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \widehat{c}_m \end{array}\right)$$

Vlastnosti riešenia nehomogénnych systémov lineárnych rovníc:

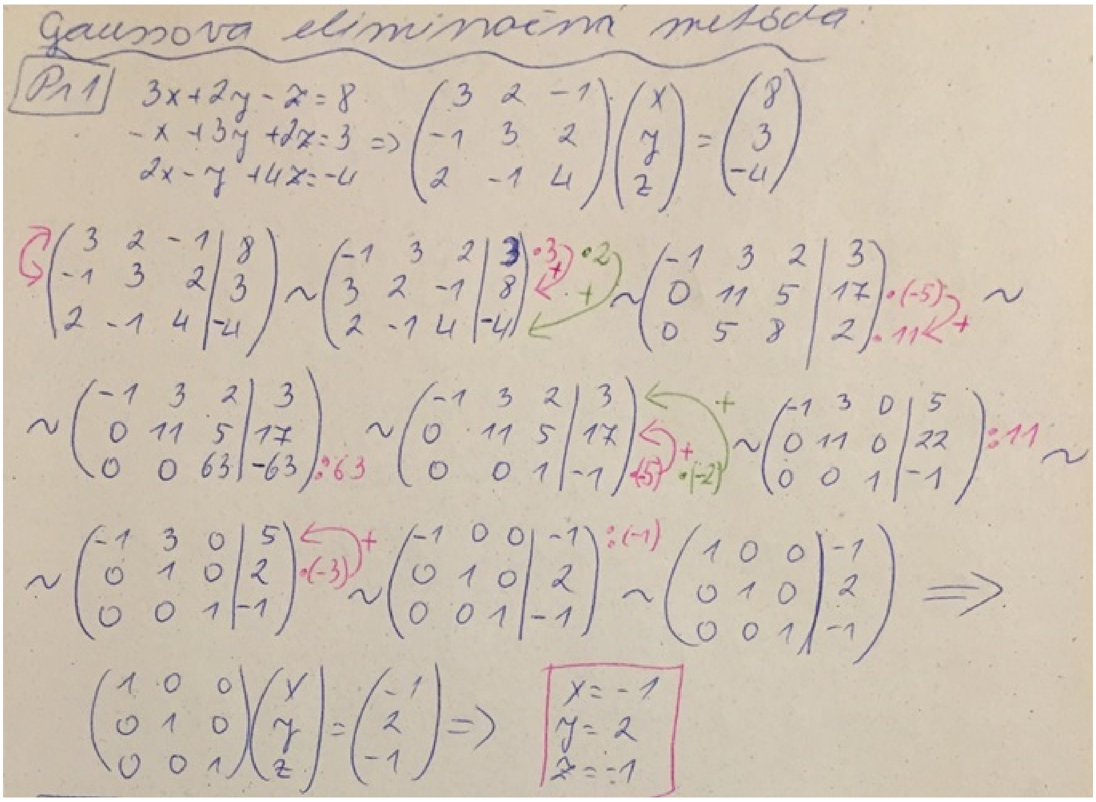
VNHS1: riešenie systému s regulárnou štvorcovou maticou koeficientov je n-tica $(r_1, r_2, \dots, r_n)$

VNHS2: v prípade, že matica koeficientov nie je štvorcová, tak môžu nastať nasledujúce prípady

a) ak existuje $j \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$, pre ktoré $\widehat{c}_j \neq 0$, tak systém nemá riešenie

b) ak pre všetky $j \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$ je $\widehat{c}_j = 0$ a $r = n$, tak systém má práve jedno riešenie

c) ak pre všetky $j \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$ je $\widehat{c}_j = 0$ a $r < n$, tak systém má nekonečne veľa riešení, počet parametrov je $n - \mathrm{h}(\boldsymbol{A})$



Pr 2

$$\begin{aligned} y + 2z &= -6 \\ 2x - y - z &= 4 \\ 3x + y - z &= 9 \\ 5x + 2y &= 9 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \quad \cdot(-5) \\ + \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-5) \quad \cdot(-9) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & 36 \\ 0 & 0 & -13 & 52 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(-9) \\ :(-13) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) + \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ y + 2z &= -6 \\ z &= -4 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$2x - 2 - (-4) = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow y + 2(-4) = -6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x, y, z) = (1, 2, -4)}$$

Pr 3

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 - 13x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -13 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -16 & 8 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & +3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_2 - 8x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

nekonečne veľa riešení Budeme mať 2 parametre

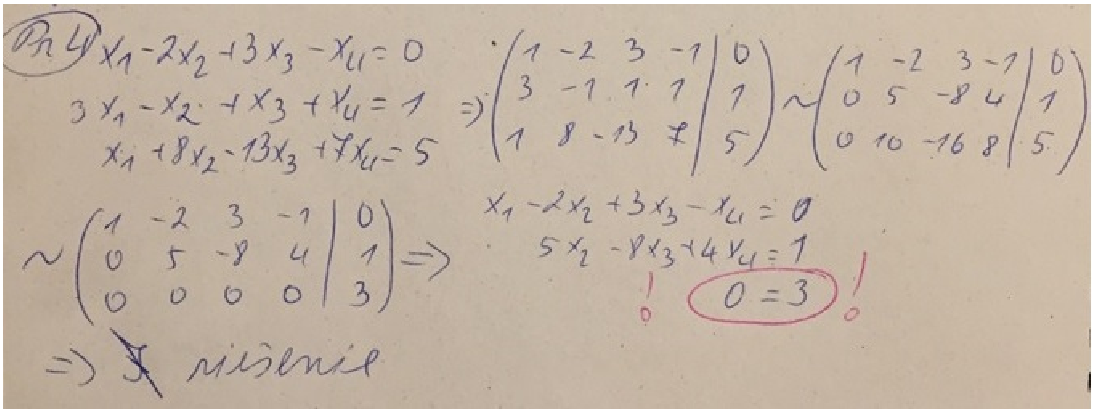
napr. $x_3 = a$, $x_4 = b \Rightarrow 5x_2 - 8a + 4b = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1 + 8a - 4b}{5} \Rightarrow x_1 - 2 \cdot \frac{1 + 8a - 4b}{5} + 3a - b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2 + a - 3b}{5} \Rightarrow \text{napr. ak } a = 5 \quad b = 0$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{7}{5}, \frac{41}{5}, 5, 0\right)$$

napr ak $a = 0$ $b = 1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{-3}{5}, 0, 1\right)$



4) **Pomocou inverznej matice :** ak systém, ktorý je písaný v maticovom tvare $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ vynásobíme inverznou maticou $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$, tak postupne dostaneme:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$$

Cvičenie 3.8. Riešte nasledujúce systémy pomocou všetkých metód, ktoré možno apkilovať na príslušný príklad:

a) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+3x_4&=5\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4&=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4&=1\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4&=-5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4&=0\\ x_1+5x_2+x_3+2x_4&=0\\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4&=0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+6x_3-x_4&=1\\ x_1+2x_2-x_3&=0\\ x_1+3x_2-x_3-x_4&=-2\\ 9x_1-x_2+15x_3-5x_4&=1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3-2x_4&=-2\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4&=8\\ x_1-x_2-x_3+x_4&=1\\ x_1+2x_2+2x_3-x_4&=4 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1-2x_2+2x_3&=-9\\ 3x_1+5x_2+4x_3&=10\\ 5x_1+12x_2+6x_3&=29 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=2\\ 3x_1-x_2+2x_3&=7\\ x_1-x_3&=-2\\ 2x_1+x_2+x_3&=7 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=4\\ x_1+x_2-x_3&=-1\\ 3x_1-7x_2-2x_3&=-1\\ -2x_1+5x_2+x_3&=1 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 7x_1+14x_2-21x_3&=7\\ x_1+2x_2-3x_3&=1\\ 5x_1+10x_2+15x_3&=5\\ 3x_1+6x_2-9x_3&=3 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} 6x_1-9x_2+7x_3+10x_4&=3\\ 2x_1-3x_2-3x_3-4x_4&=1\\ 2x_1-3x_2+13x_3+18x_4&=1 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=0\\ 4x_1+7x_2+5x_3&=0\\ x_1+6x_2+10x_3&=0\\ x_1+x_2-4x_3&=0 \end{aligned}$$

k)
$$\begin{array}{rrrrl} 3x_1+ & 3x_2- & 4x_3+ & 4x_4 = & 0 \\ 2x_1+ & x_2- & 2x_3+ & x_4 = & 0 \\ x_1- & x_2 & - & 2x_4 = & 0 \\ 6x_1+ & 6x_2- & 8x_3+ & 8x_4 = & 0 \end{array}$$

l)
$$\begin{array}{rrrrr} 5x_1+ & 3x_2+ & 3x_3+ & x_4 = & 11 \\ x_1- & x_2+ & x_3 & = & -2 \\ 3x_1+ & 3x_2+ & 2x_3+ & x_4 = & 10 \\ x_1- & 3x_2+ & 2x_3 & = & -7 \\ 4x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & x_4 = & 8 \end{array}$$

m)
$$\begin{array}{rrrrl} x_1- & 3x_2- & 26x_3+ & 22x_4 = & 0 \\ x_1 & - & 8x_3+ & 7x_4 = & 0 \\ x_1+ & x_2- & 2x_3+ & 2x_4 = & 0 \\ 4x_1+ & 5x_2- & 2x_3+ & 3x_4 = & 0 \end{array}$$

n)
$$\begin{array}{rrrrr} x_1+ & 8x_2+ & 2x_3+ & x_4 = & -3 \\ 3x_1+ & 10x_2+ & 2x_3- & x_4 = & -2 \\ 2x_1 & & - & x_4 = & 1 \\ 4x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & x_4 = & 5 \\ -2x_1+ & 2x_2 & & = & -6 \end{array}$$