2. Základy vektorovej algebry

Definícia 2.1:

- **Vektor -** (ozn. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$): orientovaná úsečka začiatočným bodom A a koncovým bodom B, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, kde $a_i = B_i - A_i$, $i = 1,2,3$, ak $A = [A_1, A_2, A_3]$ a $B = [B_1, B_2, B_3]$
- **Veľkosť vektora** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ **-** (ozn. $|\overrightarrow{a}|$): dĺžka úsečky AB, teda
$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2 + (B_3 - A_3)^2}$$
- **Nulový vektor -** (ozn. $\overrightarrow{0}$): vektor, ktorého dĺžka sa rovná nule, čo ale nastane iba v prípade, ak všetky súradnice vektora sú nulové
- **Jednotkový vektor :** vektor, ktorého dĺžka je rovná jednej, t.j. $|\overrightarrow{a}| = 1$
- **Kolineárne vektory :** dva nenulové vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ktoré ležia na jednej priamke alebo na dvoch priamkach, ktoré sú rovnobežné:
- **Komplanárne vektory :** tri nenulové vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, ktoré ležia v jednej rovine alebo v rovnobežných rovinách

Operácie s vektormi: nech $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$

- **Súčet vektorov** $\overrightarrow{a}$ **a** $\overrightarrow{b}$ **-** (ozn. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$): $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, kde $c_i = a_i + b_i$ pre $i = 1,2,3$
- **Násobenie vektora** $\overrightarrow{a}$ **skalárom** $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ **-** (ozn. $\lambda \overrightarrow{a}$): $\overrightarrow{d} = \lambda \overrightarrow{a}$, kde $d_i = \lambda a_i$ pre $i = 1,2,3$

Vlastnosti vektorov:

- **VV1:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ - komutatívny
- **VV2:** $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ - asociativny
- **VV3:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$
- **VV4:** ak vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ nie sú kolineárne, tak vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ je uhlopriečkou rovnobežníka so stranami zhodnými s danými vektormi
- **VV5:** ak vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c}$ nie sú komplanárne, tak vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ je telesovou uhlopriečkou rovnobežnostena s hranami zhodnými s danými vektormi
- **VV6:** ak $\lambda = |\overrightarrow{a}|$, tak $\overrightarrow{b} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{a}$, t.j. $\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$ je jednotkovým vektorom

Definícia 2.2:

- **Lineárna kombinácia vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:** je vektor $\overrightarrow{d}$, ktorý vznikne ako súčet konštatného násobku daných vektorov, t.j.

$$\overrightarrow{d} = k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{b} + k_3\overrightarrow{c},$$

  kde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

- **Lineárne závislé vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:** ak existujú reále čísla $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly také, že platí

$$k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{b} + k_3\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$

- **Lineárne nezávislé vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:** ak nie sú lineárne závislé, t.j. rovnosť $k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{b} + k_3\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ platí len v prípade, že $k_i = 0$ pre všetky $i = 1, 2, 3$

Ďalšie vlastnosti vektorov:

- **VV7:** ak dva vektory sú lineárne závislé, tak ležia na jednej priamke, t.j. sú kolineárne
- **VV8:** ak tri vektory sú lineárne závislé, tak ležia v jednej rovine, t.j. sú komplanárne

Definícia 2.3:

Skalárny súčin vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ - (ozn. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$): je číslo, ktoré definujeme nasledovne

a) ak $|\overrightarrow{a}| \neq 0$ a $|\overrightarrow{b}| \neq 0$, tak $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi$, kde φ je uhol, ktorý zvierajú vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$

b) ak $|\overrightarrow{a}| = 0$ alebo $|\overrightarrow{b}| = 0$, tak $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$,

Vlastnosti skalárneho súčinu: nech $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$

- **VS1:** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$,
- **VS2:** rovnosť $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ je splnená v prípadoch, ak $|\overrightarrow{a}| = 0$ alebo $|\overrightarrow{b}| = 0$ alebo $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$
- **VS3:** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$ - komutatívny
- **VS4:** $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$, $(\alpha\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- **VS5:** $|\overrightarrow{a}| \neq 0$ a $|\overrightarrow{b}| \neq 0$, tak $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$, kde φ je uhol, ktorý zvierajú vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$