

Tvorba a použitie matematických úloh podporujúcich rozvoj  
kľúčových kompetencií a matematickej gramotnosti pre reálny život



Záverečná práca  
**Kontextové úlohy a motivácia žiakov**

Anna Hrebíková

Kamienka 2008

## Úvod

Prirodzenou ľudskou potrebou je skúmanie podstaty vecí, hľadanie zmyslu života. Deti už od malička rady riešia problémy a učia sa to, čo už iní vedia, poznajú.

Keď prichádza dieťa do školy, veľmi často získava názor, že škola je organizácia, kde sa neriešia problémy bežného života a neskôr viacerí žiaci dávajú najavo, že vyučovací proces a obsah vzdelávania ako ho dnes realizujeme im nevyhovuje, čo vedie k strate motivácie učiť sa..

Toto poznanie núti aj učiteľa matematiky pomôcť žiakom prenikať do tajov matematiky takými činnosťami a zadávať také úlohy, ktoré vyučovanie premenia na miesto hľadania a objavovania, na miesto, kde sa učí nie pre školu, ale pre život.

Cieľom tejto práce je vytvoriť také úlohy z matematiky, ktoré majú vzťah k reálnemu svetu a životu okolo nás, pomôžu žiakom naučiť sa veci, ktoré sa im v živote zídu a ktoré aspoň trošku osviežia vyučovanie matematiky.

Pri testovaní danej sady úloh z projektu som nenašla pochopenie zo strany kolegyne. Vyhovárala sa, že nemá čas, mešká s učivom, také niečo sa neučí a pod.. Možno je to vekom, možno nerada mení svoj stereotyp. K deťom aj tak došlo, že v škole sa riešia „iné úlohy“, pretože cez prestávku ma oslovil šiestak kvôli dôležitej otázke: „Prečo v 6.B sa riešia „iné úlohy“ a v 6.A nie?“

V tejto práci uvediem úlohy z vlastnej tvorby pre druhý stupeň základnej školy v poradí, ako vznikali. Úlohy sú zamerané na porozumenie textu, riešenie problémov, objavovanie a zdôvodňovanie tvrdení, rozvoj logického myslenia. Pri ich tvorbe som bola obmedzovaná vekom detí, ktoré učím (piaty, šiesty, siedmy ročník) a obsahom učiva pre daný ročník (možnosť vlastného testovania). K práci je priložená príloha, ktorá obsahuje vybrané žiacke riešenia jednotlivých úloh.

# 1. Návrhy úloh

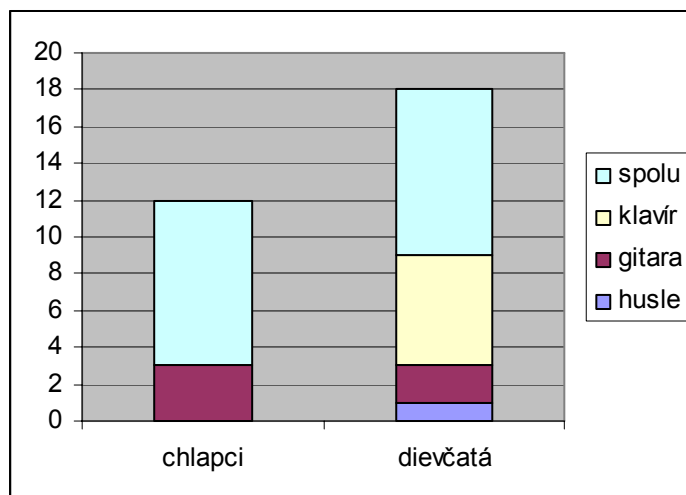
## 1.1 Hudobné nástroje

Na vyučovaní naši žiaci málo pracujú s tabuľkami, grafmi a diagramami, aj keď médiá sú plné týchto informácií. Pri testovaní navrhutej sady príkladov som zistila, že zručnosti žiakov pracovať s grafmi a istota, že údaj je správny, nie sú na takej úrovni, aké by mali byť.

Z tohto dôvodu som navrhla úlohu Hudobné nástroje.

### Hudobné nástroje – 1. verzia

V triede Janka zisťovala, kto hrá na nejaký hudobný nástroj a výsledky znázornila stĺpcovým diagramom.



1. Koľko je žiakov v triede?

Odpoveď: V triede je .... žiakov.

2. Koľko žiakov hrá na hudobný nástroj?

Odpoveď: Na hudobný nástroj hra .... žiakov.

3. Koľko % žiakov nehrá na žiadny hudobný nástroj?

Výpočet:

Odpoveď: Na žiadny hudobný nástroj nehrá ..... žiakov.

4. Koľko % chlapcov hrá na gitaru?

Výpočet:

Odpoveď: Na gitaru hrá ..... chlapcov.

5. Koľko % dievčat nehrá na žiadny hudobný nástroj?

Výpočet:

Odpoveď: Na žiadny hudobný nástroj nehrá ..... dievčat.

6. Koľko % žiakov tvoria chlapci?

Výpočet:

Odpoveď: Chlapci tvoria ..... žiakov.

7. O koľko % je viac dievčat ako chlapcov?

Výpočet:

Odpoveď: Dievčat je o ..... % viac ako chlapcov.

8. Chlapci tvoria z počtu všetkých žiakov triedy:

a)  $\frac{3}{5}$  b)  $\frac{2}{3}$  c)  $\frac{2}{5}$  d)  $\frac{1}{4}$

Kým som sa dopracovala k poslednej verzii, úloha prešla veľkými zmenami a z pôvodných otázok nezostala v tejto úlohe ani jedna.

Na školení boli k úlohe tieto pripomienky:

1. Urobiť k úlohe nový graf:

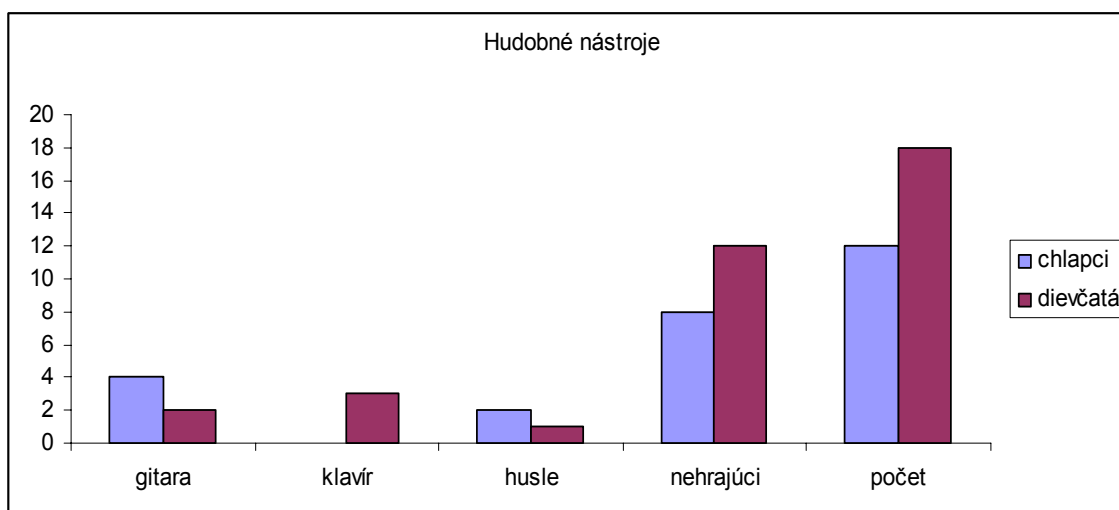
- dobre čitateľný,
- bez zdvojených informácií,
- preformulovať slovo „spolu“.

2. Do úlohy zakomponovať nadané deti, ktoré ovládajú hru aj na viac ako jeden hudobný nástroj.
3. Doplniť v úlohe aj kombinatorické otázky.

Úlohu som prepracovala od začiatku s rešpektovaním uvedených pripomienok a úloha nadobudla takúto podobu:

### Hudobné nástroje – 2. verzia

V triede Janka zisťovala, kto hrá na nejaký hudobný nástroj a výsledky znázornila stĺpcovým diagramom:



1. Na ktorý hudobný nástroj hrá najviac dievčat?

Odpoveď: Najviac dievčat hrá na .....

2. Koľko chlapcov hrá na hudobný nástroj?

Odpoveď: Na hudobný nástroj hrajú ..... chlapci.

3. Koľko žiakov v triede hrá na dva hudobné nástroje?

Odpoveď: Na dva hudobné nástroje hrajú ..... žiaci.

4. Koľko % žiakov nehrá na žiadny hudobný nástroj?

Výpočet:

Odpoveď: Na hudobný nástroj nehra ..... žiakov.

5. Koľko % žiakov hrá na strunový hudobný nástroj?

Výpočet:

Odpoveď: Na strunový hudobný nástroj hrá ..... žiakov.

6. O koľko % je viac dievčat ako chlapcov?

Výpočet:

Odpoveď: Dievčat je o ..... % viac ako chlapcov.

7. Chlapci tvoria z počtu všetkých žiakov: a)  $\frac{3}{5}$  b)  $\frac{2}{3}$  c)  $\frac{2}{5}$  d)  $\frac{1}{4}$

Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť dvojčlenné gitarové skupiny?

Výpočet:

Odpoveď: Dvojčlenné gitarové skupiny je možné vytvoriť ..... spôsobmi.

8. Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť trojčlenné dievčenské skupiny s rôznymi hudobnými nástrojmi?

Výpočet:

Odpoveď: Trojčlenné dievčenské skupiny s rôznymi hudobnými nástrojmi je možné vytvoriť ..... spôsobmi.

9. Z celkového počtu dievčat a z celkového počtu chlapcov hrá na hudobný nástroj viac dievčat alebo chlapcov? Zdôvodni.

Po zaslaní úlohy na konzultáciu mi bolo pripomienkované:

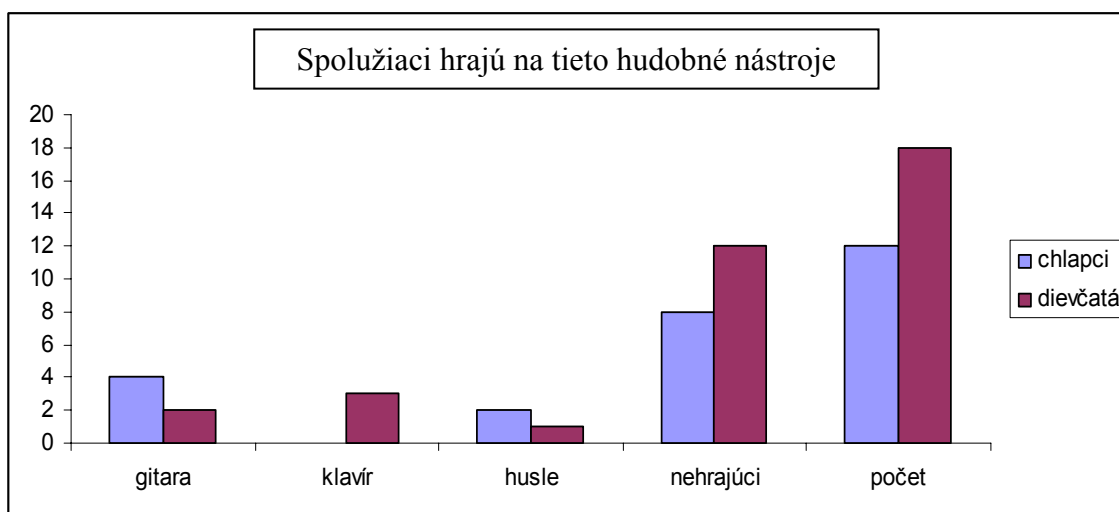
- príliš veľa otázok na jednu úlohu,
- odporúčenie rozdeliť úlohu na dve rôzne úlohy,
- strohý text,
- popis „počet“ nie je jasný, vyriešiť to vhodnou otázkou,
- otázka č.5 nie je vhodná,
- pokúsiť sa úlohu napísať tak, ako si ju predstavujem

v konečnej verzii.

V ďalšej fáze som otázky roztriedila na dve časti: kombinatorické a percentuálne. Kombinatorické otázky som použila v tejto úlohe a ostatné nechala bokom. Trochu som upravila text úlohy a zaslala na konzultáciu.

### Hudobné nástroje – 3. verzia

Na domácu úlohu mali žiaci urobiť v triede anketu a získané údaje znázorniť diagramom. Janka zistila, kto zo spolužiakov hrá na nejaký hudobný nástroj a výsledky znázornila stĺpcovým diagramom. Jej úloha vyzerala takto:



Jankina mladšia sestra ešte grafom nerozumie, ale je veľmi zvedavá a pýta sa Janky :

1. Koľko chlapcov je v triede?

Odpoveď: V triede je ..... chlapcov.

2. Koľko chlapcov v triede hrá na hudobný nástroj

Výpočet:

Odpoveď: Na hudobný nástroj hrá/ajú .....

3. Koľko chlapcov v triede hrá na dva hudobné nástroje?

Výpočet:

- Odpoveď: Na dva hudobné nástroje hrá/ajú .....
4. A čo dievčatá? Sú také, ktoré hrajú na dva hudobné nástroje?

Áno      Nie

Zdôvodni:

Jankin starší brat sa pozrel na graf a povedal: „Zaujíma ma, či aj na moje otázky poznáš správne odpovede.“

5. Koľkými spôsobmi môžeš vo svojej triede vytvoriť dvojčlennú gitarovú skupinu?

Výpočet:

Odpoveď: Dvojčlennú gitarovú skupinu je možné vytvoriť ..... spôsobmi.

6. Koľkými spôsobmi môžeš vo svojej triede vytvoriť trojčlennú dievčenskú skupinu s rôznymi hudobnými nástrojmi?

Výpočet:

Odpoveď: Trojčlennú dievčenskú skupinu s rôznymi hudobnými nástrojmi je možné vytvoriť..... spôsobmi.

Po konzultácii mi bolo navrhnuté:

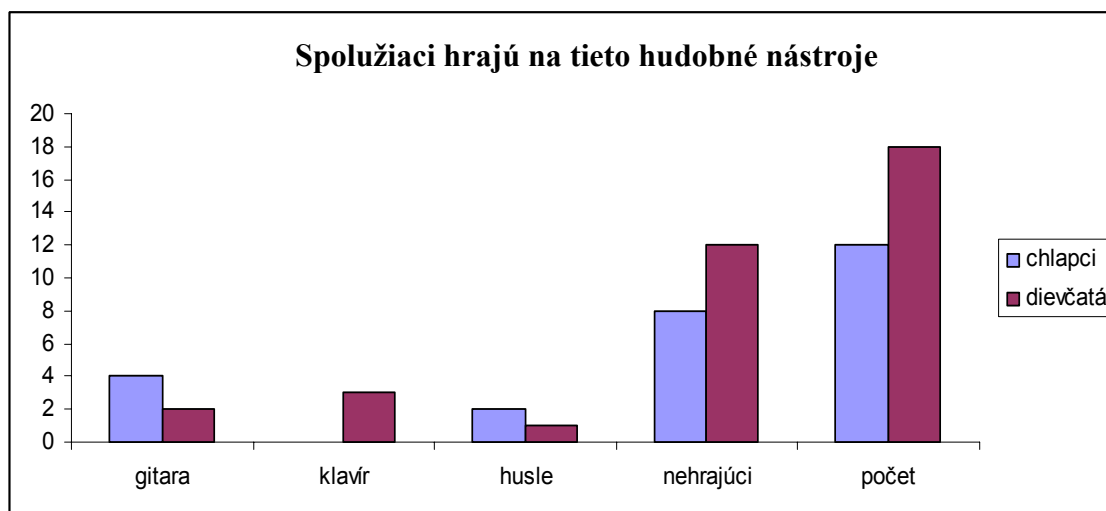
- v 2. otázke zmeniť pohlavie,
- vymeniť poradie otázok (5. a 6. otázku za 2. otázku),
- doplniť ešte otázku týkajúcu sa troch hudobných nástrojov,
- zapísať úlohu do šablóny.

Po týchto úpravách úloha nadobudla túto konečnú podobu:



## HUDOBNÉ NÁSTROJE

Na domácu úlohu mali žiaci urobiť v triede anketu a získané údaje znázorniť diagramom. Janka zistila, kto zo spolužiakov hrá na nejaký hudobný nástroj a výsledky znázornila stĺpcovým diagramom. Jej úloha vyzerala takto:



Jankina mladšia sestra ešte grafom nerozumie, ale je veľmi zvedavá a pýta sa Janky :

**Otázka č. 1:** Koľko chlapcov je v triede?

Odpoveď: V triede je .....

**Otázka č. 2:** Koľko dievčat v triede hrá na hudobný nástroj?

Výpočet:

Odpoveď: Na hudobný nástroj v triede hrá .....

Jankin starší brat sa pozrel na graf a povedal: „Zaujíma ma, či aj na moje otázky poznáš správne odpovede.“

**Otázka č. 3:** Koľkými spôsobmi môžeš vo svojej triede vytvoriť dvojčlennú gitarovú skupinu?

Riešenie:

Odpoveď: Dvojčlennú gitarovú skupinu je možné vytvoriť ..... spôsobmi.

**Otázka č. 4:** Koľkými spôsobmi môžeš vo svojej triede vytvoriť trojčlennú dievčenskú skupinu s rôznymi hudobnými nástrojmi?

Riešenie:

Odpoveď: Trojčlennú dievčenskú skupinu s rôznymi hudobnými nástrojmi je možné vytvoriť ..... spôsobmi.

Jankina mladšia sestra je nielen zvedavá, ale musí mať vždy posledné slovo. Preto nikoho neprekvapí, ak položí ďalšie otázky:

**Otázka č. 5:** Koľko chlapcov v triede hrá na dva hudobné nástroje?

Výpočet:

Odpoveď: Na dva hudobné nástroje hrá/ajú .....

**Otázka č. 6:** Hrá aspoň jeden chlapec v triede na všetky tri hudobné nástroje?

Odpoveď: áno nie

Zdôvodnenie:

## RIEŠENIE: HUDOBNÉ NÁSTROJE

1. 12 chlapcov. Očakávané správne riešenie je priamym odčítaním z grafu, možné zlé riešenie je 14 chlapcov, ktoré vznikne sčítaním počtov za jednotlivé nástroje + nehrajúci chlapci ( $4+0+2+8=14$ ).
2. 6 dievčat. Správny výpočet je  $18 - 12 = 6$ , možný zlý výpočet s „dobrým“ výsledkom je  $2+3+1=6$ .
3. 15 spôsobmi. Predpokladané riešenie je vypisovaním všetkých dvojíc zo 6 žiakov.
4. 6 spôsobmi. Predpokladané riešenie je vypisovaním všetkých trojíc.
5. Dvaja chlapci. Očakávané riešenie je  $12-8 = 4$ ,  $6 - 4 = 2$  alebo  $(4+2+8)-12 = 2$ .
6. Nie. Zdôvodnenie: Ani jeden chlapec nehraje na klavír, hrajú iba na gitaru a husle, preto nemôže hrať ani jeden chlapec na tri hudobné nástroje.

### 1.1.1 Metodická časť

**Veková kategória:** Žiaci 7. ročníka ZŠ

**Tematický celok:** Kombinatorika

**Forma práce:** Test

**Vstupné vedomosti:**

- čítanie diagramov,
- vypisovanie všetkých možností podľa určitého systému

**Ciele úlohy:**

- riešiť rôzne primerané kombinatorické úlohy,
- systematicky vytvárať všetky možné riešenia,
- rozvíjať logické a tvorivé myslenie,
- čítanie grafov a interpretovanie v praxi

**Časové rozpätie:** 25 minút.

### 1.1.2 Realizácia a výsledky úlohy

Úloha Hudobné nástroje bola realizovaná v 7.B triede, s počtom žiakov 30, po tematickom celku: Kombinatorika. Žiaci úlohu riešili samostatne formou testu 25 minút. K jednotlivým otázkam žiaci nemali žiadne otázky a pripomienky. Úloha ich oslovila, zaujala a celú ju považovali za ľahkú a jednoduchú.

Jednotlivé odpovede som rozdelila podľa spôsobu riešenia do 4 skupín. V prvej skupine boli odpovede, v ktorých žiaci uviedli správny výpočet a výsledok. V druhej skupine boli odpovede, v ktorých žiaci uviedli správny výsledok so zlým výpočtom (2.otázka), alebo bez výpočtu, zdôvodnenia. V tretej skupine boli odpovede, v ktorých žiaci uviedli nesprávny výpočet a výsledok. V štvrtej skupine boli neriešené otázky. Nasledujúca tabuľka a graf uvádzajú zvládnutie jednotlivých otázok žiakmi:

Číslo otázky	Počet žiakov, ktorí riešili otázku			
	Správne	S malou chybou	Nesprávne	Neriešili
1.	23	0	7	0
2.	4	26	0	0
3.	14	5	11	0
4.	6	10	14	0
5.	14	10	4	2
6.	24	6	0	0



#### Poznámky k riešeniu žiakov:

1. otázka: väčšinou bola riešená správne. Vyskytli sa aj nesprávne riešenia:

$$14 (4+2+8),$$

$$26 (4+2+8+12).$$

2. otázka: žiaci uviedli správny výsledok, často chýbal výpočet alebo bol nesprávny.

3. otázka: žiaci pochopili podstatu, že majú vypísať všetky dvojice zo 6 žiakov, ale nie všetci sa dopracovali k správnejmu výsledku, lebo tvorili iba dvojice heterogénne a o homogénnych dvojjiciach neuvažovali.
4. otázka: niektorí žiaci nepochopili podstatu a uviedli nesprávnu odpoveď:  
1 spôsob – gitara, klavír, husle.
5. otázka: niektorí žiaci ma prekvapili, lebo našli ďalší spôsob riešenia úlohy, o ktorom som pôvodne neuvažovala:  $(4+2+8)-12 = 2$ , niektorí výpočet neuviedli.
6. otázka: 6 žiakov neuviedlo zdôvodnenie.

**Neštandardnosť úlohy:** Žiaci sa s otázkami číslo 1 a 3 stretávajú pomerne často, s otázkami číslo 2, 4, 5, 6 sa ešte nestretli.

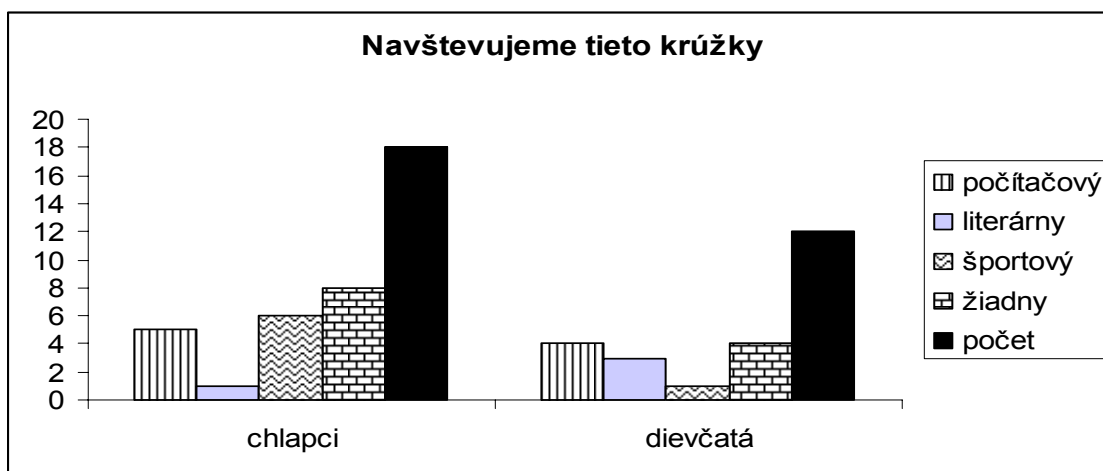
**Obťažnosť úlohy:** Na základe výsledkov, ktoré žiaci dosiahli pri riešení jednotlivých otázok, sú otázky číslo 1, 6 ľahké, 3, 5 dosť ľahké a 2, 4 stredne ťažké.

## 2.1 Záujmové krúžky

Táto úloha vznikla z predchádzajúcej úlohy na podnet môjho konzultanta a použila som v nej otázky z druhej časti Hudobných nástrojov.

### Záujmové krúžky – 1. verzia

Triedna učiteľka poverila svoje žiačky, aby jej zistili, aké krúžky navštevujú jej žiaci. Dievčatá úloha zaujala, preto výsledky zverejnili v triede na nástenke vo forme takéhoto diagramu.



1. Dopln v grafe počet žiakov nad jednotlivými stĺpkami.

2. Koľko % detí v triede navštevuje počítačový krúžok?

Výpočet:

Odpoveď: Počítačový krúžok v triede navštevuje ..... detí.

3. Koľko % detí v triede je zapojených do krúžkovej činnosti?

Výpočet:

Odpoveď: Do krúžkovej činnosti v triede je zapojených ..... detí.

4. Vyjadri v %, o koľko je v triede viac chlapcov ako dievčat?

Výpočet:

Odpoveď: Chlapcov je v triede o ..... viac ako dievčat.

5. Akú časť z celkového počtu žiakov triedy tvoria dievčatá? Výsledok napíš v tvare zlomku v základnom tvare.

Výpočet:

Odpoveď: Dievčatá tvoria ..... počtu všetkých žiakov triedy.

Po zaslaní na konzultáciu mi bolo navrhnuté:

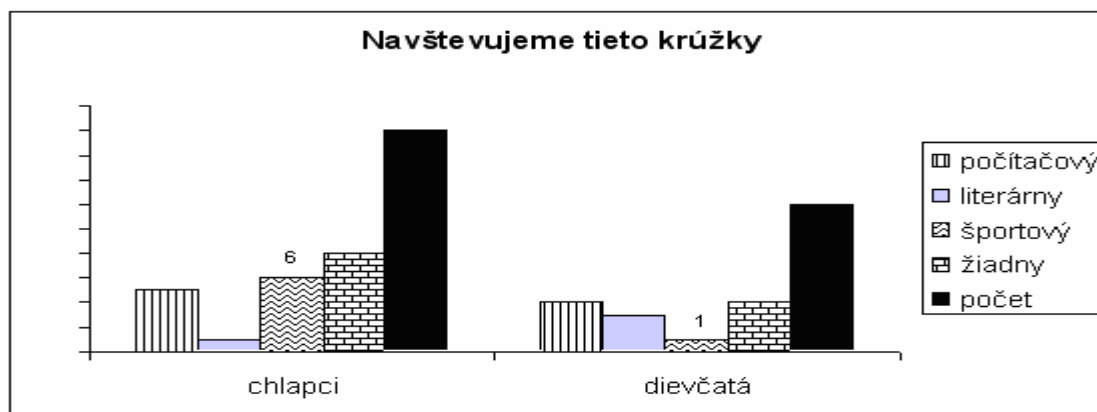
- v grafe zrušiť čísla na osi y a doplniť dve čísla nad stĺpiky (kvôli 1. otázke),
- urobiť zmenu v otázke číslo 4, aby nevychádzali pekné čísla (výmena slov viac – menej),

- doplniť otázku porovnania zapojenosti žiakov do krúžkov v rámci skupín,
- zvážiť, či ponechať žiakov, ktorí navštevujú viac krúžkov (aby sme sa vyhli chybám v určovaní počtu žiakov zapojených do krúžkov).

V úlohe som urobila zmeny v prvých troch navrhovaných pripomienkach a k štvrtej som sa vyjadrila, že deti v našej škole väčšinou navštevujú dva krúžky (športový a počítačový alebo iný) a uvidíme, ako to budú riešiť. Po týchto úpravách úloha sa považovala za hotovú.

## ZÁUJMOVÉ KRÚŽKY

Triedna učiteľka poverila svoje žiačky, aby jej zistili, aké krúžky v škole navštevujú jej žiaci. Dievčatá úloha zaujala, preto výsledky zverejnili v triede na nástenke vo forme takéhoto diagramu.



Bezprostredne po zverejnení diagramu sa spolužiaci sústredili pri nástenke a porovnávali zapojenosť žiakov do jednotlivých krúžkov. Najšikovnejší chlapec si vymyslel pre spolužiakov tieto úlohy:

**Otázka č. 1:** Určte v grafe počet žiakov nad jednotlivými stĺpkami.

**Otázka č. 2:** Koľko detí z triedy navštevuje v škole počítačový krúžok?

Výpočet:

Odpoveď: Počítačový krúžok navštevuje ..... detí z triedy.

**Otázka č. 3:** Koľko % detí z triedy je zapojených do krúžkovej činnosti v škole?

Výpočet:

Odpoveď: Do krúžkovej činnosti je zapojených ..... detí z triedy.

**Otázka č. 4:** O koľko percent je v triede menej dievčat ako chlapcov ? Výsledok zaokrúhli na dve desatinné miesta.

Výpočet:

Odpoveď: Dievčat je v triede o ..... menej ako chlapcov.

Ani dievčatá v triede nezháľali. Najbystrejšie dievča si pripravilo pre spolužiakov tieto otázky:

**Otázka č. 5:** Akú časť z celkového počtu žiakov triedy tvoria dievčatá?

Výsledok napíšte v tvare zlomku v základnom tvare.

Výpočet:

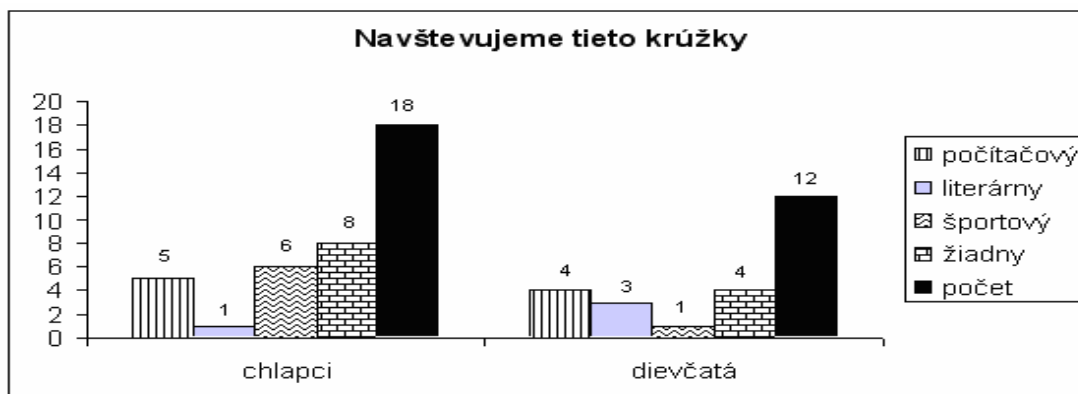
Odpoveď: Dievčatá tvoria ..... počtu všetkých žiakov triedy.

**Otázka č. 6:** V ktorej zo skupín dievčat alebo chlapcov je väčšia časť detí zapojená do krúžkovej činnosti v škole? Svoju odpoveď zdôvodnite.



Výpočet:

### RIEŠENIE: ZÁUJMOVÉ KRÚŽKY



- Očakáva sa správne určenie hodnôt na y-novej osi.
- 9 detí. Správne riešenie je sčítanie počtu detí, ktoré navštevujú počítačový krúžok ( $5 + 4 = 9$ ).
- 60 % detí. Očakávané riešenie je správne určenie počtu chlapcov zapojených do krúžkovej činnosti ( $18 - 8 = 10$  chlapcov) a počtu dievčat zapojených do krúžkovej činnosti ( $12 - 4 = 8$ ). 100 % je  $18 + 12 = 30$  detí.  $10 + 8 = 18$  detí z 30 detí tvorí 60 %.
- 33,33 %. Dievčat je o 6 menej ako chlapcov, chlapcov je 18. 6 dievčat z 18 tvorí 33,33 %.
- $\frac{2}{5}$ .
- Zo skupiny dievčat. Z 18 chlapcov krúžky navštevuje 10 chlapcov, čo je  $\frac{5}{9}$ . Z 12 dievčat krúžky navštevuje 8, čo je  $\frac{2}{3}$ . Porovnaním zlomkov zistíme očakávaný výsledok.

### 2.1.1 Metodická časť

**Veková kategória:** Žiaci 7. ročníka ZŠ

**Tematický celok:** Percentá

**Forma práce:** Test

**Vstupné vedomosti:**

- vedieť rozlíšiť a vypočítať počet percent, základ a hodnotu príslušnú k počtu percent,
- čítanie stĺpcových diagramov.

**Ciele úlohy:**

- overiť schopnosť riešiť neštandardné úlohy,
- získanie zručnosti pri riešení úloh,
- viesť žiakov k pozornej a sústredenej práci,
- rozvoj zručnosti pri čítaní neštandardných grafov

**Časové rozpätie:** 30 minút.

### 2.1.2 Realizácia a výsledky úlohy

Úloha bola realizovaná v 7. ročníku ZŠ po tematickom celku: Percentá. Žiaci riešili úlohu samostatne ako test 30 minút. Pripomienky mali niektorí žiaci k 1. otázke. Najprv si mysleli, že v grafe je chyba, lebo podľa nich chlapcov je viac ako 18. Po oznámení, že graf je správny, buď prišli na podstatu úlohy, alebo riešili úlohu s chybnými údajmi.

Jednotlivé otázky som vyhodnocovala bodovým hodnotením, t. z ., bodovala som jednotlivé operácie, ktoré je potrebné vykonať, aby sme dospeli k správne mu výsledku:

1. otázka: za každé správne číslo doplnené v grafe 0,5 b, spolu 4 b.
2. otázka: za výpočet 1b.
3. otázka: po 1 b za určenie počtu detí v triede, počtu detí v krúžkoch, výpočet %, spolu 3 b.
4. otázka: po 1 b za určenie rozdielu, výpočet %, zaokrúhlenie, spolu 3 b.
5. otázka: po 1 b za zápis zlomku, úpravu zlomku na základný tvar, spolu 2 b.
6. otázka: po 1 b za výpočet zapojenosti dievčat, chlapcov do krúžkov, porovnanie, spolu 3 b.

Po vyhodnotení jednotlivých otázok podľa uvedeného bodovania bola priemerná úspešnosť triedy 64,9 % a úspešnosť v jednotlivých otázkach je uvedená v tabuľke:

Otázka č.	1	2	3	4	5	6
Úspešnosť v %	90,4	100	60	23,3	53,3	27,8

#### Poznámky k riešeniu žiakov:

- otázka: niektorí žiaci nesprávne načítali údaje z grafu, najčastejšie robili chyby v počte chlapcov, alebo počet chlapcov neuviedli.
- otázka: žiaci riešili správne .
- otázka: najviac chýb bolo v počte žiakov zapojených do krúžkovej činnosti alebo v počte žiakov v triede, ďalšie riešenie bolo správne.
- otázka: niektorí žiaci riešili úlohu nesprávne ako rozdiel počtu percent chlapcov v triede a počtu percent dievčat v triede ( $60\% - 40\% = 20\%$ ).
- otázka: hodnoty zlomkov boli rôzne (podľa načítaných údajov z grafu), ale aj  $\frac{12}{1}$  .
- otázka: žiaci úlohu riešili prevažne pomocou percent. Niektorí žiaci si úlohu vysvetlili po svojom: porovnali počet chlapcov a počet dievčat navštevujúcich krúžky alebo svoju odpoveď zdôvodnili zameraním krúžkov.

**Neštandardnosť úlohy:** Žiaci sa s otázkami číslo 1 a 6 ešte nestretli, s otázkou č. 3 sa stretli zriedkavo a s otázkami č. 2, 4, 5 sa stretávajú pomerne často.

**Obťažnosť úlohy:** Na základe výsledkov, ktoré dosiahli žiaci pri riešení jednotlivých otázok, sú otázky číslo 1, 2, 5 ľahké, otázka č. 5 stredne ťažká a otázky č. 4, 6 ťažké.

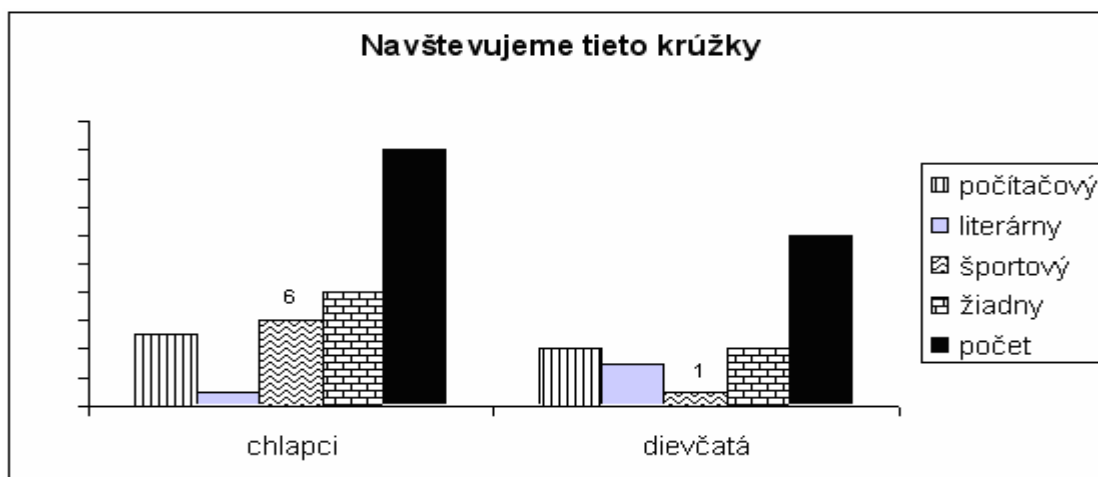
Rôznorodosť výsledkov v úlohe Záujmové krúžky bola spôsobená chybami v riešení

- otázky:
  - chybné určenie počtu žiakov v niektorom stĺpiku,
  - chybné určenie počtu chlapcov,
  - chybné určenie počtu chlapcov zapojených do krúžkovej činnosti,
  - chybné určenie počtu žiakov.

Táto skutočnosť znižuje úspešnosť riešenia žiakov a komplikuje prácu učiteľovi pri kontrole žiackych riešení. Z tohto dôvodu navrhujem rozdeliť úlohu na dve samostatné úlohy. V prvej úlohe sa overí čítanie a porozumenie grafickým údajom, v druhej úlohe sa precvičia a upevnia percentá:

## ZÁUJMOVÉ KRÚŽKY I

Triedna učiteľka poverila svoje žiačky, aby jej zistili, aké krúžky v škole navštevujú jej žiaci. Dievčatá úloha zaujala, preto výsledky zverejnili v triede na nástenke vo forme takéhoto diagramu.



Bezprostredne po zverejnení diagramu sa spolužiaci sústredili pri nástenke a porovnávali zapojenosť žiakov do jednotlivých krúžkov. Najväčší huncút triedy vraví: „Dievčatá, vašu prácu trošku vylepším“ a začal písať číslo nad prvým stĺpikom.

**Otázka č. 1:** Doplňte v grafe počet žiakov nad jednotlivými stĺpikmi.

**Otázka č. 2:** Koľko detí z triedy navštevuje v škole počítačový krúžok?

Výpočet:

Odpoveď: Počítačový krúžok navštevuje ..... detí z triedy.

**Otázka č. 3:** O koľko viac chlapcov ako dievčat je v triede zapojených do

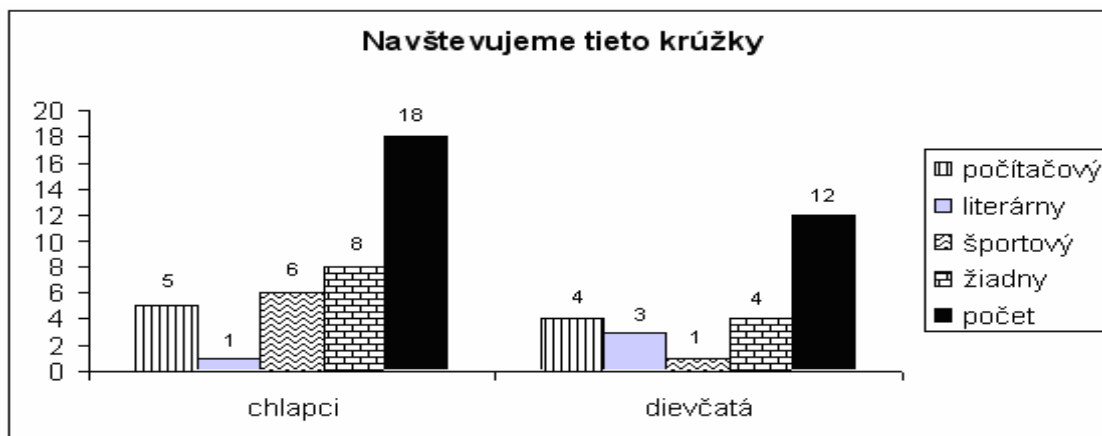
krúžkovej činnosti v škole ?

Výpočet:

Odpoveď:.....

### RIEŠENIE: ZÁUJMOVÉ KRÚŽKY I

1.



Očakáva sa správne určenie hodnôt na y-novej osi.

2. 9 detí. Správne riešenie je sčítanie počtu detí, ktoré navštevujú počítačový krúžok ( $5 + 4 = 9$ ).
3. O 2 chlapcov. Očakávané riešenie je správne určenie počtu chlapcov zapojených do krúžkovej činnosti ( $18 - 8 = 10$ ) a počtu dievčat zapojených do krúžkovej činnosti ( $12 - 4 = 8$ ). Chlapcov je viac o 2 ( $10 - 8 = 2$ ).

### ZÁUJMOVÉ KRÚŽKY II

Dano a Paľo zistili, že ich spolužiaci z triedy navštevujú najviac jeden krúžok v škole. Údaje spracovali, znázornili stĺpcovým diagramom a zverejnili na nástenke



v triede. Diagram vyzeral takto:

Triedna učiteľka bola aktivitou chlapcov milo prekvapená. Pochválila ich a požiadala o tieto výpočty:

**Otázka č. 1:** V ktorom krúžku v škole je zapojených najviac dievčat?

Odpoveď: .....

**Otázka č. 2:** Koľko % detí z triedy je zapojených do krúžkovej činnosti v škole?

Výpočet:

Odpoveď: Do krúžkovej činnosti je zapojených ..... detí z triedy.

**Otázka č. 3:** O koľko percent menej je v triede dievčat ako chlapcov? Výsledok zaokrúhli na dve desatinné miesta.

Výpočet:

Odpoveď: Dievčat je v triede o ..... menej ako chlapcov.

Ani dievčatá v triede nezaháľali. Najbystrejšie dievča si pripravilo pre spolužiakov tieto otázky:

**Otázka č. 4:** Akú časť z celkového počtu žiakov triedy tvoria dievčatá? Výsledok napíšte v tvare zlomku v základnom tvare.

Výpočet:

Odpoveď: Dievčatá tvoria ..... počtu všetkých žiakov triedy.

**Otázka č. 5:** V ktorej zo skupín dievčat alebo chlapcov je väčšia časť detí zapojená do krúžkovej činnosti v škole? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výpočet:

Odpoveď so zdôvodnením:

### RIEŠENIE: ZÁUJMOVÉ KRÚŽKY II

1. V počítačovom a literárnom krúžku. Očakávané riešenie je priamym odčítaním z grafu.
2. 60 % detí. Očakávané riešenie je správne určenie počtu chlapcov zapojených do krúžkovej činnosti ( $4+1+5 = 10$ ), počtu dievčat zapojených do krúžkovej činnosti ( $3+3+2 = 8$ ) a počtu žiakov v triede ( $10+8+8+4 = 30$ ). 100 % je  $18+12 = 30$  detí.  $10+8 = 18$  detí z 30 detí tvorí 60 %.
3. 33,33 %. Dievčat je o 6 menej ako chlapcov, chlapcov je 18. 6 dievčat z 18 tvorí 33,33 %.
4.  $\frac{2}{5}$ .
5. Zo skupiny dievčat. Z 18 chlapcov krúžky navštevuje 10 chlapcov, čo je  $\frac{5}{9}$ . Z 12 dievčat krúžky navštevuje 8, čo je  $\frac{2}{3}$ . Porovnaním zlomkov zistíme očakávaný výsledok.

## 1.3 Jakubove výrobky

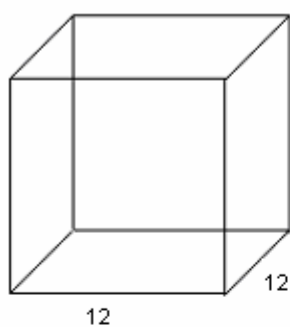
K úlohe Jakubove výrobky ma inšpirovala kniha Patricie Cornwellovej Riziko, z ktorej uvádzam ukážku:

Zastane, obzerá sa, počúva, zapája všetky zmysly. Vzduch je nehybný, obývačka opustená. Vyberie zo zásuvky baterku a posvieti si na dlážku, nábytok, okná, hľadá stopy nôh alebo po prstoch v prachu aj na lesklých povrchoch.

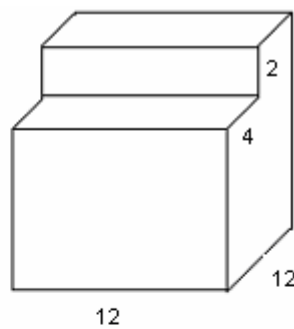
Bolo mi jasné, že chcem vytvoriť úlohu podporujúcu predstavivosť žiakov. Stačí vybrať vhodné teleso, ktoré zanechá peknú stopu a bude ma zaujímať aj jeho povrch. Načrtla som si niekoľko rôznych telies a ich stopy. Nepáčilo sa mi to. Potom som sa sústredila na kocku a výrezy v nej, rozmery chýbajúcich častí a jednotlivé stopy. Keď som si konečne vybrala štyri telesá, premyslela som si text, otázky a zaslala konzultantovi návrh úlohy.

### Jakubove výrobky – 1. verzia

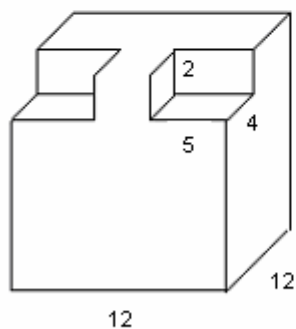
Jakub sa učí za stolára. Z dreva si vyrobil 4 zhodné kocky s hranou 12 cm. Prvú nechal bez zmeny. Z druhej kocky vyrezal kváder s rozmermi 12 cm, 4 cm, 2 cm. Z tretej kocky vyrezal dva zhodné kvádre s rozmermi 5 cm, 4 cm, 2 cm. Zo štvrtej kocky vyrezal dve zhodné kocky s hranou 4 cm. Jeho výrobky - hranoly vyzerali takto:



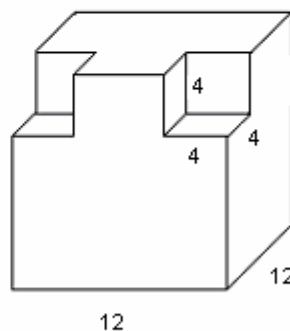
1



2



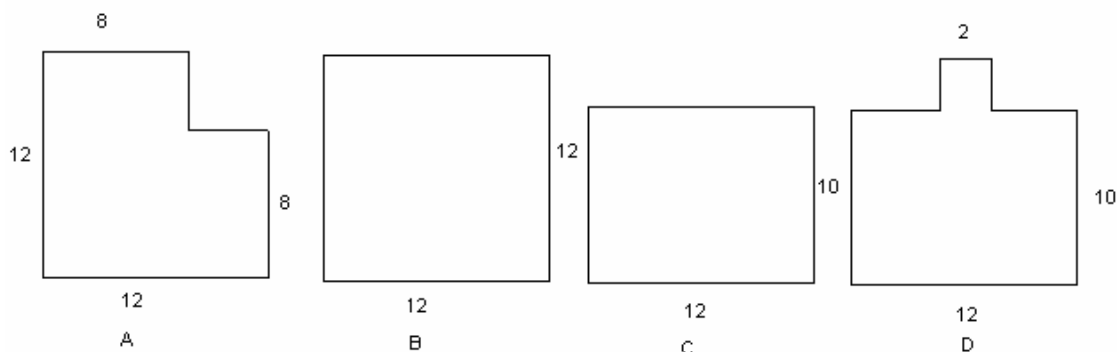
3



4



Každé teleso položil na čistú policu . Po dlhšom čase na polici ostali pod hranolmi tieto stopy:



1. Prirad' hranolom (1-4) stopy (A-D), ktoré ostali na zaprášenej polici.

Hranolu 1 zodpovedá stopa .....

Hranolu 2 zodpovedá stopa .....

Hranolu 3 zodpovedá stopa .....

Hranolu 4 zodpovedá stopa.....

Neskôr sa rozhodol, že hranol s najmenším povrchom dvakrát natrie červenou farbou a venuje ho sestre.

1. Ktorý hranol Jakub natrie červenou farbou?

Jakub natrie červenou farbou hranol .....

2. Mohol Jakub položiť na policu teleso tak, aby vznikli dve rovnaké stopy, ale rôzne od stopy B ?

Áno Nie.

Zdôvodnenie.

Po zaslaní úlohy na konzultáciu prišla rýchla odpoveď s navrhovanými pripomienkami:

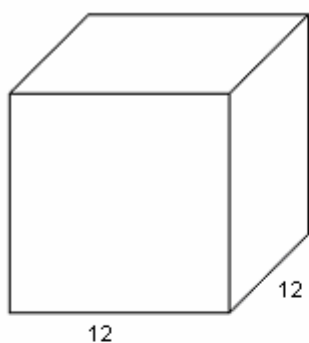
- znázorniť telesá tak, aby rozmery všade zodpovedali skutočným proporciám,
- zvážiť označenie telies, lebo je málo výrazné,
- čísla pri stopách nemusia byť,
- doplniť úlohu o výpočet obvodov stôp,

- pýtať sa aj na najväčší povrch, pretože žiaci zrejme budú počítat' povrchy všetkých telies, aby zistili správnu odpoveď.

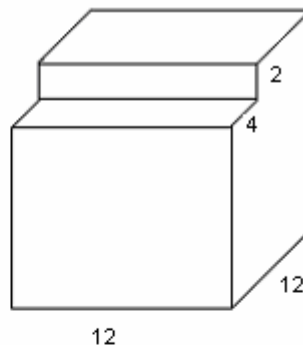
Po týchto úpravách úloha nadobudla takúto konečnú podobu:

### JAKUBOVE VÝROBKY

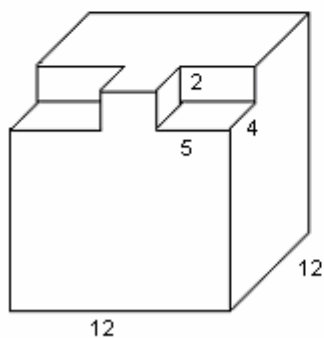
Jakub bude stolárom. Z dreva si vyrobil štyri zhodné kocky s hranou 12 cm. Prvú nechal bez zmeny. Z druhej kocky vyrezal kváder s rozmermi 12cm, 4 cm, 2 cm. Z tretej kocky vyrezal dva kvádre s rozmermi 5 cm, 4 cm, 2 cm. Zo štvrtej kocky vyrezal dve kocky s hranou 4 cm. Jeho výrobky – telesá vyzerali takto:



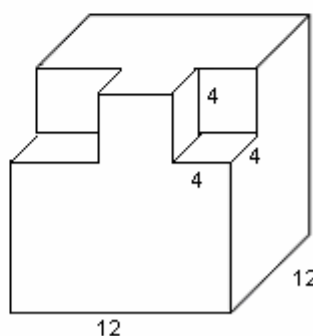
Teleso 1



Teleso 2

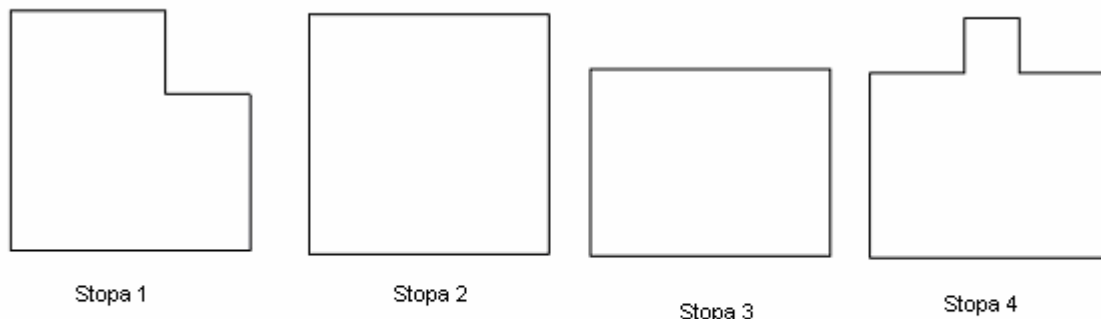


Teleso 3



Teleso 4

Každé teleso položil na čistú policu. Po dlhšom čase na polici ostali pod telesami tieto nezaprášené stopy:



**Otázka č. 1:** Priradi telesám (1-4) stopy (1-4), ktoré ostali na zaprášenej polici.

Odpoveď: Stopa ..... zodpovedá telesu .....  
 Stopa ..... zodpovedá telesu .....  
 Stopa ..... zodpovedá telesu .....  
 Stopa ..... zodpovedá telesu .....

**Otázka č. 2:** Urč obvody jednotlivých mnohoúhelníkov – stôp.

Výpočet:

Odpoveď: Stopa 1 má obvod ..... cm, stopa 2 má obvod ..... cm,  
 stopa 3 má obvod ..... cm a stopa 4 má obvod ..... cm.

Neskôr sa rozhodol, že teleso s najmenším povrchom dvakrát natrie červenou farbou a venuje ho sestre.

**Otázka č. 3:** Ktoré teleso Jakub venuje sestre?

Výpočet:

Odpoveď: Jakub venuje sestre teleso ..... , lebo má ..... povrch.

Jakub bol so svojím výrobkom veľmi spokojný, ale minula sa mu farba. Keď si kúpi novú farbu, dvakrát ňou natrie teleso s najväčším povrchom.

**Otázka č. 4:** Ktoré teleso má najväčší povrch?

Odpoveď: .....

Jakub mohol položiť na policu dve zo svojich štyroch telies tak, aby po čase zanechali dve rovnaké neštvorcové stopy.

**Otázka č.5 :** A) Ktoré z telies zanechajú takú stopu? B) Narysuj túto stopu.

Odpoveď: A) .....

B)

### RIEŠENIE: JAKUBOVE VÝROBKY

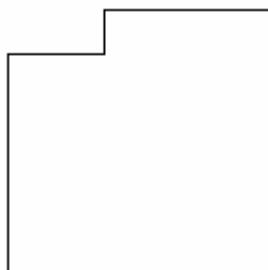
1. Telesu 1 zodpovedá stopa 2.

Telesu 2 zodpovedá stopa 3.

Telesu 3 zodpovedá stopa 4.

Telesu 4 zodpovedá stopa 1.

2. Stopy 1, 2, 4 majú rovnaký obvod 48 cm, stopa 3 má obvod 44 cm.
3. Teleso 2. Očakáva sa, že žiaci budú počítať povrchy jednotlivých telies. Telesá 1, 3, 4 majú rovnaký povrch  $864 \text{ cm}^2$ , teleso 2 má povrch  $848 \text{ cm}^2$ .
4. Natrel všetky tri zvyšné telesá.
5. Telesá 2, 3.



### 1.3.1 Metodická časť

**Veková kategória:** Žiaci 6. ročníka ZŠ

**Tematický celok:** Objem a povrch kvádra a kocky

**Forma práce:** práca žiakov v štvorčlenných heterogénnych skupinách

**Vstupné vedomosti:**

- výpočet obvodu mnohoúhelníka – obrazca zloženého zo štvorca a obdĺžnika,
- výpočet povrchu kocky

**Ciele úlohy:**

- rozvíjať priestorovú predstavivosť žiakov,
- viesť žiakov k objavovaniu vzťahu medzi obvodom štvorca a mnohoúhelníka,
- viesť žiakov k objavovaniu vzťahu medzi povrchom kocky a hranola,
- rozvoj spolupráce, komunikácie a tvorivosti žiakov

**Forma výstupu:** písomná – žiaci spoločne riešia úlohu Jakubove výrobky

**Časové rozpätie:** jedna vyučovacia hodina.

### 1.3.2 Realizácia a výsledky úlohy

Úloha bola odskúšaná v 6. ročníku ZŠ s počtom žiakov 25 na jednej vyučovacej hodine po tematickom celku: Objem a povrch kocky a kvádra. Žiaci boli rozdelení do piatich štvorčlenných skupín tak, aby v každej skupine bol výborný žiak.

Jednu skupinu tvorili piati rómski žiaci. V skupine mal každý žiak zadanie úlohy. Každá skupina spoločne vypracovala a odovzdala jeden exemplár úlohy.

Hodina dopadla nad moje očakávanie. Žiaci pracovali so záujmom a nadšením, mali radosť z vyriešených otázok, v rámci skupín sa rozprúdila živá diskusia a snažili sa, aby dopadli čo najlepšie. K úlohe mali iba otázku:

Telesá môžeme ľubovoľne otáčať?

Myslím, že je to nutné – odpovedala som.

Na nasledujúcej hodine som práce rozdala, povedali sme si správne výsledky a vyhodnotila som jednotlivé skupiny. Keďže z maximálneho počtu 15 bodov získali najviac 10 bodov, nehodnotila som práce známkou iba bodmi (3,2,1), ktoré sa im potom premietli do známky. Najviac sa mi páčila poznámka:

Bolo to zaujímavé a také ľahké, iba sme sa nevedeli vtedy na to správne pozerat'.

### 1.3.3 Ďalšie formy práce s úlohou

Túto úlohu som overovala aj v siedmom ročníku formou testu. Žiaci riešili úlohu samostatne 30 minút. Úloha žiakov oslovila natoľko, že som bola v triede takmer zbytočná.

Úloha Jakubove výrobky sa páčila žiakom šiesteho aj siedmeho ročníka, preto som sa rozhodla ju odučiť aj v piatom ročníku po tematickom celku: Obsah obrazca.

**Počet žiakov:** 30

**Čas riešenia:** 40 minút

**Forma práce:** práca v dvojiciach

**Povaha práce:** konvergentná objaviteľská práca

**Zásahy učiteľa:** diskusia s výkladom pri 3. a 4. otázke.

Na vyučovacej hodine každý žiak dostal úlohu Jakubove výrobky. Potom som pomaly čítala zadanie úlohy, spýtala sa, či pochopili text a či majú nejaké otázky. Vyskytli sa otázky: Môžeme ich otáčať ako chceme? Keď sme si to vydiskutovali, prečítala som prvú otázku a nechala ich pracovať vo dvojiciach. Podobne to bolo s otázkou č.2. Nakoľko ďalšie otázky súvisia s povrchom, vyžiadalo si to určité zdržanie zo strany učiteľa. V ruke som mala model kocky a so žiakmi som viedla túto diskusiu:

1. Koľko stien má kocka?

Martin: Šesť.

2. Aký geometrický tvar majú steny kocky?

Barbora: Všetky steny majú tvar štvorca.

3. Ako vypočítame obsah štvorca?

Simona: Vynásobíme dĺžky jeho dvoch strán.

4. Aký obsah bude mať šesť rovnakých štvorcov?

Robo: Bude 6-krát väčší.

Obsah týchto šiestich štvorcov - stien tvorí povrch kocky. Povrch kocky tvoria všetky jej steny.

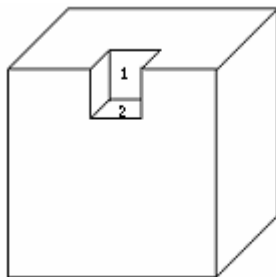
Spoločne sme si určili povrch kociek s hranou a) 2 m b) 30 dm

Pri týchto spoločných výpočtoch žiaci získali jasnú predstavu ako vypočítať povrch ľubovoľnej kocky. Ďalej som sa žiakov pýtala:

5. Sú telesá 2, 3, 4 kocky?

Dodka: Nie, lebo z nich Jakub vyrezal určité časti. Ostatní žiaci potvrdili jej slová.

Na tabuli som mala načrtnutú kocku a z nej vyrezanú menšiu kocku v prostriedku hornej hrany.



Ukazovala som a pýtala sa žiakov:

6. Čo sa stane s povrchom telesa, ak si štvorček 1 vysunieme zároveň s prednou stenou a štvorček 2 zároveň s hornou stenou?

Eva: Zatiaľ povrch je taký istý ako pri kocke, ale sú tam ešte dva nevysunuté štvorčeky.

Áno a práve tie rozhodujú o povrchu telesa. Dané teleso má okrem šiestich stien aj tieto dva malé štvorčeky, ľavý a pravý.

7. Vieme, aký bude povrch telesa?

Martina: Povrch telesa bude väčší ako povrch kocky, z ktorej bolo vyrezané.

Po tomto tvorivom zdržaní som žiakom dala tieto pokyny: Vašou úlohou je vypočítať povrch kocky a pri ostatných telesách zistiť aký majú povrch vysúvaním jednotlivých častí. Ak vyriešite otázky č.3 a č.4, pokračujte otázkou č.5. Žiaci sa ešte pýtali, či stačí iba načrtnúť stopu, lebo nemajú rysovacie pomôcky.

Jednotlivé otázky som vo všetkých troch triedach bodovala takto:

1. otázka: za každú správne priradenú stopu telesu 1 b, spolu 4 b.
2. otázka: za každý správny obvod stopy 1 b, spolu 4 b.
3. otázka: výber požadovaného telesa a výpočet povrchu po 1 b, spolu 2 b.
4. otázka: výber požadovaných telies po 1 b, spolu 3 b.
5. otázka: po 1 b za výber požadovaných telies, náčrt stopy, spolu 2 b.



Všetky tieto triedy sú obyčajné s priemernou polročnou známku z matematiky 3,5. V triedach sú väčšinou v prevahe prospechovo slabší žiaci. Najlepšie sa pracuje v 7.B, najhoršie v 6.B, a to nielen na hodinách matematiky.

#### **Poznámky k riešeniu žiakov:**

Žiaci pri riešení jednotlivých otázok sa dopúšťali najčastejšie týchto chýb:

1. V otázke č.1 opačne priradili stopy: K stope 1 priradili teleso 3  
K stope 4 priradili teleso 4

Žiaci nerozlišovali štvorec a obdĺžnik v mnohouholníkoch.



2. V otázke č.2 chybne počítali obvod stopy 3. Žiaci nesprávne určili druhý rozmer v obdĺžniku, a to aj tí žiaci, ktorí správne priradili stopy jednotlivým telesám. Žiaci nesprávne počítali:  $(12+ 8).2 = 40$
3. V otázke č.3 a 4 žiaci 6. ročníka a niektorí siedmci počítali povrch kocky ako súčet obsahov mnohouholníkov. Pri týchto výpočtoch urobili numerické chyby. Okrem povrchu kocky, všetky ostaté telesá mali povrch, ktorý nezodpovedal realite.
4. V otázke č.5 niektorí žiaci videli rovnaké neštvorcové stopy v telesách 3 a 4, prípadne zabudli narysovať túto stopu.

Pri vyhodnocovaní žiackych riešení som bola prekvapená, že šiestaci a niektorí siedmci počítali obvody stôp 1 a 4 ako súčet všetkých strán a piataci dopĺňovaním na štvorec. Podobne ma zaskočilo, že šiestaci a niektorí siedmci nevedeli v telesách 2, 3 a 4 vysúvať jednotlivé časti a tak určiť povrch telies.

**Neštandardnosť úlohy:** Žiaci sa s otázkou č. 1 stretli zriedkavo, s otázkami č. 2, 3, 4 sa stretávajú pomerne často, s otázkou č. 5 sa ešte nestretli.

**Obťažnosť úlohy:** Na základe výsledkov, ktoré dosiahli žiaci pri riešení jednotlivých otázok, sú otázky číslo 1, 2 ľahké, otázka č. 5 dosť ľahká a otázky č. 3, 4 stredne ťažké.

Aj napriek tomuto zisteniu hodnotím realizovanie tejto úlohy na vyučovaní kladne. Pre žiakov bola prínosom pri rozvoji priestorovej predstavivosti a napriek ich tvrdeniu, že sme to nikdy v škole nerobili, uznali, že stačí mať oči otvorené a všetko je ľahko realizovateľné a riešiteľné.

## 1.4 Škatuľky

V jednoduchšej a kratšej podobe (náčrt obrázku, S, V) som úlohu Škatuľky používala vo svojej pedagogickej praxi skôr. Príklady typu: Vypočítaj objem (povrch) kvádra, ak sú dané jeho rozmery boli pre deti nezaujímavé a nudné. Táto jednoduchá úloha bola pre deti iná tým, že rozmery si museli určiť z obrázka, čo viedlo k diskusii, zamysleniu, vzájomnej výmene názorov, určeniu správnych rozmerov škatuľky a myslím si, že to bola oveľa prospešnejšia práca ako mechanické počítanie objemu a povrchu kvádra.

Túto úlohu som doplnila o ďalšiu škatuľku iných rozmerov, pridala text, na základe ktorého vznikli aj ďalšie otázky.

### Škatuľky – 1. verzia

Z dvoch obdĺžnikových kartónov s rozmermi 28 cm a 14 cm si Ivo a Emil vyrobili dve škatuľky. Ivo odstrihol v každom rohu štvorec so stranou dlhou 4 cm. Pozdĺž čiarkovaných čiar zahol kartón nahor a zlepil bočné steny škatuľky. Emil postupoval podobne, iba v každom rohu odstrihol štvorec so stranou dlhou 2 cm.

Ivo postupoval takto:



1. Aké rozmery majú škatuľky?

Odpoveď: Emilova škatuľka má rozmery.....

Ivova škatuľka má rozmery.....

2. Ktorá škatuľka má väčší objem ?

Výpočet:

Odpoveď: Emilova škatuľka má objem....., Ivova škatuľka má objem ..... , čiže

.....

3. Dá sa z toho istého kartónu zhotoviť škatuľka s objemom väčším ako 0,5l? (rozmery škatuľky sú celé čísla v cm).

Áno Nie

Zdôvodnenie:

4. Emil sa rozhodol svoju škatuľku zvonku oblepiť. Bude mu stačiť na oblepenie škatuľky ozdobný papier tvaru obdĺžnika s rozmermi 40 cm a 10 cm ?

Výpočet:

Odpoveď:

Po zaslaní úlohy na konzultáciu mi bolo navrhnuté:

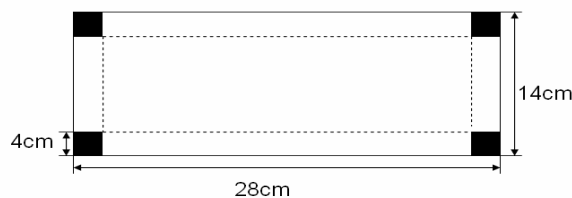
- vymyslieť námet, prečo chlapci robili škatuľky,
- prečo potrebujeme určiť rozmery škatuľky a počítať ich objem,
- prečo potrebujeme zhotoviť škatuľku s väčším objemom ,
- ako má Emil postupovať pri oblepení škatuľky, aby to nebolo príliš zložité.

Pri vzájomnej konzultácii sa cibril a dopĺňal text k daným otázkam, aby boli zmysluplnejšie a motivovali deti k práci. Úloha nadobudla takúto konečnú podobu:

## ŠKATUĽKY

Z dvoch obdĺžnikových kartónov s rozmermi 28 cm a 14 cm si Ivo a Emil vyrábali dve škatuľky na odkladanie farbičiek. Ivo vystrihol z každého rohu štvorec so stranou dlhou 4 cm. Pozdĺž čiarkovaných čiar vyhol kartón nahor a zlepil bočné steny škatuľky. Emil postupoval podobne, iba v každom rohu vystrihol štvorec so stranou dlhou 2 cm.

Ivo postupoval takto:



Pri práci sa chlapci chvastali:

Emil: „Moja škatuľka bude dlhšia, širšia a vyššia ako tvoja.“

Ivo: „To nič, do mojej škatuľky sa zmestí viac farbičiek, lebo bude mať väčší objem ako tvoja.“

**Otázka č. 1:** Aké rozmery majú jednotlivé škatuľky?

Odpoveď: Emilova škatuľka má rozmery .....

Ivova škatuľka má rozmery .....

**Otázka č. 2:** Aké objemy majú škatuľky chlapcov?

Výpočet:

Odpoveď: Emilova škatuľka má objem ....., Ivova škatuľka má objem.....

**Otázka č. 3:** Ktorý chlapec hovoril pravdu o svojej škatuľke?

Zdôvodnenie:

Ivova sestra Janka potrebuje podobnú škatuľku na uloženie korálikov, ktoré má odložené v prasknutom pollitrovom pohári a bojí sa, že by sa pri práci mohla poraniť alebo rozsypať koráliky.

**Otázka č. 4:** Môžu chlapci z kartónu tých istých rozmerov zhotoviť škatuľku s objemom aspoň 0,5 l? Rozmery krabičky sú celé čísla v cm.

Odpoveď: Áno Nie

Zdôvodnenie:

Emil sa rozhodol svoju škatuľku zvonku oblepiť.

**Otázka č. 5:** Bude mu stačiť na oblepenie škatuľky ozdobný papier tvaru obdĺžnika s rozmermi 40 cm a 10 cm, ak každú stenu chce oblepiť ozdobným papierom vcelku?

Odpoveď: Áno      Nie

### RIEŠENIE: ŠKATUĽKY

1. Emilova škatuľka má rozmery: 24 cm, 10 cm, 2 cm, Ivova škatuľka má rozmery: 20 cm, 6 cm, 4 cm.
2. Obidve škatuľky majú rovnaký objem -  $480 \text{ cm}^3$ .
3. Ani jeden. Emilova škatuľka nie je vyššia. Ivova škatuľka má rovnaký objem ako Emilova škatuľka.
4. Áno, stačí z každého rohu kartónu vystrihnúť štvorec so stranou 3 cm, objem škatuľky bude 0,528 l.
5. Nie. Aj keď povrch škatuľky je menší ako obsah papiera, nedajú sa z neho vystrihnúť jednotlivé obdĺžniky vcelku ako Emil plánoval.

#### 1.4.1 Metodická časť

**Veková kategória:** Žiaci 6. ročníka ZŠ

**Tematický celok:** Objem a povrch kvádra a kocky

**Forma práce:** testom

**Vstupné vedomosti:**

- výpočet objemu a povrchu kvádra,
- premena jednotiek objemu

**Ciele úlohy:**

- rozvíjať priestorovú predstavivosť žiakov,
- rozvíjať logické a tvorivé myslenie,
- rozvíjať schopnosť riešiť neznámy problém

**Forma výstupu:** písomná

**Časové rozpätie:** 35 minút.

### 1.4.2 Realizácia a výsledky úlohy

Úloha bola realizovaná formou testu v 6. ročníku ZŠ s počtom žiakov 25 po tematickom celku: Objem a povrch kocky a kvádra. Žiaci k úlohe nemali žiadne otázky a nejasnosti.

Jednotlivé otázky žiaci riešili takto:

1. otázka: 13 žiakov riešilo úlohu správne,
  - 9 žiakov neodčítalo vystrihnutú časť z kartónu,
  - 3 žiaci uviedli správne dĺžku a šírku škatuľky, ale neuviedli jej výšku.
  
2. otázka: 20 žiakov správne vypočítalo objem škatuliek (vzhľadom na určené rozmery),
  - 2 žiaci správne vypočítali objem iba jednej škatuľky,
  - 3 žiaci vypočítali obsah obdĺžnika.
  
3. otázka: 8 žiakov uviedlo správnu odpoveď so zdôvodnením,
  - 2 žiaci správne odpovedali, ale neuviedli úplné zdôvodnenie,
  - 2 žiaci uviedli odpoveď: Ivo mal pravdu, Emil nemal pravdu (vzhľadom na uvedené rozmery škatuliek bolo tvrdenie správne),
  - 4 žiaci uviedli: Obaja chlapci mali pravdu  
(aj keď vypočítané objemy škatuliek boli rovnaké),
  - 9 žiakov uviedlo nesprávne odpovede, napr.:  
Ivo mal pravdu. Emil mal pravdu.
  
4. otázka: 1 žiak odpovedal áno, ak vystrihne iný štvorček,
  - 7 žiakov odpovedalo áno s nesprávnym zdôvodnením, napr. :  
Ak by dal rozmery strán škatuľky 30 cm, 3 cm a 6 cm.  
Lebo Emil aj Ivo majú objem škatuliek viac ako 0,5 l.
  - 10 žiakov odpovedalo nie so zdôvodnením: Objem je  $480 \text{ cm}^3 < 0,5 \text{ l}$ .
  - 7 žiakov úlohu neriešilo.
  
5. otázka: 8 žiakov odpovedalo správne so zdôvodnením,

9 žiakov odpovedalo áno so zdôvodnením:

Rozmery škatuľky sú menšie ako rozmery papiera.

Rozmery papiera sú väčšie ako škatuľky.

8 žiakov úlohu neriešilo.

Odpovede som rozdelila do troch skupín: 1. správne odpovede,  
2. pokus o riešenie,  
3. neriešené úlohy.



### Poznámky k riešeniu žiakov:

Pri riešení žiaci najčastejšie robili tieto chyby:

1. otázka: nesprávne načítanie rozmerov: a) 28 cm, 14 cm, 2 cm (neodčítali vystrihnutú časť),  
b) 24 cm, 10 cm (neuviedli výšku škatuľky).
2. otázka: nesprávne výpočty boli iba tie, kde žiaci neuviedli tretí rozmer škatuľky a vypočítali obsah obdĺžnika.
3. otázka: žiaci často uviedli iba neúplné zdôvodnenie :
  - Ani jeden, pretože škatuľky majú rovnaký objem.
  - Ani jeden, lebo Emilova škatuľka nie je vyššia.
  - Emil mal pravdu, lebo jeho škatuľka je širšia a dlhšia. Ivo nemal pravdu, lebo objemy škatuliek sú rovnaké.
  - Emil aj Ivo hovorili pravdu.
  - Emil hovoril pravdu, Ivo nehovoril pravdu.

4. otázka: žiaci buď odpovedali bez zdôvodnenia (áno), alebo zdôvodňovali svoje tvrdenie(nie) takto: objem škatuľky je  $480 \text{ cm}^3 = 0,48 \text{ l} < 0,5 \text{ l}$ . Jeden žiak odpovedal, že treba vystrihnúť iný štvorček. Túto otázku žiaci nepochopili a neskúšali vyrobiť novú škatuľku.

5. otázka: žiaci väčšinou odpovedali nie, lebo má málo papiera, ale aj:

- Nie. Na oblepenie škatuľky potrebuje dva obdĺžniky s rozmermi 24 cm a 2 cm a jeden obdĺžnik s rozmerom 24 cm a 10 cm, t. z. ., potreboval by papier s rozmerom 48 cm a 10 cm.
- Áno, lebo povrch škatuľky je menší ako obsah papiera.

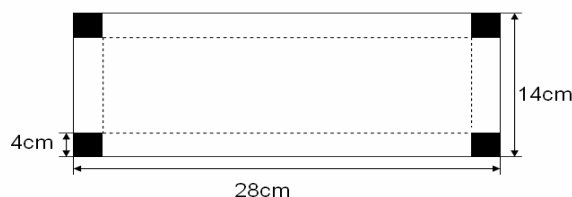
**Neštandardnosť úlohy:** Žiaci sa s otázkami č. 1, 3, 5 stretli zriedkavo, s otázkou č. 2 sa stretávajú bežne, s otázkou č. 4 sa ešte nestretli.

**Obťažnosť úlohy:** Na základe výsledkov, ktoré dosiahli žiaci pri riešení jednotlivých otázok, sú otázky číslo 1, 2 ľahké, otázka č. 3 stredne ťažká, otázka č. 4 ťažká a otázka č. 5 dosť ťažká.

Z dôvodu nesprávneho pochopenia otázky č. 4 žiakmi navrhujem malú úpravu v úvodnom texte a v otázke č.4:

## ŠKATUĽKY

Z obdĺžnikových kartónov s rozmermi 28 cm a 14 cm si Ivo a Emil vyrábali škatuľky na odkladanie farbičiek. Ivo vystrihol z každého rohu štvorec so stranou dĺžkou 4 cm. Pozdĺž čiarkovaných čiar vyhol kartón nahor a zlepil bočné steny škatuľky. Emil postupoval podobne, iba v každom rohu vystrihol štvorec so stranou dĺžkou 2 cm. Ivo postupoval takto:



Pri práci sa chlapci chvastali:



Emil: „Moja škatuľka bude dlhšia, širšia a vyššia ako tvoja.“

Ivo: „To nič, do mojej škatuľky sa zmestí viac farbičiek, lebo bude mať väčší objem ako tvoja.“

**Otázka č. 1:** Aké rozmery majú jednotlivé škatuľky?

Odpoveď: Emilova škatuľka má rozmery .....

Ivova škatuľka má rozmery .....

**Otázka č. 2 :** Aké objemy majú škatuľky chlapcov?

Výpočet:

Odpoveď: Emilova škatuľka má objem ....., Ivova škatuľka má objem.....

**Otázka č. 3 :** Ktorý chlapec hovoril pravdu o svojej škatuľke?

Zdôvodnenie:

Ivova sestra Janka potrebuje podobnú škatuľku na uloženie korálikov, ktoré má odložené v prasknutom pollitrovom pohári a bojí sa, že by sa pri práci mohla poraniť alebo rozsypať koráliky.

**Otázka č. 4:** Môžu chlapci z kartónu tých istých rozmerov zhotoviť inú škatuľku s objemom aspoň 0,5 l? Rozmery škatuľky sú celé čísla v cm.

Odpoveď: Áno Nie

Zdôvodnenie:

Emil sa rozhodol svoju škatuľku zvonku oblepiť.

**Otázka č. 5:** Bude mu stačiť na oblepenie škatuľky ozdobný papier tvaru obdĺžnika s rozmermi 40 cm a 10 cm, ak každú stenu chce oblepiť ozdobným papierom vcelku?

Odpoveď: Áno Nie

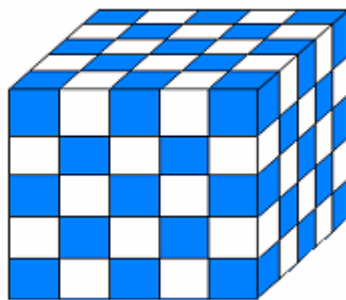
Zdôvodnenie:

## 1.5 Šachovnicová kocka

Kým sa v šiestom ročníku naučíme počítat' objem kocky a kvádra, hráme sa najprv so stavebnicovými kockami. V učebnici vo všetkých telesách sú použité stavebnicové kocky rovnakej farby. Práve táto jednofarebnosť ma nútila premýšľať o vhodnom telese postavenom z kociek dvoch farieb a k návrhu tejto úlohy. Pôvodne som túto úlohu tvorila pre šiesty ročník, ale postupne mi bolo jasné, že to tak nebude. Navrhnutá úloha bola takáto:

### Šachovnicová kocka – 1. verzia

Jakub videl v časopise šachovnicovú kocku postavenú zo stavebnicových kociek bielej a modrej farby tak, že žiadne dve rovnako sfarbené kocky nemali spoločnú stenu, pozri obrázok.



Takúto šachovnicovú kocku zloženú z bielych a modrých stavebnicových kociek chce Jakub vyrobiť z dreva pre svojho malého brata Peťka.

1. Koľko stavebnicových kociek potrebuje Jakub vyrobiť na zhotovenie celej kocky?

Odpoveď: Jakub potrebuje vyrobiť ..... stavebnicových kociek.

2. Koľko kociek musí natrieť Jakub na modro?

Odpoveď: Jakub musí natrieť na modro .....stavebnicových kociek.

Peťko mal zo stavebnicových kociek veľkú radosť a z vďaky Jakubovi postavil šachovnicovú kocku zloženú z rovnakého počtu bielych a modrých stavebnicových kociek.

3. Aké rozmery má šachovnicová kocka, ktorú postavil Peťko?

Odpoveď:

Peťko skúša postaviť kváder, pričom chce použiť všetky biele stavebnicové kocky.

4. Dá sa postaviť zo všetkých bielych stavebnicových kociek kváder?

Áno            Nie

Zdôvodni:

Aby mal Jakub konečne pokoj, požiadal Peťka postaviť zo štyroch modrých stavebnicových kociek rôzne telesá.

5. Koľko rôznych telies je možné postaviť zo štyroch modrých stavebnicových kociek, ak sa kocky musia dotýkať celou stenou?

Po zaslaní na konzultáciu mi bolo pripomienkované:

- upraviť textáciu úlohy,
- zamerať sa na povrch kocky.

Následne som upravila úvodný text a pridala ďalšiu otázku:

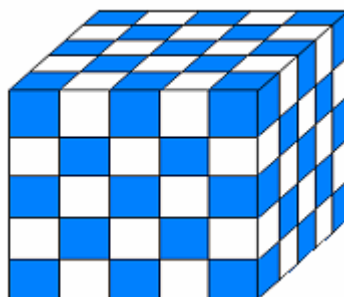
Dá sa zo všetkých kociek postaviť taká kocka, ktorá by mala práve tri steny biele?

Obratom mi bolo navrhnuté pýtať sa na obe možnosti výberu troch bielych stien, z čoho vznikli otázky č. 5 a 6.

Potom sa práca točila okolo najmodrejšej kocky. Pôvodne som opísala, ako najmodrejšiu kocku postaviť a nasledovala otázka týkajúca sa počtu modrých štvorcíkov na najmodrejšej kocke. Naspäť prišla odpoveď s otázkou, či si myslím, že otázka je až taká ťažká, že je nutná pomoc, keď ju takto formulujem. Takto vznikli ďalšie dve nové otázky č. 3 a 4. Pôvodne posledné otázky boli iného typu a z úlohy boli vynechané. Konečná verzia navrhovanej úlohy je takáto:

### ŠACHOVNICOVÁ KOCKA

V jedno popoludnie prišiel Martin za mamou. Práve vyrad'ovala v škôlke staré hračky, s ktorými sa deti už nehrajú. Medzi vyradenými hračkami boli aj staré, rovnaké drevené kocky, ktoré mali zošúchané obrázky na stenách, takže boli už nepoužiteľné. „Mami, tie kocky nevyhadzuj, zoberiem si ich a s kamarátom Jarom ich natrieme celé na bielo alebo celé na modro. Budú ako nové a poslúžia deťom ako tá najlepšia stavebnica. Potrebujem ich práve toľko, aby sa z nich dala postaviť veľká kocka, v ktorej žiadne dve rovnako sfarbené kocky nebudú mať spoločnú stenu“, pozri obrázok.



**Otázka č. 1:** Koľko starých kociek potrebuje Martin vybrať na zhotovenie celej kocky?

Odpoveď: .....

**Otázka č. 2:** Koľko z nich musia chlapi natrieť na modro?

Výpočet:

Odpoveď: .....

Keď boli chlapi s prácou hotoví, vrátili sa do detstva a začali stavať rovnako veľké ale farebne iné kocky ako na obrázku. Martin si želal, aby mu Jaro postavil kocku, ktorá bude najmodrejšia – bude mať na povrchu čo najviac modrých štvorcíkov. „Je to ľahké, lebo viem, ako umiestniť modré kocky“, vraví Jaro.

**Otázka č. 3:** Ako musí Jaro umiestniť modré kocky, aby postavil najmodrejšiu kocku?

Odpoveď: .....

.....

.....

.....

**Otázka č. 4:** Koľko modrých štvorcíkov je na povrchu najmodrejšej kocky?

Výpočet:

Odpoveď: .....

Jaro si želal, aby mu Martin postavil kocku, ktorá bude mať tri steny biele. „Určite to zvládnem, aj keď sú dve možnosti, ako si zvoliť tri biele steny“, vraví Martin.

**Otázka č. 5:** Ktoré dve možnosti mal Martin na mysli?

Prvá možnosť – popis:

Druhá možnosť – popis:

**Otázka č. 6:** Zistíte, či sa dajú postaviť obe tieto kocky

Prvá možnosť:   áno    nie

Zdôvodnenie:

Druhá možnosť:   áno    nie

Zdôvodnenie:

Nakoniec sa chlapci rozhodli, že budú spoločne stavať ľubovoľne veľké kocky.

**Otázka č. 7:** Akú najväčšiu kocku s bielym povrchom môžu chlapci postaviť?

Odpoveď: .....

Zdôvodni, prečo tebou navrhnutá kocka sa dá postaviť a väčšia nedá:

### RIEŠENIE: ŠACHOVNICOVÁ KOCKA

1. 125 kociek, 5.5.5.
2. 63 kociek, napr. po vrstvách 13+12+13+12+13, napr. po stĺpcoch 13.3+12.2.
3. Modré kocky musí umiestniť do 8 vrcholov, lebo prispievajú na povrch až 3 štvorčekami a do 12 hrán, lebo prispievajú na povrch 2 štvorčekami. Ostatné modré kocky umiestnil kdekoľvek na povrch – poskytujú po 1 štvorčeku.
4. 115 modrých štvorčekov,  $8 \cdot 3 + (12 \cdot 3) \cdot 2 + (63 - 8 - 36) \cdot 1$
5. 1. možnosť: všetky 3 biele steny majú spoločný vrchol, 2. možnosť: 2 sú protihlé+d'alšia stena (samozrejme tieto možnosti môžu mať deti aj naopak).
6. Prvá áno, Martin potrebuje 61 bielych kociek:  $5 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 4$  alebo  $5 \cdot 5 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 4$ , druhá nie, lebo by potreboval 65 bielych kociek:  $5 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5$  alebo  $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 3$ .
7.  $4 \times 4 \times 4$ , potrebujeme 56 bielych kociek:  $4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2$  alebo  $4 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2$ . Na kocku  $5 \times 5 \times 5$  by sme potrebovali až 98 bielych kociek:  $5 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2$  alebo  $5 \cdot 5 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 3$ , ale máme iba 62 bielych kociek.

## 1.5.1 Metodická časť

**Veková kategória:** Žiaci 8. ročníka ZŠ

**Tematický celok:** Objem a povrch hranola

**Forma práce:** testom

**Vstupné vedomosti:**

- výpočet objemu a povrchu kocky,
- vedieť správne popísať kocku

**Ciele úlohy:**

- rozvíjať priestorovú predstavivosť žiakov,
- rozvíjať logické a tvorivé myslenie,

- rozvíjať schopnosť riešiť neznámy problém,
- pochopenie textu a správna formulácia myšlienok

**Forma výstupu:** písomná

**Časové rozpätie:** 35 minút.

## 1.5.2 Realizácia a výsledky úlohy

Úlohu som testovala v tomto školskom roku v 8.B triede po 1. tematickom celku: Opakovanie učiva matematiky zo 7. ročníka. Žiakov úloha zaujala, riešili ju samostatne 35 minút. Táto úloha potvrdila problémy žiakov s vyjadrovaním a mnohé svoje tvrdenia doplnili náčrtmi. Úloha dopadla oveľa lepšie ako som očakávala. Možno to bolo ovplyvnené aj riešením úlohy, ktorú sme robili týždeň pred samotným testovaním. Uvádzam zadanie úlohy:

Drevená kocka má hranu s dĺžkou 3 cm. Natrieme ju červenou farbou a potom porežeme na kocky s hranou 1 cm. Určte počet kociek, ktoré majú:

- tri steny červené,
- dve steny červené,
- jednu stenu červenú.

Jednotlivé otázky žiaci riešili takto:

1. otázka: všetci žiaci ju vyriešili správne.
2. otázka: 5 žiakov túto úlohu riešilo nesprávne,  
4 žiaci odpovedali – polovicu zo všetkých kociek natrú na modro,  
1 žiak odpovedal 78 kociek (13.6),  
ostatní žiaci úlohu riešili správne.
3. otázka: 17 žiakov uviedlo správne riešenie, napríklad:  
Modré kocky musia tvoriť hrany a ostatné musíme vidieť na stenách.  
9 žiakov uviedlo neúplné riešenie, napríklad:  
Modré kocky rozmiestnime na povrchu kocky a biele vnútri kocky.  
2 žiaci uviedli nesprávnu odpoveď.
4. otázka: 12 žiakov uviedlo správnu odpoveď – 115 modrých štvorčekov.  
13 žiakov uviedlo iný počet: 63 (lebo je 63 modrých kociek), 78 (13.6).  
3 žiaci úlohu neriešili.



5. otázka: 11 žiakov riešilo úlohu správne,  
6 žiakov opísalo tú istú možnosť dvakrát,  
2 žiaci odpovedali nesprávne,  
9 žiakov úlohu neriešilo.
6. otázka: 9 žiakov riešilo úlohu správne so zdôvodnením (buď určili presný počet kociek alebo odpovedali majú málo kociek, majú dostatok kociek).  
9 žiakov správne vybralo odpoveď ale neuviedlo zdôvodnenie.  
10 žiakov úlohu neriešilo.
7. otázka: 4 žiaci riešili úlohu správne so zdôvodnením.  
9 žiakov napísalo iba rozmery kocky bez zdôvodnenia.  
15 žiakov úlohu neriešilo.

**Neštandardnosť úlohy:** Žiaci sa s otázkou č. 1 stretávajú bežne, s otázkou č. 2 sa stretli zriedkavo, s otázkami č. 3, 4, 5, 6, 7 sa ešte nestretli.

**Obťažnosť úlohy:** Na základe výsledkov, ktoré dosiahli žiaci pri riešení jednotlivých otázok sú otázky číslo 1, 2 ľahké, otázky č. 3, 6, 7 sú ťažké, otázky č. 4, 5 sú dosť ťažké.

## 2. Hodnotenie úloh kódovaním

Úlohy, ktoré boli uvedené v 1. kapitole pozostávajú z otázok, ktoré sú navzájom nezávislé a dajú sa samostatne hodnotiť, pričom vzrastá ich náročnosť. Niektoré odpovede žiakov nemôžu byť hodnotené automaticky, najmä tie, pri ktorých sa vyžaduje voľná tvorba odpovede. Tieto otázky spôsobujú ťažkosti pri rozhodnutí, či sú žiakove riešenia správne alebo nesprávne, no môžu podávať oveľa komplexnejší obraz o úrovni žiakových vedomostí a zručností, stupeň rozvoja jeho schopností. Okrem toho učiteľovi poskytujú spätnú informáciu o kvalite jeho pôsobenia a správnosti jeho postupov.

V ďalšej časti uvádzam roztriebenie rôznych možných žiackych odpovedí niektorých otázok do určitých celkov.

### 2.1 Šachovnicová kocka

**Otázka č. 3:** Ako musí Jaro umiestniť modré kocky, aby postavil najmodrejšiu kocku?

**Komentár:** Táto úloha rozvíja čítanie s porozumením, kultiváciu matematického myslenia žiaka, jeho abstraktné myslenie, priestorovú predstavivosť, schopnosť popísať to, čo vie urobiť rukami a „objaviť“, že nie každá modrá kocka prispieva rovnako na povrch veľkej kocky. Cieľom tejto úlohy je popísať všetky riešenia.

#### Úplné riešenie:

Modré kocky musí umiestniť do

- 8 vrcholov, lebo na povrch prispievajú až 3 štvorčekmi,
- 12 hrán, lebo na povrch prispievajú 2 štvorčekmi,
- ostatné modré kocky umiestnil kdekoľvek na povrch, lebo poskytujú po 1 štvorčeku.

Očakáva sa, že žiaci popíšu:

1. všetky správne riešenia,

2. neúplne všetky správne riešenia,
3. jedno alebo niekoľko správnych riešení,
4. niekoľko riešení, medzi ktorými sú správne aj nesprávne riešenia,
5. nesprávne riešenia,
6. žiadne riešenie.

Podľa uvedeného cieľa za správne sa považujú odpovede, ktoré vystihujú túto podstatu.

Napríklad:

- 1) Všetky správne riešenia popísané nasledujúcimi autentickými žiackymi vyjadreniami:
  - 44 kociek bude na všetkých hranách a 19 kociek na stenách.
  - Najprv musí modré kocky umiestniť do „rohov“, potom na hrany a zvyšné kocky na steny.
  - Modré kocky rozmiestni na hrany a všetky ostatné použije na steny.
  - Po okraji každého štvorca budú modré kocky a ešte aj vnútri niektorých štvorcov.
  - Musí ich umiestniť tak, aby tvorili hrany kocky a ostatné tak, aby ich bolo zvonku vidno.
- 2) Neúplné všetky správne riešenia popísané nasledujúcimi autentickými vyjadreniami žiakov (nie je jasné, či žiaci nepovažovali za samozrejmé, že ostatné modré kocky sú na povrchu):
  - Musí modré kocky umiestniť do „rohov“ a na hrany.
  - Modré kocky musí umiestniť na všetky hrany, pretože tým vytvorí najviac modrých štvorčekov.
  - Modré kocky musí umiestniť na hrany.
  - Musí ich umiestniť na hrany kocky a na celú hornú stenu (aj keď na ostatné modré kocky zabudol).

Za čiastočne správne sa považujú odpovede, napríklad:

- 3) Jedno alebo niekoľko správnych riešení popísané nasledujúcimi autentickými vyjadreniami žiakov:

- Modré kocky najprv dá na hrany, ostatné použije na dve steny, ktoré budú celé modré a jednu zvyšnú modrú kocku dá na niektorú stenu tak, aby bolo vidno jej jednu stenu.
  - Obvod všetkých stien bude tvoriť 44 kociek, zvyšnými modrými kockami zaplní 2 steny a 1 kocku dá na hociktorú inú stenu.
- 4) Niekoľko riešení, medzi ktorými je aj správne aj nesprávne riešenie, popísané nasledujúcimi autentickými vyjadreniami žiakov:
- Modré kocky dá na povrch kocky a biele do vnútra.
  - Všetky modré kocky musí dať na vonkajšie steny kocky.
  - Dookola musia byť modré kocky a v strede biele.
  - Musí ich umiestniť tak, aby bolo vidno viac modrých štvorčekov ako je modrých kociek.

Za nesprávne sa považujú odpovede, napríklad:

- 5) Nesprávne riešenie popísané nasledujúcimi žiackymi vyjadreniami:
- Jedna stena kocky má 25 štvorčekov, modrých kociek je 63. Po 25 modrých kociek dáme na dve celé steny a zvyšných 13 dáme na tretiu stenu, ktorá nebude celá modrá.
  - Vymení biele kocky s modrými.

Odpoveď chýba.

Prehľad počtu odpovedí žiakov podľa uvedeného popisu je v tabuľke:

Popis č.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Počet žiakov	4	10	3	9	2	0

**Otázka č. 5 :** Ktoré dve možnosti mal Martin na mysli?

**Komentár:** Úloha rozvíja priestorovú predstavivosť a abstraktné myslenie žiakov, čítanie s porozumením a matematické vyjadrovanie. Žiaci v úlohe popisujú vrchol ako

roh, dve bočné steny, prednú a zadnú stenu popisujú ako bočné steny. Často boli tvrdenia žiakov doplnené náčrtmi. Cieľom tejto úlohy je nájsť dve nezhodné možnosti pre výber troch bielych stien (žiak nemusí nájsť všetky polohy).

### Úplné riešenie:

- 1. možnosť: Všetky 3 biele steny majú spoločný vrchol.
- 2. možnosť: 2 biele steny sú protiľahlé + ďalšia stena (nezáleží na poradí).

Žiak môže popísať:

- 1) iba jednu možnosť,
- 2) obe možnosti.

Popis jednej možnosti roztriedime do 4 skupín:

- a) žiak správne popíše všetky polohy,
- b) žiak správne popíše len jednu polohu,
- c) nesprávny popis,
- d) žiak neriešil úlohu.

1a) Správne popísané všetky polohy(pre 1. alebo 2. možnosť) nasledujúcimi autentickými žiackymi vyjadreniami:

- Všetky tri steny majú spoločný vrchol v jednom rohu.
- Každá protiľahlá stena bude inej farby.
- Biele steny budú tvoriť akoby klenbu.
- Všetky tri biele steny budú susediace.
- Dve biele steny oproti a ďalšia stena.

1b) Správne popísaná len jedna poloha(pre 1. alebo 2. možnosť) nasledujúcimi autentickými žiackymi vyjadreniami:

- Vrchná a dve bočné vedľa seba.
- Vrchná, predná a bočná.
- Vrchná, spodná a pravá bočná stena sú biele.
- Zadná, ľavá bočná a vrchná.
- Dolná, zadná a horná stena sú biele.
- Biele sú steny: horná, spodná a bočná.

1c) Nesprávny popis:

- Tri steny biele, tri steny modré.

Popis dvoch možností roztriedime do 4 skupín:

- a) žiak správne popíše obe možnosti pre všetky polohy,
- b) žiak správne popíše obe možnosti pre jednu polohu,
- c) žiak síce popíše dve možnosti, ale predstavujú tú istú možnosť,
- d) nesprávny popis.

2a) Správne popísané všetky polohy nasledujúcimi autentickými žiackymi vyjadreniami:

- Všetky tri steny sa stretávajú v jednom rohu.
- Dve steny sú protiľahlé a tretia inde.
- Všetky tri steny budú mať spoločný vrchol.
- Dve steny sú protiľahlé a jedna ich spája.
- Tri susediace steny so spoločným vrcholom.
- Dve susediace steny a jedna ležiaca oproti niektorej z nich.
- Tri steny budú vedľa seba, pričom prvá je oproti tretej.
- Tri steny vedľa seba, pričom majú spoločný roh.

2b) Správne popísaná jedna poloha nasledujúcimi autentickými žiackymi vyjadreniami:

- Dolná, zadná a horná stena sú biele.
- Predná a dve bočné steny sú biele.
- Biele sú tie tri steny ako na pôvodnom obrázku.
- Predná, zadná a vrchná stena sú biele.

2c) Popis možnosti, ktoré predstavujú to isté, vyjadrené autentickými žiackymi vyjadreniami:

- Tie steny, ktoré vidno na obrázku, sú teraz biele.
- Tie steny, ktoré nevidno na obrázku.

- Dve bočné a stena vpredu sú biele.
- Dve bočné steny a zadná stena sú biele.
  
- Predná, zadná a bočná stena sú biele.
- Dolná, horná a bočná.
  
- Dve sú protíahlé a spája ich jedna stena zhora.
- Dve biele steny sú protíahlé a spája ich dolná stena.

2d) Nesprávny popis:

- 3 steny modré a 3 steny biele.
- 3 steny biele a 3 steny modré.
  
- 3 steny biele, 3 steny modré.
- 3 steny biele, 3 steny pomiešané s modrými.

Podľa cieľa úlohy by som považovala za správne odpovede: 2a), 2b), za čiastočne správne odpovede: 1a), 1b), 2c) a za nesprávne odpovede: 1c), 1d), 2d).

Keď som išla testovať túto úlohu, myslela som si, že štvorkári skončia prvou alebo druhou otázkou. Som rada, že som sa mýlila. Žiaci sa s úlohou trochu pohrali a niečo im aj napadlo. A mnohokrát nápad je veľmi dôležitý. Myslím si, že táto úloha je vhodná pre skupinovú prácu a na diskusiu v triede.

Prehľad počtu odpovedí žiakov podľa uvedeného triedenia je v tabuľke:

Popis č.	1a,1b,1c	1d	2a	2b	2c	2d
Počet žiakov	0	9	11	2	4	2

## 2.2 Záujmové krúžky

**Otázka č. 6:** V ktorej zo skupín dievčat alebo chlapcov je väčšia časť detí zapojená do krúžkovej činnosti v škole? Svoju odpoveď zdôvodnite.

**Komentár:** Úloha rozvíja schopnosť riešiť neznámy problém a umožňuje žiakom voľbu vhodných matematických postupov. Cieľom úlohy je rozhodnúť a zdôvodniť v rámci skupín, v ktorej je viac detí zapojených do krúžkovej činnosti v škole.

### Úplné riešenie:

Do krúžkovej činnosti je zapojených viac dievčat, so zdôvodnením.

1. riešenie(cez časť celku pomocou zlomkov):

Z 12dievčat do krúžku chodí 8, čo je dievčat  $\frac{8}{12}$ .

Z 18 chlapcov do krúžku chodí 10, čo je  $\frac{10}{18}$  chlapcov.

Možnosti porovnania:

a) úpravou zlomkov na desatinné čísla ( $\frac{8}{12}=0,66\dots$ ,  $\frac{10}{12}=0,55\dots$ )

b) úpravou zlomkov na spoločného menovateľa ( $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ ,  $\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$ )

c) úpravou zlomkov na spoločného čitateľa ( $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ ,  $\frac{10}{18}$ )

d) šípkovým pravidlom ( $8 \cdot 18 > 10 \cdot 12$ )

Porovnaním týchto hodnôt dostávame  $\frac{8}{12} > \frac{10}{18}$ .

2. riešenie(cez časť celku pomocou percent):

Z 18 chlapcov do krúžku chodí 10: 100 %.....18

1 %.....0,18

10:0,18 = 55,55 ..%, po zaokrúhlení na 1 desatinné miesto 55,6 % chlapcov

Z 12 dievčat do krúžku chodí 8: 100 %.....12

1 %.....0,12

8:0,12 = 66,66.. %, po zaokrúhlení na 1 desatinné miesto 66,7 % dievčat

Porovnanie hodnôt: 66,7 % > 55,6 %.



3. riešenie:

Z 18 chlapcov nechodí do krúžku 8, čo je  $\frac{8}{18}$  chlapcov.

Z 12 dievčat nechodí do krúžku 4, čo je  $\frac{4}{12}$  dievčat.

Porovnaním hodnôt dostávame:  $\frac{8}{18} > \frac{4}{12}$ .

Do krúžku nechodí viac chlapcov, čiže musí do krúžku chodiť viac dievčat.

4. riešenie:

Z 18 chlapcov krúžok navštevuje 10 a nenavštevuje 8 chlapcov.

Z 12 dievčat krúžok navštevuje 8 a nenavštevujú 4 dievčatá.

Keďže iba 4 dievčatá nenavštevujú krúžky (tretina) a chlapci až 8 (skoro polovica), preto väčšia časť detí je zapojená do krúžkovej činnosti zo skupiny dievčat.

Za správne riešenie sa považuje aj odpoveď, ak žiak v 1. otázke nesprávne určil počet chlapcov alebo počet detí zapojených do krúžkovej činnosti, ale jeho ďalšie výpočty sú správne.

Činnosti potrebné k výpočtu:

1. Uvedenie si vstupných čísiel z 1. otázky
2. Podiel zapojených (nezapojených) dievčat v krúžku
3. Podiel zapojených (nezapojených) chlapcov v krúžku
4. Porovnanie
5. Odpoveď

Možnosti triedenia odpovedí v jednotlivých činnostiach:

Pre 1. činnosť: a) správne určenie jednotlivých hodnôt,  
b) nesprávne určenie jednotlivých hodnôt.

Pre 2. a 3. činnosť: a) správne riešenie,  
b) správne riešenie s numerickou chybou,

c) nesprávne riešenie.

Pre 4.činnosť: a) správne porovnanie,

b) nesprávne porovnanie.

1. Ukážka správneho autentického žiackeho riešenia:

a) Chlapcov spolu je 18, chlapcov v krúžku je 10.

10 z 18 je 55,5 %

Dievčat spolu je 12, dievčat v krúžku je 8.

8 z 12 je 66,6 %

Do krúžkovej činnosti je zapojených viac dievčat z jednotlivých skupín.

b) Z 18 chlapcov nechodí 8 do krúžkov, čo je  $\frac{4}{9}$ .

Z 12 dievčat nechodia len 4 do krúžkov, čo je  $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ .

Viac dievčat je zapojených do krúžkov.

2. Ukážka správneho autentického žiackeho riešenia s nesprávne určenými hodnotami:

a) Dievčatá: spolu.....12, v krúžku.....8

100 %.....12

1 %.....0,12

$8:0,12 = 66,6.. = 67\%$

Chlapci: spolu..... 20, v krúžku.....12

100 %.....20

1 %.....0,2

$12:0,2 = 60\%$

Do krúžkovej činnosti chodí 67 % dievčat a 60 % chlapcov. Do krúžkovej

činnosti je viac zapojená skupina dievčat.

b) V triede je 18 chlapcov a 12 chodí do krúžkov.

100 % je 18

1 % je 0,18

$12:0,18 = 66,66\%$

V triede je 12 dievčat a 8 chodí do krúžkov.

100 % je 12

1 % je 0,12

$$8:0,12 = 66,66 \%$$

Chlapcov aj dievčat chodí rovnako.

3. Ukážka nesprávneho autentického žiackeho riešenia so správne určenými hodnotami:

a) Chlapcov je 18, krúžok navštevuje 10.

Dievčat je 12, krúžok navštevuje 8.

Všetkých žiakov je 30.

100 % je 30, 1 % je 0,3,  $10:0,3 = 33,3.. = 34 \%$  chlapcov

$$8:0,3 = 26,6.. = 27 \%$$
 dievčat

Väčšia časť chlapcov je zapojená do krúžkovej činnosti v škole.

b) Z 18 chlapcov do krúžku chodí 10.

Z 12 dievčat do krúžku chodí 8.

$10 > 8$ , do krúžku chodí viac detí zo skupiny chlapcov.

5. Ukážka nesprávnych autentických žiackych riešení:

Do krúžkovej činnosti je zapojených viac chlapcov, lebo:

- najviac chlapcov zapojených do krúžku je 5 a najviac dievčat zapojených do krúžku je 4 ,
- lebo v škole je viac chlapčenských krúžkov,

### 2.3 Hudobné nástroje

**Otázka č. 5 :** Koľko chlapcov v triede hrá na dva hudobné nástroje?

Komentár: Úloha rozvíja schopnosti porozumieť grafickým údajom a správne pracovať s hodnotami z grafu. Táto úloha vyprovokovala žiakov k zamysleniu sa nad otázkou, napriek tomu, že otázku č. 2 robili automaticky, bez uvažovania o správnosti výpočtu. Cieľom úlohy je výpočtom určiť počet chlapcov, ktorí hrajú na dva hudobné nástroje.

**Úplné riešenie:**

2 chlapci s výpočtom:

1. riešenie:

Gitara 4, husle 2, nehrajúci chlapci 8. Spolu 14. Počet chlapcov 12

$$14 - 12 = 2.$$

2. riešenie:

Počet chlapcov 12, nehrajúci chlapci 8. Na hudobný nástroj hrajú:  $12 - 8 = 4$  chlapci. Na gitaru hrajú 4 chlapci, na husle 2, spolu 6. Na dva nástroje hrajú  $6 - 4 = 2$  chlapci.

Očakávané odpovede môžeme roztriediť do týchto skupín:

1. Žiak uviedol úplné riešenie.
2. Žiak uviedol riešenie s neúplným výpočtom(zdôvodnením).
3. Žiak uviedol správnu odpoveď bez výpočtu.
4. Žiak uviedol nesprávne riešenie.
5. Žiak úlohu nerieši.l

1. Ukážka autentických žiackych úplných riešení:

- a) Počet chlapcov 12, na hudobný nástroj nehrá 8 chlapcov, t. z.,  $12 - 8 = 4$  chlapci hrajú na hudobný nástroj. Keďže 4 hrajú na gitaru a 2 na husle, potom dvaja z nich musia hrať na dva hudobné nástroje: gitaru aj husle.
- b) Chlapcov je 12, hrajúcich a nehrajúcich chlapcov je  $6 + 8 = 14$ ,  $14 - 12 = 2$ . Dvaja chlapci hrajú na 2 hudobné nástroje.
- c) V triede je 12 chlapcov, 8 chlapcov nehrá na hudobný nástroj,  $4 + 2 = 6$  chlapcov hrá.  $12 - 8 = 4$ ,  $6 - 4 = 2$ . Na 2 hudobné nástroje hrajú 2 chlapci.

2. Ukážka autentických žiackych riešení s neúplným výpočtom:

- a)  $14 - 12 = 2$ , 2 chlapci.
- b) 4 chlapci hrajú na hudobný nástroj,  $6 - 4 = 2$ .
- c)  $8 + 6 = 14$ ,  $14 - 12 = 2$ , 2 chlapci na dva nástroje.

- d)  $12 - 8 = 4, 4 - 2 = 2.$   
e)  $(8 + 4 + 2) - 12 = 14 - 12 = 2,$  dvaja chlapci.

3. Ukážka autentických žiackych nesprávnych riešení:

- a)  $4 + 2 = 6,$  6 chlapci hrajú na 2 hudobné nástroje.  
b)  $12:2 = 6,$  6 chlapci hrajú na 2 hudobné nástroje.

Podľa cieľa úlohy by som považovala za správne odpovede 1., 2., za nesprávne odpovede 4. a 5. a za čiastočne správnu odpoveď 3.

Prehľad počtu odpovedí žiakov podľa uvedených skupín je v tabuľke:

Skupina č.	1.	2.	3.	4.	5.
Počet žiakov	6	8	6	6	4

## Záver

Pri uspokojovaní svojej túžby po poznaní, pri riešení rôznych problémov, ale i pri učení dochádza k interakcii medzi ľuďmi. Často je týmto človekom učiteľ, ktorý by si mal osvojiť schopnosť zaujať žiakov učivom, viesť ich k samostatnému odhaľovaniu poznatkov a ukázať im význam osvojených vedomostí a zručností.

V škole sa stretávame väčšinou s tradičným prístupom k učeniu. Záleží na učiteľovi, aby hľadal spôsoby vedúce k rozvoju hodnotiaceho a tvorivého myslenia, robil vyučovací proces pre žiakov príjemnejší a zaujímavejší.

Jedným z predpokladov, že učenie žiaka bude zaujímať je pretvárať obsah učiva tak, aby bol pre žiakov zmysluplný, aby učivo spájalo s reálnym životom a ukázalo žiakom ako ho môžu v budúcnosti využiť.

Realizácia navrhovaných úloh a sady dodaných úloh umožnila žiakom vyskúšať si riešiť iné typy príkladov, v ktorých sa vyskytli javy reálneho života a rôznych životných situácií. Skúsenosti z týchto hodín ukazujú, že zaradenie týchto úloh je vhodné a niekedy i dôležitejšie a užitočnejšie ako vypočítať niekoľko typových príkladov na precvičenie učiva.

## **Použitá literatúra:**

- [1] Bálint, L.: Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami. Ministerstvo školstva Slovenskej republiky, 2002.
- [2] Úlohy 2003 Matematika. Štátny pedagogický ústav, Bratislava 2004.
- [3] Cornwellová, P.: Riziko. Ikar, Bratislava 2007.
- [4] Šedivý, O. a kol.: Matematika pre 6. ročník ZŠ. 1. časť. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1998.

## **Prílohy**

Ukážky žiackych riešení navrhovaných úloh