1. Základné vlastnosti reálnych a komplexných čísel

Reálne čísla

Definícia 1.1: **Číselnou množinou** nazývame takú množinu, ktorej všetky prvky sú čísla.

Definícia 1.2: Základné číselné množiny sú

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ - **množina všetkých prirodzených čísel**
- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ - **množina všetkých celých čísel**
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - **množina všetkých racionálnych čísel**, t.j. racionálne čísla sú všetky čísla, ktoré je možné vyjadriť ako podiel celého a prirodzeného čísla
- $\mathbb{I}$ - **množina všetkých iracionálnych čísel** (napr. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π)
- $\mathbb{R}$ - **množina všetkých reálnych čísel**

Vlastnosti základných číselných množín:

- Súčet a súčin prirodzených čísel je prirodzené číslo.
- Celé čísla sú všetky čísla, ktoré môžeme vyjadriť ako rozdiel dvoch prirodzených čísel.
- Súčet, súčin a rozdiel celých čísel je celé číslo.
- Súčet, rozdiel, súčin a podiel racionálnych čísel (okrem delenia nulou) je racionálne číslo.
- Zjednotenie množiny racionálnych a iracionálnych čísel tvorí množinu reálnych čísel.
- Medzi jednotlivými číselnými množinami platí nasledujúci vzťah:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \qquad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}, \qquad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Základné vlastnosti množiny všetkých reálnych čísel:

- Je usporiadaná: pre každé dve reálne čísla a, b platí práve jeden zo vzťahov:

$$a = b, \qquad a < b, \qquad b < a.$$

- Je všade hustá: medzi dvoma ľubovoľnými rôznymi reálnymi číslami a, b, pre ktoré platí $a < b$, existuje aspoň jedno reálne číslo c, pre ktoré platí: $a < c < b$.
- Je uzavretá vzhľadom na operácie súčtu, súčinu, rozdielu a podielu t.j. súčet, súčin, rozdiel a podiel reálnych čísel je reálne číslo.
- Množinu $\mathbb{R}$ možno jednojednoznačne zobraziť na číselnej osi t.j. každému reálnemu číslu možno priradiť jediný bod na číselnej osi a naopak.

Komplexné čísla

Definícia 1.3:

- **komplexné číslo** z **:** je usporiadaná dvojica reálnych čísel $z = (a, b)$
- **reálna časť komplexného čísla** z - (ozn. $\operatorname{Re} z$) : číslo a
- **imaginárna časť komplexného čísla** z - (ozn. $\operatorname{Im} z$) : číslo b
- **množina** $\mathbb{C}$ **:** množina všetkých komplexných čísel
- **imaginárna jednotka** i **:** $i^2 = -1$, resp. $i = \sqrt{-1}$
- **algebraický tvar komplexného čísla :** $z = a + ib$
- **komplexne združené číslo k číslu** $z = a + ib$ **-** (ozn. $\bar{z}$): $\bar{z} = a - ib$

Operácie s komplexnými číslami v algebraickom tvare:

- **súčet komplexných čísel** $z = z_1 + z_2$:

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

- **rozdiel komplexných čísel** $z = z_1 - z_2$:

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

- **súčin komplexných čísel** $z = z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

- **podiel komplexných čísel** $z = \frac{z_1}{z_2}$, ak $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \left(\frac{a + i\,b}{c + i\,d} \cdot \frac{c - id}{c - id} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Vlastnosti komplexných čísel:

Mocniny imaginárnej jednotky:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

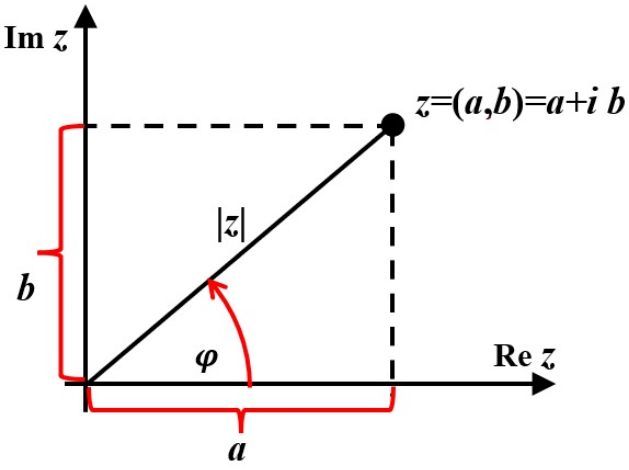
Absolútna hodnota komplexného čísla $z = a + i\,b$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vzťah medzi množinami reálnych čísel a komplexných čísel:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Znázorňovanie komplexných čísel v komplexnej rovine, v tzv. **Gaussovej rovine**:



φ - argument komplexného čísla $z = a + ib \neq 0$
Platí:

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Definícia 1.4:

- **goniometrický tvar komplexného čísla :** každé komplexné číslo $z \neq 0$ sa dá napísať práve jediným spôsobom
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$
- **exponenciálny tvar komplexného čísla :** využitím **Eulerovho vzťahu** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, komplexné číslo $z \neq 0$ sa dá napísať aj v tvare
$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Operácie s komplexnými číslami v goniometrickom tvare:

- **súčin komplexných čísel** $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$:
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$$
- **podiel komplexných čísel** $z = \frac{z_1}{z_2}$, ak $z_2 \neq 0$:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big)$$
- ***n*-tá mocnina komplexného čísla** $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, tzv. **Moivreova veta**:
$$z^n = |z|^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big)$$
- ***n*-tá odmocnina komplexného čísla** $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$:
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big),$$
pre $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

!!! n-tá odmocnina komplexného čísla $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nie je jediné komplexné číslo, ale práve n komplexných čísel, ktoré získame postupným dosadením parametra $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ do daného vzorca!!!

Cvičenie 1.1. Vyjadrite v ostatných tvaroch (algebraický, goniometrický, exponenciálny), znázornite v Gaussovej rovine a potom počítajte súčet, rozdiel, súčin, podiel' l'ubovol'ných dvoch komplexných čísel, s ktorými je možné tieto operácie vykonat' a tiež počítajte 3. mocninu a 3. odmocninu týchto čísel:

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ b) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ c) $-4i$

d) 5 e) $-1 - i\sqrt{3}$ f) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

g) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$ h) $-1 + i$ i) $3\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Cvičenie 1.2. Vyjadrite komplexne združené čísla k číslam z Cvičenia 1.1.

Cvičenie 1.3. Vyjadrite v algebraickom tvare a zistite ich absolútnu hodnotu:

a) $\dfrac{2-i}{3-i}$ b) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ c) $2(1-i) + 3(2+i)$

d) $\left(\dfrac{1+2i}{3-i}\right)^2$ e) $1 + i + i^2$ f) $i^7 + i^{10}$.

Cvičenie 1.4. V Gaussovej rovine nájdite všetky body/čísla z, pre ktoré platí daný vzt'ah:

a) $\operatorname{Im} z = -3$ b) $|\operatorname{Re} z| = 2$ c) $|z| < 2$

d) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ e) $|\operatorname{Re} z| < 2$ f) $\operatorname{Re} z > 2$ a $\operatorname{Im} z < -1$

g) $2 \leq |z| < 4$ h) $|\operatorname{Im} z| \geq 2$ i) $\operatorname{Re} z \leq 3$ a $\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$.