**Zbyněk Kubáček, Pavol Černek, Ján Žabka a kol.**

# MATEMATIKA A SVET OKOLO NÁS

ZBIERKA ÚLOH

Európsky sociálny fond

Táto zbierka úloh vznikla v rámci projektu
SOP ĽZ 2005/1-115 Tvorba a použitie
matematických úloh podporujúcich rozvoj
kľúčových kompetencií a matematickej gramotnosti
pre reálny život, ktorý bol realizovaný na
Fakulte matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave a bol
spolufinancovaný Európskou úniou.

Európsky sociálny fond bol zriadený Rímskou zmluvou o založení Európskeho hospodárskeho spoločenstva s cieľom zlepšiť pracovné príležitosti na vnútornom trhu a tým prispieť k zvýšeniu životnej úrovne.

Úlohou Európskeho sociálneho fondu je rozširovanie možností zamestnania, zvyšovanie geografickej a profesijnej mobility pracovníkov v Spoločenstve a uľahčovanie ich adaptácie na priemyselné zmeny a zmeny vo výrobných systémoch najmä odborným vzdelávaním a rekvalifikáciou.

Európsky sociálny fond pomáha rozvíjať zamestnanosť podporovaním zamestnateľnosti, obchodného ducha, rovnakých príležitostí a investovaním do ľudských zdrojov.

**Matematika a svet okolo nás,** zbierka úloh
**Autori** © : doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc.
RNDr. Pavol Černek, CSc.
PaedDr. Ján Žabka
PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., Mgr. Štefan Gyürki,
RNDr. Michal Demetrian, PhD., RNDr. Anna Černeková,
Mgr. Jozef Bašo, Mgr. Katarína Benková, RNDr. Martina Compľová,
Mgr. Jarmila Dovcová, RNDr. Anna Hrebíková, Mgr. Alžbeta Kozelková,
RNDr. Katarína Melišová, PaedDr. Ľubomír Naštický, Mgr. Alena Pásztorová,
Mgr. Mária Pavlisová, PaedDr. Katarína Petergáčová,
Mgr. Ing. Iveta Šatanková, Mgr. Katarína Výpalová
**Recenzentka**: PaedDr. Mária Boledovičová
**Jazyková úprava**: PhDr. Ivona Havelková
**Design** © : Mgr. Eva Jamrichová

**ISBN 978-80-969950-1-1**

**Predhovor, v ktorom sa pokúsime čitateľa presvedčiť, že má zmysel čítať ďalej**

*Depresívne úvahy – Treba nám vôbec matematiku? – Čo dokázala PISA? – Chcelo by to nový typ úloh – Prináša ich táto knižka? – Ako asi zareaguje učiteľ? – Dojemná historka o odhodenej zbierke – Odporúčania pre prvé použitie – Ako si zadania úloh prispôsobiť podľa svojich potrieb – Optimistický záver*

Nalejme si čistého vína: matematika nie je obľúbený predmet. Rečičky o jej využiteľnosti v živote prijíma nemalá časť žiakov so zle zakrývanými pochybnosťami. Do istej miery sa im nemožno čudovať. Riešenie úloh „Zistite Jankovu hmotnosť, ak viete, že Janko a Marienka vážia spolu 157 kg a Janko je o 13 kg ťažší“ k presvedčeniu o potrebe matematiky neprispieva. Otázka „Na čo nám to bude dobré?“ je preto nočnou morou tých učiteľov matematiky, ktorí majú svoj predmet radi.

Napriek tomu matematiku potrebujeme. Na úplne praktické činnosti (počítanie s percentami, čítanie grafov, máp a diagramov, hľadanie v tabuľkách), ale nielen na ne. Bez matematiky nepochopíme mnohé veci okolo nás. Prežijeme síce aj bez ich pochopenia, no predsa len lepšie je veciam rozumieť.

Ako sú na tom s používaním matematiky slovenskí žiaci, preverilo v roku 2003 medzinárodné testovanie PISA (Programme for International Student Assessment). Neskončili sme síce na chvoste, ale sláva to tiež nebola: výsledky poukázali na slabiny vo viacerých oblastiach. Jednou z viacerých príčin bolo aj to, že žiaci sa s takým typom úloh, aké sa používajú v testovaní PISA, predtým ešte nikdy nestretli. Máme na mysli najmä úlohy zasadené do reálneho kontextu – kontextové úlohy.

Myslíme si, že to treba napraviť a úlohy podobného typu na našich školách začať používať. Nie preto, aby sme boli v nasledujúcom testovaní úspešnejší (hoci ani to by nebolo zlé), ale najmä preto, že takéto úlohy by pomohli odstrániť časť problémov, o ktorých sme hovorili v – mierne depresívnom – prvom odseku.

Zbierka, ktorú držíte v rukách, by k tomu mohla prispieť. Je výsledkom projektu podporeného Európskym sociálnym fondom. V jeho rámci sa skupina učiteľov matematiky pod vedením lektorov učila používať a tvoriť kontextové úlohy z matematiky. Viaceré úlohy z tejto zbierky si učitelia odskúšali v svojich triedach. Ak môžeme veriť ich hodnoteniam (výber z nich si môžete prečítať na zadnej strane obálky), boli s nimi spokojní.

Vaše názory sa v tomto okamihu asi pohybujú medzi dvomi extrémnymi polohami:

- „To je zase nejaká ďalšia blbosť,“ poviete si a zbierku zmetiete jedným pohybom zo stola.
- „Skvelé,“ skríknete a hneď aj so zbierkou vyrazíte do triedy (hoci je práve sobota popoludní).

Za úplne správnu nepokladáme ani jednu z týchto krajných polôh. V kútiku duše sa nádejame, že v prípade zmietačov zo stola sa zopakuje príbeh legendy o Giuseppe Verdim. Ten, keď mu priniesli libreto novej opery Nabuchodonosor, vraj knižku otrávene odhodil, pretože o kompozíciu ďalšej opery už nemal záujem. Libreto sa pri dopade roztvorilo na strane, kde boli slová neskôr svetoznámeho zboru Židov. Verdi si ich prečítal a bol natoľko dojatý, že sa rozhodol libreto predsa len zhudobniť.

Veríme teda, že tí, čo zbierku zmietli zo stola, teraz s dojatím čítajú stranu, na ktorej sa odhodená knižka otvorila. Kým dočítajú, máme čas vysvetliť, čo nie je správne na druhej z uvedených reakcií („hor sa so zbierkou na vyučovanie, hneď a zaraz").

Učitelia, ktorí spolupracovali na uvedenom projekte, potvrdili, že na prácu s takýmto typom úloh treba seba aj žiakov pripraviť. V ďalších odsekoch sa preto pozrieme na vec podrobnejšie.

Zbierka sa skladá z jednotlivých tém (napr. Obecné voľby alebo Glykémia), ktoré sa skladajú z viacerých úloh (časť tém je na priloženom CD). Druhú časť tvoria riešenia a metodické poznámky. Všetky úlohy sú napísané v testovom formáte. Možno ich však používať viacerými spôsobmi, nielen vo forme testu (použitie vo forme testu predpokladáme až v neskoršej fáze práce s takýmito úlohami – po tom, čo si na ne žiaci zvyknú). Podľa skúseností spolupracujúcich učiteľov sa osvedčilo spočiatku riešiť takéto úlohy v triede spoločne, prípadne kombinovať samostatnú prácu žiakov s diskusiou. Teda napríklad: Nechať žiakov prečítať si úvodný text a chvíľu stráviť „úvodom do problematiky", ktorej sa téma venuje. Potom nechať žiakov samostatne vyriešiť prvú úlohu. Po krátkej diskusii o jednotlivých riešeniach prvej úlohy pokračovať druhou úlohou, atď.

Uvedený postup je len jedna z mnohých možností. Výber vhodnej formy najlepšie určí učiteľ sám na základe skúseností s triedou, v ktorej chce úlohy použiť. Diskusiu o jednotlivých riešeniach (po vyriešení jednotlivých úloh alebo na záver celej témy) pritom pokladáme za veľmi dôležitú. Umožní žiakom argumentovať a posudzovať argumentáciu iných.

Každopádne treba rátať s tým, že úlohy zaberú spravidla viac času, než na prvý pohľad predpokladáte. Istý čas zaberie „úvod do problematiky", o ktorom sme hovorili v predchádzajúcom odseku. Tento čas nepokladáme v žiadnom prípade za stratený. Jednak sa diskutujúci môžu dozvedieť niečo nové (to je „pridaná hodnota" takýchto kontextových úloh), jednak pochopenie kontextu je dôležitý predpoklad správneho riešenia. Hoci matematika obsiahnutá vo väčšine úloh nie je náročná, bolo by naivné očakávať, že to znamená aj ľahké a nenáročné vyučovanie. Veríme však, že môže byť pre žiakov zaujímavejšie.

Nie je potrebné z každej témy vyriešiť všetky úlohy v nej obsiahnuté. Výber je na učiteľovi. Súbory úloh uložené na CD je možné prispôsobiť Vášmu výberu: môžete z nich napr. niektoré úlohy odstrániť alebo zmeniť veľkosť miesta na odpoveď (v tlačenej verzii sme kvôli úspore miesto na odpoveď a výpočty žiakov redukovali). Ak Vám vyhovuje podoba úlohy v tlačenej verzii, môžete ju kopírovať priamo z nej.

Veríme, že Vám táto zbierka úloh pomôže vo Vašej práci rovnako, ako pomohla učiteľom, ktorí sa podieľali na jej vzniku a overovaní.

*Bratislava, júl 2008.* *Zbyněk Kubáček*

## Orientačné zaradenie úloh do tematických celkov

| názov alebo téma úlohy | Planimetria | | | | | | | Stereometria | | | Aritmetika | | | | | | | | € | Algebra a funkcie | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Uhol | Trojuholník, Pytagorova veta | Mnohouholník, obvod a obsah mnohouholníka | Podobnosť a mierka, goniometria | Zhodnosť, stredová a osová súmernosť | Kruh, kružnica, obvod a obsah oblých útvarov | Konštrukcie | Povrch a objem telies | Mnohosten, sieť, znázornenie mnohostena | Priestorová predstavivosť | Deliteľnosť, delenie so zvyškom | Celé čísla a operácie s nimi | Približné čísla, zaokrúhľovanie | Zlomky, percentá | Mocniny a odmocniny | Pomer, úmera | Priama a nepriama úmernosť | Funkcie, lineárna funkcie | Euro úlohy | Výraz a jeho úprava | Rovnice a nerovnice | Logika, čítanie s porozumením | Kombinatorika | Pravdepodobnosť | Aritmetický priemer | Diagramy, tabuľky a grafy |
| Akcia | | | | | | | | | | | | • | | • | | | | | | | | • | | | | |
| Beh na Empire State Building | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | • |
| Bežné a špeciálne hracie kocky | | | | | | | | | • | • | | | | • | | | | | | | | | • | • | | |
| Búdka | | | | • | | | • | • | • | • | | | | | | • | | | | | | | | | | |
| Cesta | | • | | | | | | | | | | | • | | • | | | • | | • | | | | | | • |
| Cyklomaratón | | | | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | • | | | | • |
| Časové pásma | | | | | | | | | | | | • | | | | | | | | | | • | | | | |
| Červené krvinky | | | | | | | | • | | | | | | | | | | | | | | • | | | | |
| Daň z pridanej hodnoty CD | | | | | | | | | | | | | | • | | | | | | • | | | | | | |
| Dedičské konanie | | | | | | | | | | | | • | | • | | | | | • | | | • | | | | • |
| Dekoračné kocky CD | | | | | | | | • | • | • | | | | | | • | | | • | | | | | | | • |
| Dlaždice | | | • | | | | | | | | • | | • | • | | | | | | | | | | | | |
| Dopravné nehody | | | | | | | | | | | | • | | • | | | | | | | | • | | | | • |
| Energia vetra | | | | | | | | | | | | | • | • | • | | | | | • | • | | | | | |
| Firma KOCKA | | | | | | | | | • | • | | | | | | | | | | | | | • | | | |
| Futbalové ihrisko | | • | • | • | | • | • | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | |
| Glykémia CD | | | | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | • | | | | • |
| Gotický trojlístok CD | | • | | | | • | • | | | | | | | | • | | | | | • | • | • | | | | |
| Hokejový štadión | | | • | | | • | | • | | | | | • | | | | | | | | | • | | | | |
| Holubica Winkie | | | | • | | • | • | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | |

CD téma je na priloženom CD

# Orientačné zaradenie úloh do tematických celkov

| | Uhol | Trojuholník, Pytagorova veta | Mnohouholník, obvod a obsah mnohouholníka | Podobnosť a mierka, goniometria | Zhodnosť, stredová a osová súmernosť | Kruh, kružnica, obvod a obsah oblých útvarov | Konštrukcie | Povrch a objem telies | Mnohosten, sieť, znázornenie mnohostena | Priestorová predstavivosť | Deliteľnosť, delenie so zvyškom | Celé čísla a operácie s nimi | Približné čísla, zaokrúhľovanie | Zlomky, percentá | Mocniny a odmocniny | Pomer, úmera | Priama a nepriama úmernosť | Funkcie, lineárna funkcie | Euro úlohy | Výraz a jeho úprava | Rovnice a nerovnice | Logika, čítanie s porozumením | Kombinatorika | Pravdepodobnosť | Aritmetický priemer | Diagramy, tabuľky a grafy |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hráme sa NIM CD | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ● | | | | |
| Hudobné nástroje | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ● | ● | | | ● |
| Hustota obyvateľstva | | | | | | | | | | | | | ● | ● | | ● | | | | ● | | | | | ● | ● |
| Chrípkové prázdniny | | | | | | | | | | | | ● | | ● | | | | | | | | | | | | ● |
| Ideálna hmotnosť dospelých CD | | | | | | | | | | | | | | ● | ● | | | ● | | ● | | ● | | | | ● |
| Jakubove výrobky CD | | | ● | | | | | ● | ● | ● | | | | | | | | | | | | ● | | | | |
| Kalendár | | | | | | | | | | | ● | ● | | | | | | | | | | ● | | | | ● |
| Karáty | | | | | | | | | | | | | ● | ● | | | ● | | | | | ● | | | | |
| Koľko nás bude? | | | | | | | | | | | | ● | | | | | | | | | | | | | | ● |
| Kontrola v Pivárskom raji | | | | | | | | | | | | | | ● | | | | | ● | | | | | | ● | |
| Krvné skupiny | | | | | | | | | | | | | | ● | | | | | | | ● | | ● | ● | | ● |
| Kurzový lístok CD | | | | | | | | | | | | | ● | | | ● | ● | | ● | | | | | | | ● |
| Laty | | | ● | | | | | | | | ● | ● | | | | | | | | ● | ● | | | | | |
| Lieky | | | | | | | | | | | | ● | ● | ● | | ● | ● | | | | | ● | | | | |
| Miera nezamestnanosti CD | | | | | | | | | | | | | ● | ● | | | | | | ● | ● | ● | | | ● | ● |
| Nadváha a obezita CD | | | | | | | | | | | | | ● | ● | | | | ● | | | | ● | | | | ● |
| Nomogram | | | | | | | | ● | | | | | ● | | | | | | | | | ● | | | | |
| Obecné voľby | | | | | | | | | | | | | | ● | | ● | | | | ● | ● | | | | | ● |
| Oplotenie záhrady CD | | | ● | | | | | | | | ● | | | | | | | | | ● | | | | | | |
| Palacinky | | | | | | | | | | | | | | | | | ● | | ● | | | | | | | ● |
| Piráti | | | | | | | | | | | | | ● | ● | | ● | | | ● | | | | | | | |
| Preklápanie | | | | | | | | | | ● | ● | ● | | | | | | | | | | ● | | | | |

CD téma je na priloženom CD

*Orientačné zaradenie úloh do tematických celkov*

| | Uhol | Trojuholník, Pytagorova veta | Mnohouholník, obvod a obsah mnohouholníka | Podobnosť a mierka, goniometria | Zhodnosť, stredová a osová súmernosť | Kruh, kružnica, obvod a obsah oblých útvarov | Konštrukcie | Povrch a objem telies | Mnohosten, sieť, znázornenie mnohostena | Priestorová predstavivosť | Deliteľnosť, delenie so zvyškom | Celé čísla a operácie s nimi | Približné čísla, zaokrúhľovanie | Zlomky, percentá | Mocniny a odmocniny | Pomer, úmera | Priama a nepriama úmernosť | Funkcie, lineárna funkcie | Euro úlohy | Výraz a jeho úprava | Rovnice a nerovnice | Logika, čítanie s porozumením | Kombinatorika | Pravdepodobnosť | Aritmetický priemer | Diagramy, tabuľky a grafy |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prezidentské voľby | | | | | | | | | | | | • | • | • | | | | | | | | • | | | | • |
| Priestupné roky | | | | | | | | | | | • | • | • | | | | | | | | | • | | | | |
| Quincunx – Galtonova doska | | | | | | | | | | | | | | • | | | | | | | | | • | • | | |
| Rýchlosť zvierat | | | • | | | | | | | | | | • | • | | | • | | | | | | | | | |
| Skriňa za dverami | • | • | | • | | • | • | | | | | | | | • | | | | | | | | | | | |
| Sodík CD | | | | | | | | | | | | | • | | | | • | | | | | | | | | |
| Spoločný prenájom | | | • | | | | | | | | | | • | | | | | | | | • | • | | | | |
| Srdiečko embrya | | | | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | • | | | | • |
| Šachovnicová kocka | | | | | | | | • | | • | | | | | | | | | | | | | • | | | |
| Škatuľky | | | | | | | | • | • | • | | | | | • | | | | | • | | | | | | |
| Štvorlístková fontána CD | | • | | • | • | • | • | • | | | | | | | • | | | | | • | | | | | | |
| Tarify elektrickej energie | | | | | | | | | | | | | • | | | | | • | | • | • | | | | | • |
| Turistika | | | | | | | | | | | | • | | | | | | | | | | • | • | | | |
| Ťažisko CD | | | • | | | | • | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | |
| Včelí med CD | | | | | | | | | | | | | | • | | | • | | • | | • | | | | | |
| Výmena okien | | | | | | | | | | | | | • | • | | | | | • | | | | | | | |
| Zemetrasenia | | | | | | • | • | | | | | • | | | | | | | | • | • | | | | | |
| Zisky leteckých spoločností CD | | | | | | | | | | | | • | • | • | | | | | | | | • | | | | • |
| Zlato | | | | | | | | • | | | | | • | | • | | | | | • | | | | | | |
| Zorné pole | • | | | | | • | • | | | | | | | | | | | | | | • | | | | | |
| Zrážky | | | | | | | | | | | | | • | | | | | • | | | | • | | | | • |
| Župa | | | | | | | | • | • | • | | | | | | • | | | | | | • | | | | |

CD téma je na priloženom CD

Počas prípravy tejto zbierky sa učitelia a lektori stretli na piatich školeniach:

16. - 18. november 2008, Bratislava, FMFI UK

4. - 6. máj 2007, Senec

28. - 30. september 2007, Bratislava, FMFI UK

2. - 4. február 2007, Modra

1. - 3. december 2006, Richňava

# Obsah

## Akcia

Na plagáte som si prečítal o akcii obchodu TORUS.

S manželkou sme sa akciou dali zlákať a v obchode TORUS sme nakúpili 3 páry rovnakých papúč po 200 Sk, 1 topánky za 1 790 Sk, 2 páry rovnakých pančúch po 120 Sk, 5 rovnakých párov ponožiek po 60 Sk, jednu modrú a jednu sivú čiapku po 200 Sk.


**Úloha 1:** Koľko korún sme zaplatili za tento nákup? O koľko percent bol celý náš nákup lacnejší oproti cenám bez akcie? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Za nákup sme zaplatili .................. Sk.

Nákup bol lacnejší o ...................... %.

Večer som sa dozvedel, že susedia využili tú istú akciu a kúpili si v TORUSe tri rovnaké svetre. Zo žartu som povedal susedovi: „Mohli ste tie svetre kúpiť štyri. Ja by som ti doplatil rozdiel medzi cenami za nákup štyroch a troch svetrov a mal by som nový sveter skoro zadarmo.“

**Úloha 2:** Koľkopercentnú zľavu by som takýmto nákupom dosiahol? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..................................................................................................................

Sused sa na chvíľu zamyslel a povedal mi: „To by nebolo fér. Mne by zostali tri svetre s 30 %-nou zľavou, a ty by si dostal štvrtý s väčšou zľavou. Ja by som to urobil inak. Kúpil by som štyri svetre. Tebe by som dal jeden z tých troch, čo majú zľavu 30 %. Sám by som si nechal dva s 30 %-nou zľavou a štvrtý, čo má väčšiu zľavu.“

**Úloha 3:** Koľkopercentnú zľavu z ceny troch svetrov by takýmto nákupom dosiahol sused? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..................................................................................................................

Obchod KUBUS má rovnaký sortiment a dokonca aj rovnaké ceny, ale inú akciu:

**Ak si kúpite dva rovnaké kusy, tak tretí máte zadarmo.**

**Úloha 4:** Chcete si kúpiť 3 rovnaké kusy oblečenia. Akcia sa na ne vzťahuje v TORUSe aj v KUBUSe. V ktorom z týchto obchodov bude nákup lacnejší? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |

**Úloha 5:** Koľko kusov akciového tovaru po 250 Sk za kus by sme museli nakupovať, aby ich nákup v jednom z uvedených obchodov bol presne o 1 000 Sk lacnejší ako v druhom z nich? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

## BEH NA EMPIRE STATE BUILDING

Každoročne sa viac ako 100 bežcov z celého sveta zúčastňuje na unikátnom športovom podujatí. Ide o beh po schodoch mrakodrapu Empire State Building v centre New Yorku. Hore 1576 schodmi až na 86. poschodie vo výške 320 metrov, kde je prvá vyhliadková plošina.

**Úloha 1:** Paľo chcel zistiť, koľko schodov vedie z poschodia na poschodie. Po delení 1576:86 mu ale nevyšlo celé číslo. Preto usúdil, že aspoň jeden z údajov (počet schodov alebo počet poschodí) je zlý. Vysvetlite, prečo <u>nemusí</u> byť Paľov úsudok správny.

| Vysvetlenie: |
|---|
| |
| |

Dňa 6. 2. 2007 sa konal 30. ročník tohto behu. V tabuľkách sú výsledky najlepších bežcov. V prvom stĺpci je poradie v cieli, v druhom stĺpci je meno športovca, v treťom jeho vek, v ďalšom krajina, za ktorú pretekal, a v poslednom je uvedený dosiahnutý výsledný čas (v minútach a sekundách).

| Výsledková listina - Muži | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Thomas Dold | 22 | Nemecko | 10:25 |
| 2. | Jahn Mattias | 23 | Nemecko | 10:56 |
| 3. | Rickey Gates | 25 | USA | 11:02 |
| 4. | Pedro Ribeiro | 34 | Čína | 11:10 |
| 5. | Rudolf Reitberger | 35 | Rakúsko | 11:12 |
| 6. | Tommy Coleman | 32 | USA | 11:33 |
| 7. | Jesse Berg | 34 | USA | 12:02 |
| 8. | David Shafran | 27 | USA | 12:14 |
| 9. | Zach Schade | 39 | USA | 12:15 |
| 10. | Jose Cano Fernandez | 36 | Španielsko | 12:22 |
| Výsledková listina - Ženy | | | | |
| 1. | Suzy Walsham | 33 | Singapúr | 13:12 |
| 2. | Cindy Moll-Harris | 38 | USA | 13:24 |
| 3. | Fiona Bayly | 39 | USA | 13:25 |
| 4. | Amy Fredericks | 40 | USA | 14:07 |
| 5. | Kathryn Froelich | 44 | USA | 14:18 |
| 6. | Caroline Gaynor | 23 | USA | 14:29 |
| 7. | Bridget Carlson | 45 | USA | 14:30 |
| 8. | Tina Marie Poulin | 34 | USA | 14:38 |
| 9. | Stacy Creamer | 47 | USA | 14:45 |
| 10. | Jodi Gravino | 37 | USA | 15:34 |

**Úloha 2:** Kamila si napísala, že Tommymu Colemanovi trval beh 11,33 minúty. Zapísala si to dobre? Zakrúžkujte správnu z možností *áno – nie* a svoju odpoveď vysvetlite.

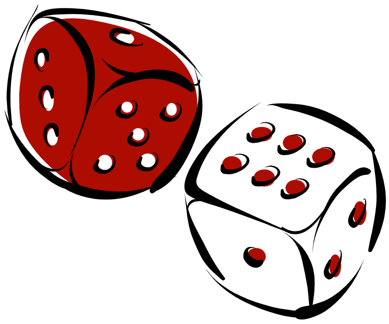
Odpoveď: áno nie

Vysvetlenie:

**Úloha 3:** Istý reportér na základe výsledkovej listiny urobil menšie výpočty a vytvoril nasledujúci nadpis: *Suzy stačila priemerná rýchlosť 1,455 km/hod na víťazstvo.* Vysvetlite, ako reportér prišiel k hodnote 1,455 a prečo <u>nie</u> je jeho tvrdenie správne.

Vysvetlenie:

## Bežné a špeciálne hracie kocky



Pán Ignác Kubix má malú dielničku a špecializuje sa na výrobu hracích kociek. Väčšinu jeho zákaziek tvoria bežné hracie kocky. Na nich padá každé z čísel 1 až 6 (teda 1 až 6 bodiek) s rovnakou pravdepodobnosťou.

Často si však zákazníci želajú špeciálne hracie kocky. Nedávno mal za úlohu vyrobiť kocku, na ktorej budú všetky čísla 1 až 6, ale stena so 6 bodkami bude padať trikrát častejšie ako každá zo zvyšných piatich stien.

**Úloha 1:** S akou pravdepodobnosťou padne na tejto špeciálnej kocke

a) stena so 4 bodkami?

b) stena so 6 bodkami?

Zapíšte svoj výpočet. Výsledok napíšte v tvare desatinného čísla.

Výpočet:

Odpoveď: Stena so 4 bodkami padne s pravdepodobnosťou .........................

Stena so 6 bodkami padne s pravdepodobnosťou .........................

**Úloha 2:** S akou pravdepodobnosťou padne pri hode dvoma takýmito kockami spolu 12 bodiek? Zapíšte svoj výpočet. Výsledok napíšte v percentách.

Výpočet:

Odpoveď: Dvanásť bodiek spolu na dvoch kockách padne s pravdepodobnosťou ................. %.

**Úloha 3:** S akou pravdepodobnosťou padne pri hode dvoma takýmito kockami spolu 11 bodiek? Zapíšte svoj výpočet. Výsledok napíšte v percentách.

Výpočet:

Odpoveď: Jedenásť bodiek spolu na dvoch kockách padne s pravdepodobnosťou ................. %.

Je málo pravdepodobné, že takúto špeciálnu kocku zoženiete. Môžete si ale vyrobiť jej náhradu, ktorá sa bude správať rovnako ako táto špeciálna kocka. Táto náhrada už nebude mať tvar kocky. Bude to mnohosten, ktorý bude mať viac stien ako kocka. Všetky steny budú mať rovnaký tvar a každá z nich bude padať s rovnakou pravdepodobnosťou. Aby sme zabezpečili, že šestka bude padať s trikrát väčšou pravdepodobnosťou ako ostatné čísla, napíšeme čísla 1, 2, 3, 4 a 5 vždy len na jednu stenu tohto mnohostena, ale číslo 6 napíšeme na viacero stien.

**Úloha 4:** Zistite, koľko stien má tento mnohosten.

Odpoveď: Mnohosten má ............................... stien.

**Úloha 5:** Narysujte sieť tohto mnohostena.

Miesto na narysovanie siete mnohostena:

V herni práve prebieha súťaž. Hádže sa dvoma kockami. Rozhodujúci je súčet počtu bodiek, ktoré padnú pri jednom hode. Na začiatku každého kola sa vylosuje číslo, ktoré má byť týmto súčtom. Vyhráva ten, komu sa podarí dosiahnuť daný súčet na najmenší počet pokusov.

Súťaže sa zúčastňujú aj kamaráti Adam Poctivý, Beáta Nečestná a Viera Polovičná. Adam Poctivý bude hádzať dvoma bežnými kockami, Beáta Nečestná dvoma špeciálnymi hracími kockami, o ktorých sme hovorili pred úlohou 1. Viera Polovičná bude mať jednu bežnú a jednu špeciálnu kocku.

**Úloha 6:** V prvom kole súťaže bol vylosovaný súčet 2. Kto z našich kamarátov má v tomto kole najväčšiu šancu na výhru? Svoju odpoveď zdôvodnite.

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |

Odpoveď: Najväčšiu šancu na výhru má ..................................................................................... .

**Úloha 7:** V druhom kole súťaže vylosovali súčet 11. Zistite, s akou pravdepodobnosťou padne jednotlivým kamarátom požadovaný súčet na prvý pokus. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
| --- |
| |

Odpoveď: Adamovi Poctivému padne súčet 11 na prvý pokus s pravdepodobnosťou ............... .

Beáte Nečestnej padne súčet 11 na prvý pokus s pravdepodobnosťou ........................ .

Viere Polovičnej padne súčet 11 na prvý pokus s pravdepodobnosťou ....................... .

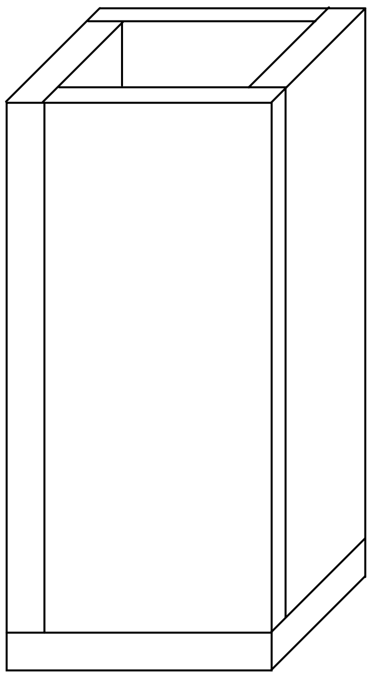
**Úloha 8:** V poslednom kole súťaže bol vylosovaný súčet 9. Kto z kamarátov má v tomto kole najväčšiu šancu na výhru? Svoju odpoveď zdôvodnite, najlepšie pomocou vhodných výpočtov.

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |

Odpoveď: Najväčšiu šancu na výhru má ..................................................................................... .

## BÚDKA

Na obrázku, ktorý narysovala Anička (pozri obr. 1), je vtáčia búdka pre sýkorku uhliarku. Búdka je zložená z dosák rovnakej hrúbky, pričom štyri z nich sú rovnaké a zvyšné dve sú tiež rovnaké. Na obrázku nie je znázornená vrchná doska. Obrázok je narysovaný vo voľnom rovnobežnom premietaní v mierke 1 : 4.



*obr. 1*

**Úloha 1:** a) Zistite objem vnútorného priestoru Aničkinej vtáčej búdky. Potrebné údaje odmerajte na obrázku, namerané hodnoty zaokrúhlite na polcentimetre. Zapíšte svoj výpočet.

b) Potom vyjadrite objem vnútorného priestoru búdky v litroch.

Odmerané údaje:

Výpočet:

Odpoveď: Vnútorný priestor má objem ........................ cm³ = ......................... litrov.

Peter si pripravil rovnaké štyri bočné dosky, ako má Aničkina búdka. Zložil ich však iným spôsobom. Preto zvyšné dva kúsky – vrchná a spodná doska – museli mať iné rozmery, ako boli rozmery spodnej a vrchnej dosky Aničkinej búdky.

**Úloha 2:** Aké rozmery budú mať zvyšné dva kúsky, ktoré bude Peter potrebovať?

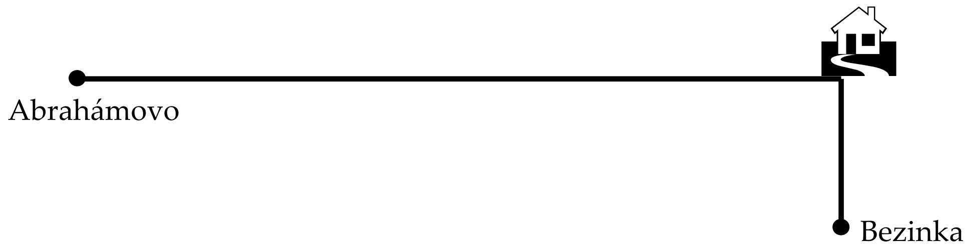
Odpoveď: .............. cm × ............ cm

**Úloha 3:** Narysujte v mierke 1 : 4 Petrovu búdku bez vrchnej časti tak, ako je znázornená Aničkina búdka.

Miesto na rysovanie:

## CESTA

Poľná cesta medzi Abrahámovom a Bezinkou sa skladá z dvoch na seba kolmých rovných úsekov. Dlhší úsek meria 12,1 km, kratší 2,8 km. V mieste, kde poľná cesta mení smer, stojí osamelý dom (pozri obr. 1).




*obr. 1*

Zastupiteľstvo sa rozhodlo nahradiť túto poľnú cestu asfaltovou. Poslanci zastupiteľstva však stáli pred problémom, kade by mala nová cesta viesť. Odborníci odhadli, že

- výstavba 1 km cesty vedenej po trase pôvodnej poľnej cesty by stála asi 5 500 000 Sk,
- výstavba 1 km cesty mimo trasy pôvodnej poľnej cesty by stála asi 6 600 000 Sk.

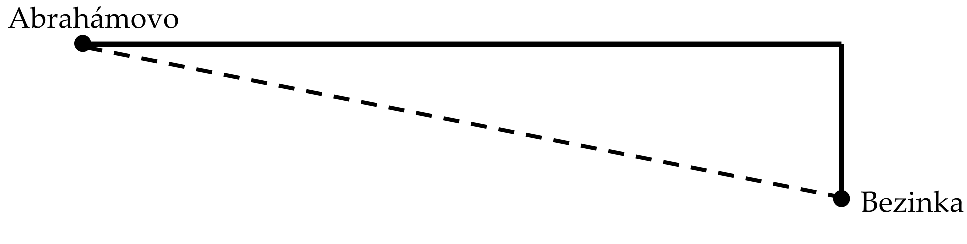
*Ceny ciest, ktoré budete rátať v úlohách 1 – 4 a v úlohe 6, zaokrúhľujte na milióny.*

**Úloha 1:** Poslanec Adamko navrhol, aby asfaltová cesta viedla po pôvodnej trase poľnej cesty. Tvrdil, že vtedy bude nová cesta určite najlacnejšia. Koľko korún by stála táto cesta? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Cesta by stála ............................................................................ .

**Úloha 2:** Poslanec Bartolomejčík sa domnieval, že najlacnejšia bude cesta, ktorá povedie rovno z Abrahámova do Bezinky. Na obr. 2 je navrhovaná cesta vyznačená čiarkovane. Vypočítajte cenu tejto cesty. Svoj výpočet zapíšte.



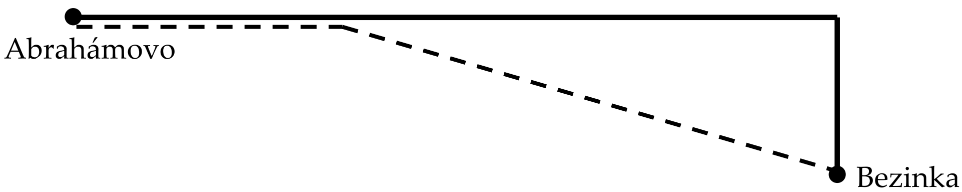

*obr. 2*

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Cesta by stála ............................................................................ .

Teraz to už začalo poslancom vŕtať v hlave. Dá sa vôbec nájsť nejaké lacnejšie riešenie?

Poslankyňa Čížiková navrhla inú trasu: nová cesta povedie z Abrahámova najprv po poľnej ceste a od určitého miesta sa odkloní a povedie rovno do Bezinky (pozri obr. 3). Navrhla, aby toto odklonenie bolo na začiatku lesa, čo je 2,6 km od Abrahámova.




*obr. 3*

**Úloha 3:** Koľko korún by stála cesta navrhnutá poslankyňou Čížikovou? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

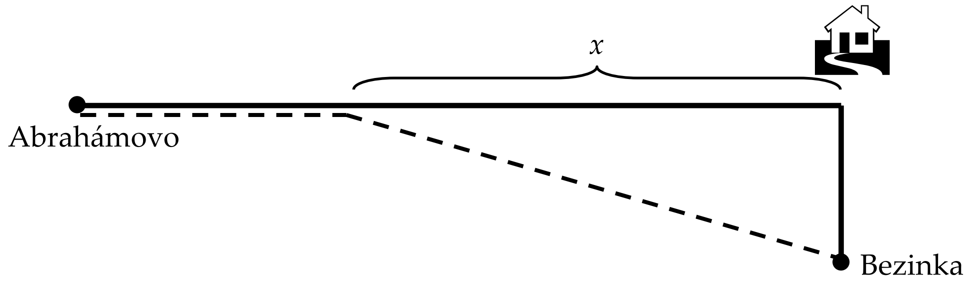
Odpoveď: ...........................................................................................................................

**Úloha 4:** Navrhnite cestu, ktorá by bola lacnejšia ako všetky tri uvedené poslanecké návrhy. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Návrh: ...........................................................................................................................

| Zdôvodnenie (výpočet): |
|---|
| |

**Úloha 5:** V závislosti od toho, kde sa cesta odkloní, vyjadrite cenu navrhovanej novej cesty. Vzdialenosť od miesta odklonu po osamelý dom označte písmenom $x$ (obr. 4).




*obr. 4*

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: cena = ...............................................................................................................

**Úloha 6:** Na obrázku je graf funkcie, ktorá udáva cenu cesty v závislosti od miesta odklonu (predpis tejto funkcie ste hľadali v úlohe 5). Na vodorovnej osi je vzdialenosť od osamelého domu po odklon navrhovanej cesty ($x$). Na zvislej osi je cena cesty v korunách.

a) Z grafu odhadnite hodnotu, v ktorej nadobúda táto funkcia minimum.
b) Na základe toho vypočítajte cenu najlacnejšej cesty.

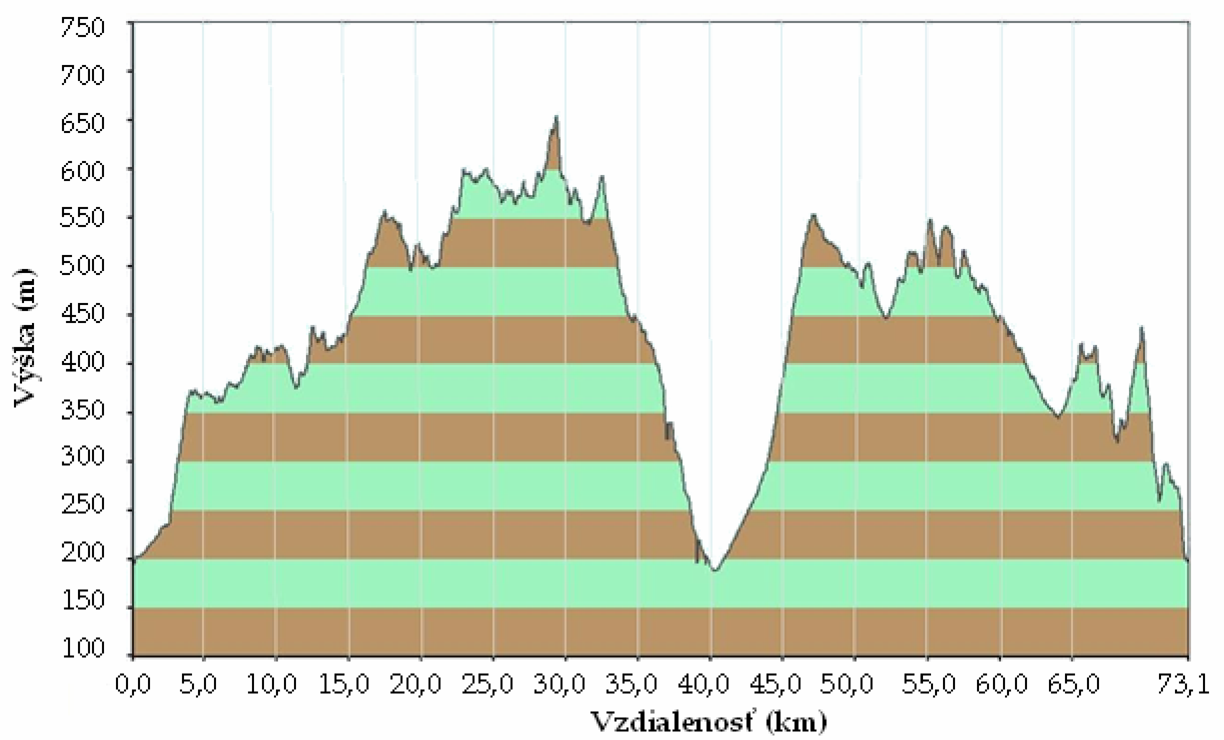

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Funkcia nadobúda minimum v hodnote $x \approx$ ................................................................ .

Cena najlacnejšej cesty je približne ........................................................................ .

## CYKLOMARATÓN

Na maratónoch horských bicyklov sa udáva tzv. *výškový profil trate*. Je to graf, ktorý znázorňuje nadmorskú výšku jednotlivých miest trate. Na vodorovnej osi je vzdialenosť miesta na trati od štartu, na zvislej osi je nadmorská výška tohto miesta. Na obr. 1 je výškový profil cyklomaratónu *Greenbike maratón 2008*.




*obr. 1*

Na základe grafu na obr. 1 riešte úlohy 1 – 5.

**Úloha 1:** Aká je dĺžka cyklomaratónu *Greenbike maratón 2008*?

Odpoveď: Dĺžka cyklomaratónu je .................... km.

**Úloha 2:** Podčiarknite z nasledujúcich tvrdení to, ktoré je pravdivé:

Štart je nižšie položený ako cieľ.

Štart je vyššie položený ako cieľ.

Štart je približne rovnako vysoko položený ako cieľ.

**Úloha 3:** V akej nadmorskej výške je najvyššie položený bod na trati? Na ktorom kilometri trate sa tento bod nachádza?

Odpoveď: Najvyššie položený bod sa nachádza v nadmorskej výške asi .......................................... m a je približne na .................................. kilometri trate.

**Úloha 4:** Aký je výškový rozdiel medzi najvyššie a najnižšie položeným bodom na trati? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Výškový rozdiel medzi najvyššie a najnižšie položeným bodom na trati je približne

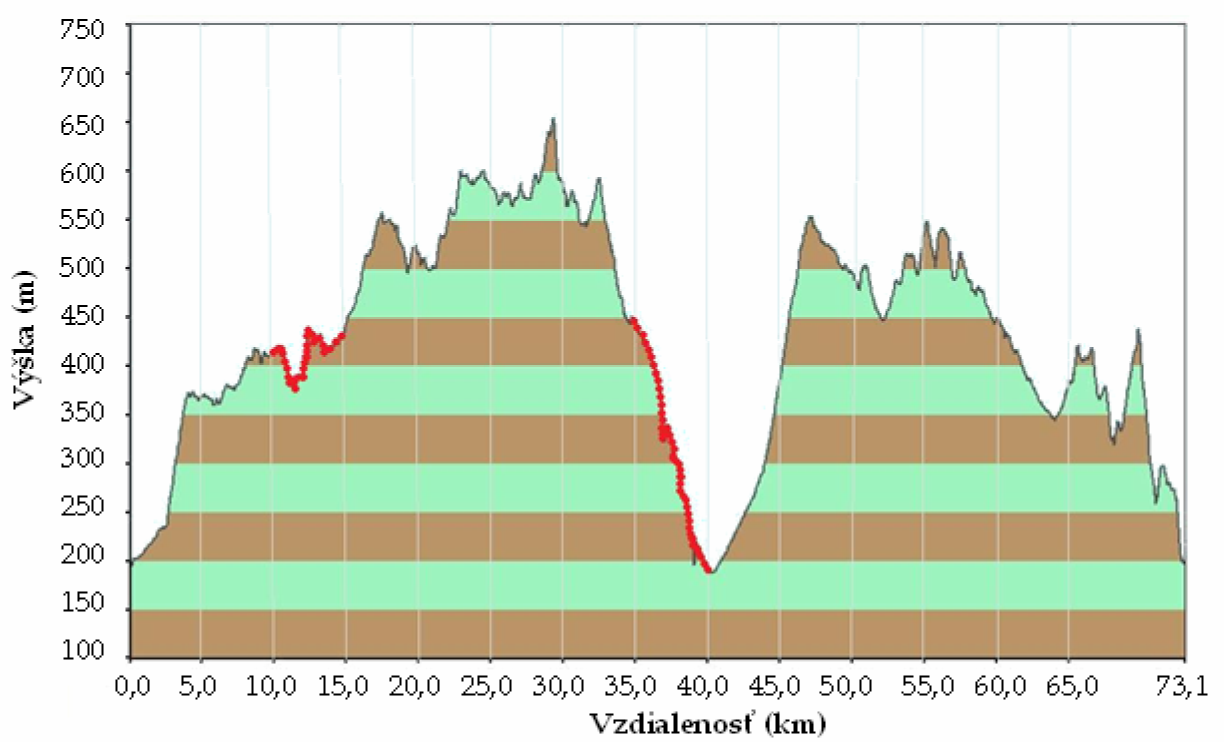
............................................................ m.

**Úloha 5:** V akej vzdialenosti od štartu je trať v nadmorskej výške 250 m? Uveďte všetky možnosti.

Odpoveď: Trať dosahuje nadmorskú výšku 250 m v týchto vzdialenostiach od štartu: .............

..........................................................................................................................................

**Úloha 6:** Na výškovom profile na obr. 2 sú hrubšou čiarou vyznačené dva úseky. Ktorý z nich predstavuje dlhší úsek: prvý (vľavo) alebo druhý (vpravo)? Svoju odpoveď zdôvodnite.




*obr. 2*

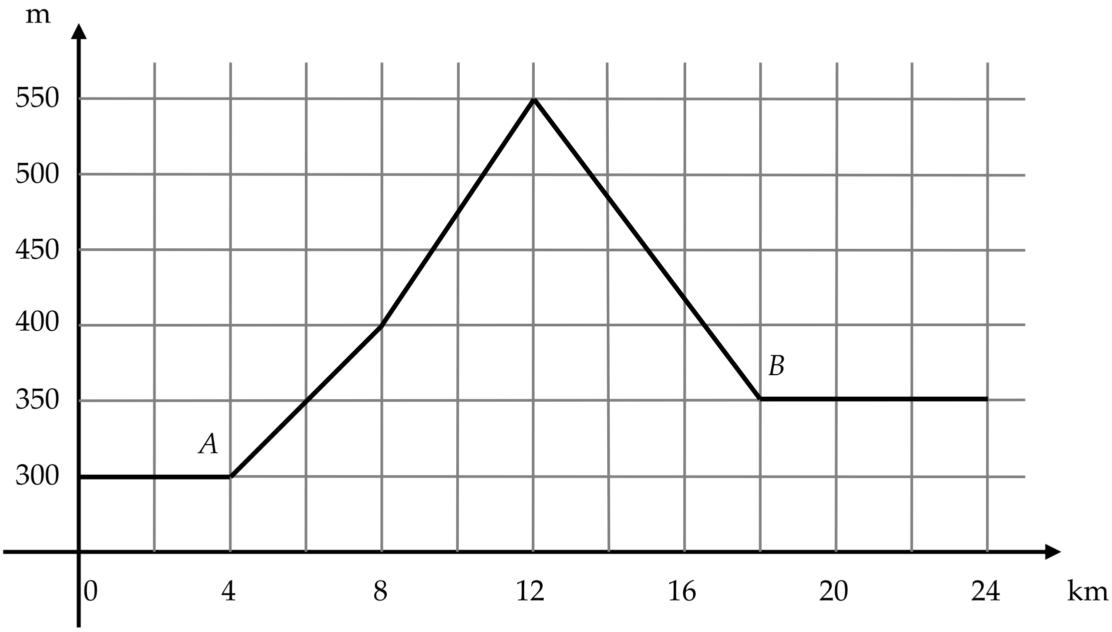
Odpoveď: ..........................................................................................................................................

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |

**Úloha 7:** V rámci tréningu si Paľo prešiel celú trasu maratónu tam aj späť. Vyznačte do výškového profilu na obr. 1 miesto, kde sa bude Paľo nachádzať po 101 km jazdy. Napíšte tiež, či pôjde dole kopcom, hore kopcom alebo po rovine.

Odpoveď: Paľo pôjde dole kopcom – hore kopcom – po rovine.

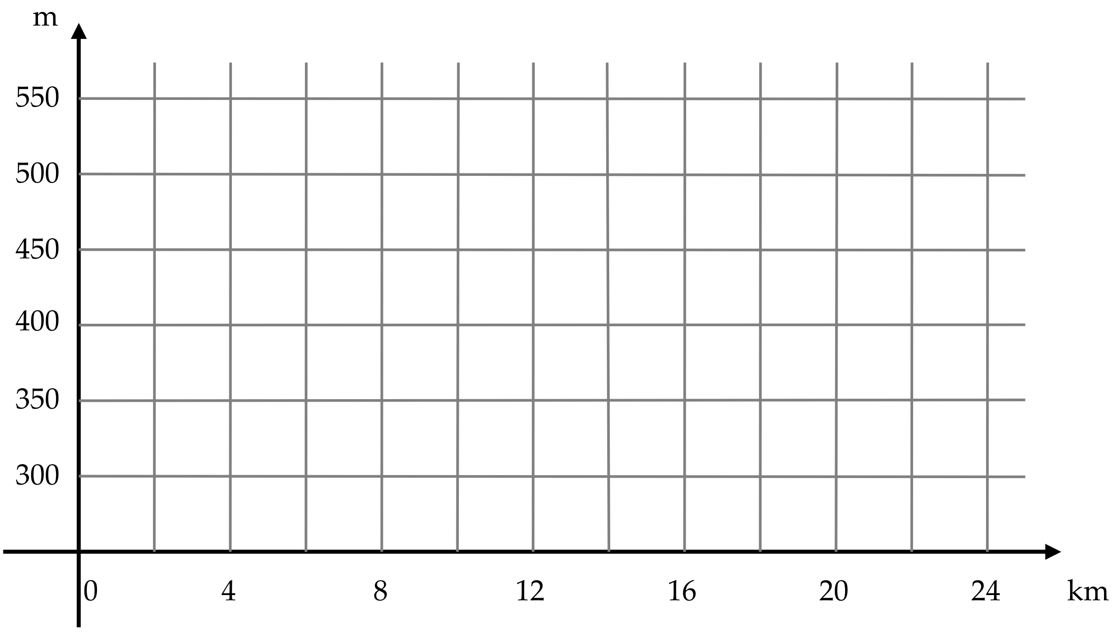
Na obr. 3 je znázornený výškový profil úseku cesty prekonávajúcej kopec.




*obr. 3*

**Úloha 8:** Cestu cez kopec chcú nahradiť priamym tunelom medzi miestami *A* a *B*. Tunel bude mať dĺžku 4 km.

Do obr. 4 narysujte výškový profil toho istého úseku cesty, tentoraz už s tunelom medzi miestami *A* a *B*.

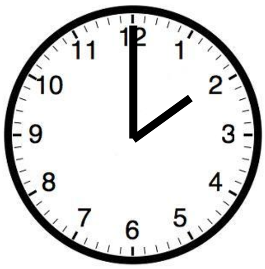



*obr. 4*

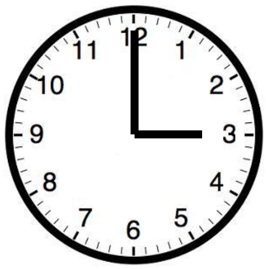
## ČASOVÉ PÁSMA

Slovensko leží v časovom pásme, ktoré sa označuje UTC+1. To znamená, že čas je tu o 1 hodinu posunutý oproti základnému časovému pásmu UTC (v ňom leží napríklad Londýn). Ak je v UTC napr. 14:00, tak v pásme UTC+1 je 15:00.

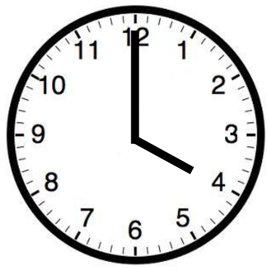
V lete sa na Slovensku používa letný čas (LČ). Ten je posunutý o ďalšiu hodinu. To znamená, že ak je v UTC napr. 14:00, tak v období zimného času je na Slovensku 15:00 ZČ, v období letného času je 16:00 LČ.



*základné časové pásmo UTC*



*časové pásmo UTC+1 zimný čas*



*časové pásmo UTC+1 letný čas*

Peru leží v časovom pásme UTC–5, v krajine sa nepoužíva odlišný zimný a letný čas.

**Úloha 1:** Koľko hodín je v Peru, ak je v základnom časovom pásme

a) 12:00?

b) 4:30?

c) 0:15?

Odpoveď: V Peru je :

a) .................... b) .................... c) .................... .

**Úloha 2:** Aké označenie má časové pásmo, v ktorom je 23:15 vtedy, keď v základnom časovom pásme UTC je 6:15?

Odpoveď: Toto časové pásmo má označenie .............................. .

**Úloha 3:** Koľko hodín je v Peru, ak je v Bratislave

a) 13:20 ZČ? b) 4:35 ZČ? c) 14:15 LČ? d) 3:20 LČ?

Odpoveď: V Peru je

a)............................... b) ....................... c) ............................ d) ............................ .

Moskva leží v časovom pásme UTC+3, Vladivostok v pásme UTC+10. Obidve tieto mestá ležia v Rusku, ktoré rovnako ako Slovensko používa zimný a letný čas.

**Úloha 4:** Cesta rýchlikom Bratislava–Moskva trvala kedysi 41 hodín. Vlak odchádzal z Bratislavy o 22:00. O koľkej hodine miestneho času mal doraziť do Moskvy? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Do Moskvy mal vlak doraziť o ..................... hod. miestneho času.

**Úloha 5:** Cesta vlakom Moskva–Vladivostok trvá podľa cestovného poriadku 148 hodín a 47 minút. Ak vlak z Moskvy odchádza 17. júna o 21:20, kedy by mal prísť do Vladivostoku? Uveďte dátum a hodinu miestneho času. Svoj výpočet zapíšte.


| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Do Vladivostoku by mal vlak prísť ............................ o ............................... hod.

**Úloha 6:** Vlak Moskva–Vladivostok odišiel z Moskvy 20. júna o 23:53. Do mesta Novosibirsk, ktoré leží v časovom pásme UTC+6, prišiel 23. júna o 00:45 miestneho času. Koľko hodín trvala cesta vlaku? Svoj výpočet zapíšte.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Cesta vlaku z Moskvy do Novosibirska trvala .................... hodín a ................ minút.

## ČERVENÉ KRVINKY

Petra zaujal článok o červených krvinkách.

*Červené krvinky sú telieska, ktoré obsahujú červené farbivo hemoglobín. Hemoglobín sa podieľa na prenose kyslíka a oxidu uhličitého. Krvinka môže viazať kyslík iba svojím povrchom. Červené krvinky majú tvar preliačenej piškóty, priemer asi 0,007 mm a hrúbku asi 0,002 mm. Celkový povrch všetkých červených krviniek v ľudskom tele je asi 2 000-krát väčší ako je povrch ľudského tela. V jednom mm*$^3$ *krvi je asi 5 000 000 červených krviniek.*

*V ľudskom tele je približne 14-krát menej litrov krvi, ako je hmotnosť tela. Chudokrvnosť nastáva, ak množstvo hemoglobínu klesne pod istú hodnotu. Pre mužov je táto hraničná hodnota 135 gramov na 1 liter krvi, u žien 120 gramov na 1 liter krvi.*

**Úloha 1:** Peter od svojho lekára vedel, že celková plocha jeho tela je asi 1,6 m$^2$. Aký je približný celkový povrch Petrových červených krviniek? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

**Úloha 2:** Alene pri krvných testoch zistili, že má v tele 480 g hemoglobínu. Je Alena chudokrvná, ak v čase vyšetrenia vážila 54 kg? Zakrúžkujte správnu z dvojice možností *áno – nie* a zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: áno nie

**Úloha 3:** Krvinka má približne rovnako veľký povrch ako guľa s rovnakým priemerom. Pokúste sa vysvetliť, prečo krvinky nemajú tvar gule, ale tvar piškóty.

Vysvetlenie:

## DEDIČSKÉ KONANIE

V prípade úmrtia nejakého človeka po ňom ostane majetok. Tento majetok je predmetom dedičského konania. To znamená, že ho získajú iné osoby: členovia rodiny alebo iné blízke osoby, ktoré boli určené v poslednej vôli – závete. Ak nebol spísaný závet a dediči neuzavreli žiadnu dohodu o rozdelení dedičstva, tak sa dedí tzv. zo zákona. V takom prípade každý člen rodiny zdedí presne určený podiel majetku. Veľkosť tohto podielu upravuje Občiansky zákonník (zákon 40/1964 Zb.).

V našich úlohách sa budeme zaoberať len dedením zo zákona, teda prípadom, keď nebol zanechaný závet a dediči neuzavreli dohodu o rozdelení dedičstva. Vyriešime tri prípady: rodinu Donovalovcov, rodinu Sojkovcov a rodinu Chovancovcov.

**OBČIANSKY ZÁKONNÍK**
DRUHÁ HLAVA
DEDENIE ZO ZÁKONA

*§ 473*
*(1) V prvej skupine dedia poručiteľove deti a manžel, každý z nich rovnakým dielom.*
*(2) Ak nededí niektoré dieťa, nadobúdajú jeho dedičský podiel rovnakým dielom jeho deti. Ak nededia ani tieto deti alebo niektoré z nich, dedia rovnakým dielom ich potomci.*

*§ 474*
*(1) Ak nededia poručiteľovi potomci, dedí v druhej skupine manžel, poručiteľovi rodičia a ďalej tí, ktorí žili s poručiteľom najmenej po dobu jedného roka pred jeho smrťou v spoločnej domácnosti a ktorí sa z tohto dôvodu starali o spoločnú domácnosť alebo boli odkázaní výživou na poručiteľa.*
*(2) Dedičia druhej skupiny dedia rovnakým dielom, manžel však vždy najmenej polovicu dedičstva.*

*§ 475*
*(1) Ak nededí manžel ani žiadny z rodičov, dedia v tretej skupine rovnakým dielom poručiteľovi súrodenci a tí, ktorí žili s poručiteľom najmenej po dobu jedného roku pred jeho smrťou v spoločnej domácnosti a ktorí sa z toho dôvodu starali o spoločnú domácnosť alebo boli odkázaní výživou na poručiteľa.*
*(2) Ak niektorý zo súrodencov poručiteľa nededí, nadobúdajú jeho dedičský podiel rovnakým dielom jeho deti.*

*§ 475a*
*Ak žiadny dedič nededí v tretej skupine, v štvrtej skupine dedia rovnakým dielom prarodičia poručiteľa, a ak nededí žiaden z nich, dedia rovnakým dielom ich deti.*

*Prvý prípad.* Ján a Mária Donovalovci majú dcéru Evu, syna Martina a vnučku Kristínu (dcéru Martina). Manželia Donovalovci majú spoločný majetok v hodnote 63 000 €.

**Úloha 1:** Akú finančnú hodnotu by mal zdedený majetok jednotlivých členov rodiny v prípade smrti Jána Donovala? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
| --- |
| |

Odpoveď: Mária Donovalová: ..................€, dcéra Eva: ...................... €, syn Martin: ................. €,

vnučka Kristína: ...................... €.

Počas priebehu dedičského konania sa ukázalo, že Ján Donoval mal ešte mimo manželstva dcéru Kamilu.

**Úloha 2:** Akú finančnú hodnotu bude mať zdedený majetok

a) Kamily?

b) Kamilinej matky?

Vysvetlite, ako ste na to prišli.

| Vysvetlenie: |
| --- |
| |

Odpoveď: Kamila: ............................................ €, Kamilina matka: ............................................ €.

*Druhý prípad.* Už zosnulí manželia Sojkovci mali synov Martina, Dušana a dcéru Miroslavu. Nemali žiadne vnúčatá. Martin už dlhé roky žije so svojou družkou Gabrielou Modrou a nemá žiadne deti.

**manželia Sojkovci †**

Martin Sojka | Dušan a Jana Sojkovci | Miroslava Sojková

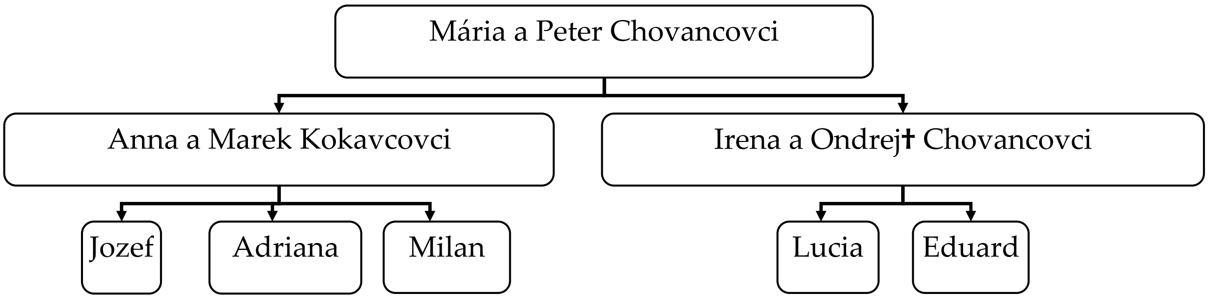
**Úloha 3:** Ktorí zo spomenutých ľudí a podľa ktorého z citovaných paragrafov Občianskeho zákonníka majú zo zákona nárok na dedičstvo po Martinovi Sojkovi?

Odpoveď: Na dedenie zo zákona majú nárok .................
.....................................................................,
a to podľa paragrafu .........................................
Občianskeho zákonníka.

**Úloha 4:** Aký veľký majetok zdedila pani Modrá po smrti svojho druha, ak viete, že Miroslava Sojková zdedila 21 600 €?

Odpoveď: Pani Modrá zdedila ........................... €.

*Tretí prípad.* Mária a Peter Chovancovci mali spolu dve deti, dcéru Annu a syna Ondreja. Syn Ondrej už dávnejšie zomrel ako 35-ročný pri autohavárii. V rodokmeni na obrázku sú zaznamenaní aj ďalší členovia rodiny.




Po smrti starého otca Petra sa zvyšok rodiny stretol na dedičskom konaní.

**Úloha 5:** Ktorí z uvedených členov rodiny majú zo zákona nárok na dedičstvo po Petrovi Chovancovi? Do nasledujúcej tabuľky napíšte odpoveď a vysvetlenie ku každému členovi rodiny.

| | áno/nie | vysvetlenie | |
|---|---|---|---|
| Mária Chovancová | | | |
| Marek Kokavec | | | |
| Anna Kokavcová | | | |
| Jozef Kokavec | | | |
| Adriana Kokavcová | | | |
| Milan Kokavec | | | |
| Irena Chovancová | | | |
| Lucia Chovancová | | | |
| Eduard Chovanec | | | |

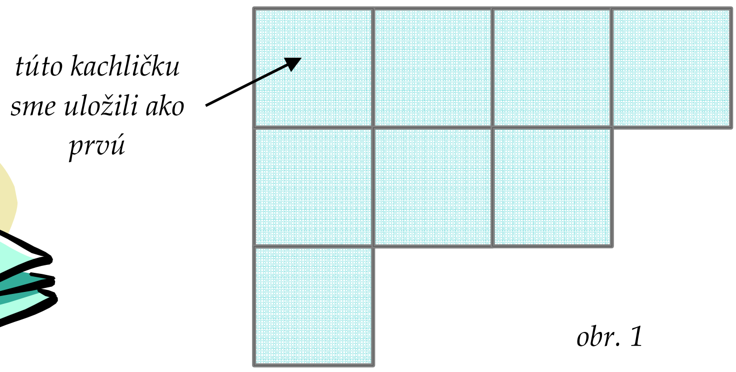
Peter Chovanec spolu s manželkou Máriou vlastnili dom v hodnote 26 000 €, pozemok v hodnote 6 500 € a finančnú čiastku 3 230 €.

**Úloha 6:** Akú finančnú hodnotu má časť zdedeného majetku jednotlivých členov rodiny po Petrovi Chovancovi? Zapíšte svoj výpočet. Hodnotu dedičstva jednotlivých členov rodiny zapíšte do pravého stĺpca tabuľky v úlohe 5.

Výpočet:

## DLAŽDICE

Obdĺžnikovú dlážku s rozmermi $4{,}45\ \text{m} \times 3{,}65\ \text{m}$ chceme vykachličkovať jednofarebnými štvorcovými dlaždicami s rozmermi $33\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$. Budeme ich ukladať tak, aby sa dotýkali jednou celou svojou stranou. S ukladaním začneme v rohu miestnosti.




*obr. 1*

**Úloha 1:** Koľko celých dlaždíc sa pri takomto ukladaní zmestí na podlahu?

Odpoveď: ..........................................................................................................................

Keď sa pri postupnom ukladaní dlaždíc dostaneme k druhej stene, nezostane nám priestor na celú dlaždicu. Na pokrytie zvyšnej časti podlahy preto potrebujeme menšie dlaždice. Tie budú mať tvar obdĺžnika, vyrežeme ich z dlaždíc $33\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$, ktoré sme ešte nepoužili. Zistili sme, že ak chceme pokryť celú dlážku, potrebujeme vyrezať menšie dlaždice troch rôznych veľkostí.

**Úloha 2:** Aké rozmery budú mať tieto menšie dlaždice? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: ..........................................................................................................................

**Úloha 3:** Pre každú z troch veľkostí menších dlaždíc zistite, koľko dlaždíc tejto veľkosti potrebujeme. Zapíšte svoj výpočet.Výsledky zapíšte do tabuľky.

| Výpočet: |
|---|
| |

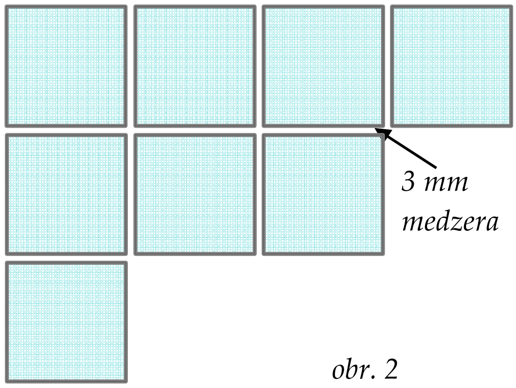
Odpoveď:

| | | | |
|---|---|---|---|
| rozmery dlaždice | | | |
| počet dlaždíc | | | |

V skutočnosti sa medzi stenou a dlaždicou a aj medzi susednými dlaždicami necháva trojmilimetrová medzera. Je to kvôli tomu, že pri zvýšení teploty sa dlaždice trochu roztiahnu.

Ak chceme pri ukladaní všetkých dlaždíc dodržať túto medzeru, musia mať menšie dlaždice iné rozmery, než sme vypočítali v úlohe 2.

**Úloha 4:** Aké rozmery budú mať teraz menšie dlaždice? Zapíšte svoj výpočet.




*obr. 2*

Výpočet:

Odpoveď: ..............................................................................................................................

**Úloha 5:** Pri vyrezávaní malých dlaždíc (ich rozmery ste hľadali v úlohe 4) sa samozrejme snažíme minúť čo najmenej celých dlaždíc.

a) Najmenej koľko dlaždíc $33\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$ potrebujeme, aby sme z nich mohli vyre zať dostatočný počet malých dlaždíc? Svoju odpoveď vysvetlite.

b) Najmenej koľko dlaždíc $33\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$ potrebujeme celkom?

Vysvetlenie:

Odpoveď: Na vyrezanie dostatočného počtu malých dlaždíc potrebujeme najmenej .................. dlaždíc $33\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$.

Celkom potrebujeme najmenej ........................... dlaždíc $33\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$.

**Úloha 6:** Dlaždice s rozmermi $33\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$ sa balia do škatúľ po 9 kusoch. Podľa odporúčania predavača sme sa rozhodli kúpiť o 5 % dlaždíc viac, než sme vypočítali, že budeme potrebovať. Koľko škatúľ máme kúpiť? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..............................................................................................................................

## DOPRAVNÉ NEHODY

Nasledujúca tabuľka opisuje dopravnú nehodovosť v okresoch Nitrianskeho kraja v roku 2004 (pozor, v Nitrianskom kraji je aj nitriansky <u>okres</u>).

| Okres | Počet DN | | Usmrtení | | Ťažko zranení | | Ľahko zranení | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *r. 2004* | +/– | *r. 2004* | +/– | *r. 2004* | +/– | *r. 2004* | +/– |
| Nitra | 2 046 | 144 | 16 | – 5 | 81 | 9 | 292 | 15 |
| Komárno | 681 | 46 | 13 | 1 | 39 | 4 | 146 | – 5 |
| Levice | 871 | 9 | 13 | 9 | 50 | – 6 | 174 | – 2 |
| Nové Zámky | 1 033 | 65 | 16 | – 6 | 36 | – 3 | 241 | 36 |
| Šaľa | 332 | – 5 | 9 | 8 | 15 | – 6 | 69 | – 26 |
| Topoľčany | 572 | – 7 | 15 | 9 | 33 | – 5 | 146 | 8 |
| Zlaté Moravce | 360 | 34 | 5 | – 6 | 11 | – 8 | 77 | – 16 |

V stĺpci *Počet DN – r. 2004* je uvedený počet dopravných nehôd v jednotlivých okresoch v roku 2004. Vo vedľajšom stĺpci označenom +/– je tento údaj porovnaný s údajom z roku 2003. Napr. v okrese Levice sa v roku 2004 stalo 871 dopravných nehôd. Bolo to o 9 nehôd viac ako v roku 2003.

Na základe tabuľky odpovedzte na nasledujúce otázky.

**Úloha 1:** Koľko ľudských životov vyhaslo v roku 2004 v dôsledku dopravnej nehody v nitrianskom <u>okrese</u>?

Odpoveď: ..........................................................................................................................

**Úloha 2:** Koľko ľudských životov vyhaslo v roku 2003 v dôsledku dopravnej nehody v komárňanskom okrese?

Odpoveď: ..........................................................................................................................

**Úloha 3:** V ktorom okrese Nitrianskeho kraja bolo najmenej dopravných nehôd v roku 2004?

Odpoveď: Najmenej dopravných nehôd v roku 2004 bolo v okrese ................................................ .

**Úloha 4:** V ktorom okrese Nitrianskeho kraja bolo najviac usmrtených v roku 2003?

Odpoveď: Najviac usmrtených v roku 2003 bolo v okrese ............................................................ .

**Úloha 5:** Koľko ľudí sa zranilo ťažko v roku 2004 na cestách Nitrianskeho <u>kraja</u>?

Odpoveď: V Nitrianskom kraji sa ťažko zranilo ........................ ľudí.

**Úloha 6:** Koľko ľudí sa zranilo ľahko v roku 2003 na cestách Nitrianskeho kraja?

Odpoveď: V Nitrianskom kraji sa ľahko zranilo ........................ ľudí.

Novinári sa s tabuľkou dopravnej nehodovosti oboznámili na tlačovej konferencii. Pozrime sa teraz, čo napísali vo svojich reportážach. O každom z nasledujúcich tvrdení rozhodnite, či jednoznačne vyplýva z uvedenej tabuľky. Správnu odpoveď zakrúžkujte a svoj názor zdôvodnite.

**Tvrdenie č. 1:** „V Nitrianskom kraji prislúcha smutné prvenstvo topoľčianskemu okresu. V rokoch 2003-2004 v ňom bolo pri dopravných nehodách usmrtených viac ľudí než v ktoromkoľvek inom okrese tohto kraja."

Odpoveď: vyplýva nevyplýva

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

**Tvrdenie č. 2:** „V levickom okrese stúpol v roku 2004 počet usmrtených pri dopravných nehodách oproti roku 2003 až o 225 %."

Odpoveď: vyplýva nevyplýva

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

**Tvrdenie č. 3:** „V topoľčianskom okrese stúpol v roku 2004 počet usmrtených pri dopravných nehodách oproti roku 2003 až 2,5-krát."

Odpoveď: vyplýva nevyplýva

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

**Tvrdenie č. 4:** „V porovnaní s rokom 2003 klesol v roku 2004 v Nitrianskom kraji počet usmrtených pri dopravných nehodách.“

Odpoveď: vyplýva nevyplýva

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

**Tvrdenie č. 5:** „V okrese Komárno bolo v roku 2004 až 13 nehôd so smrteľnými následkami.“

Odpoveď: vyplýva nevyplýva

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

## Energia vetra

Každý elektrospotrebič potrebuje na svoju činnosť elektrickú energiu. Koľko jej spotrebuje, to závisí od jeho výkonu. Ten sa udáva vo wattoch – skratka je W.

Ak výkon vynásobíme časom, počas ktorého bol spotrebič zapnutý, dostaneme spotrebu energie. Napríklad žiarovka „stovka“ (teda s výkonom 100 W), ktorá svieti nepretržite 2,5 hodiny, spotrebuje $100 \cdot 2{,}5 = 250$ Wh (watthodín) elektrickej energie.

1 000 watthodín je 1 kilowatthodina, tá má skratku kWh. Túto skratku môžete nájsť napríklad na elektrických hodinách, ktoré u vás doma merajú, koľko elektrickej energie spotrebovali vaše elektrospotrebiče za určité obdobie.

**Úloha 1:** Výkon elektrického sporáka je 1 500 W. Koláč v ňom treba piecť asi 40 minút. Koľko elektrickej energie sa pri tom spotrebuje? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..............................................................................................................................

Výkon (teda počet wattov) sa nepoužíva len pri výpočte spotreby energie. Aj zariadenia vyrábajúce elektrickú energiu majú svoj výkon. Ak tento výkon vynásobíme časom, dostaneme množstvo vyrobenej elektrickej energie.

**Úloha 2:** Malá veterná elektráreň bola v činnosti 6 hodín. Z toho 3,5 hodiny pracovala s výkonom 95 W, po zvyšný čas s výkonom 85 W. Koľko elektrickej energie vyrobila? Nezabudnite uviesť jednotky. Svoj výpočet zapíšte.

Výpočet:

Odpoveď: Elektráreň vyrobila ........................... elektrickej energie.

Veterná elektráreň využíva energiu vetra. Ten roztáča vrtule turbíny. Otáčaním sa v elektrickom generátore vyrába elektrický prúd.

Výkon veternej elektrárne závisí

- od rýchlosti vetra: čím väčšia je rýchlosť vetra, tým väčší je aj výkon elektrárne,
- od plochy kruhu, ktorý opisujú vrtule turbíny pri svojom otáčaní: čím väčšiu plochu zasiahnu otáčajúce sa vrtule, tým väčší je výkon veternej elektrárne.


Na približný výpočet výkonu veternej elektrárne možno použiť vzorec

$$P = 0{,}2 \cdot v^3 \cdot D^2 ,$$

kde

- *P* je výkon veternej elektrárne (vo wattoch),
- *v* je rýchlosť vetra (v metroch za sekundu),
- *D* je priemer veternej turbíny (v metroch), presnejšie povedané *D* je priemer kruhu, ktorý opisujú otáčajúce sa vrtule turbíny.

**Úloha 3:** Aký výkon má veterná elektráreň, ktorej turbína má priemer 65 m, pri vetre rýchlosti 5 m/s? Výsledok zaokrúhlite na celé kilowatty (kW).

Odpoveď: .............................. kW

**Úloha 4:** Pri akej rýchlosti vetra dosiahne veterná elektráreň z predchádzajúcej úlohy výkon 1 megawatt (t.j. milión wattov, skratka MW)? Výsledok zaokrúhlite na celé čísla. Svoj výpočet zapíšte.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Pri rýchlosti ........................... m/s.

**Úloha 5:** O koľko percent sa zväčší výkon veternej elektrárne, ak sa rýchlosť vetra zväčší o 20 %? Výsledok zaokrúhlite na celé čísla. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

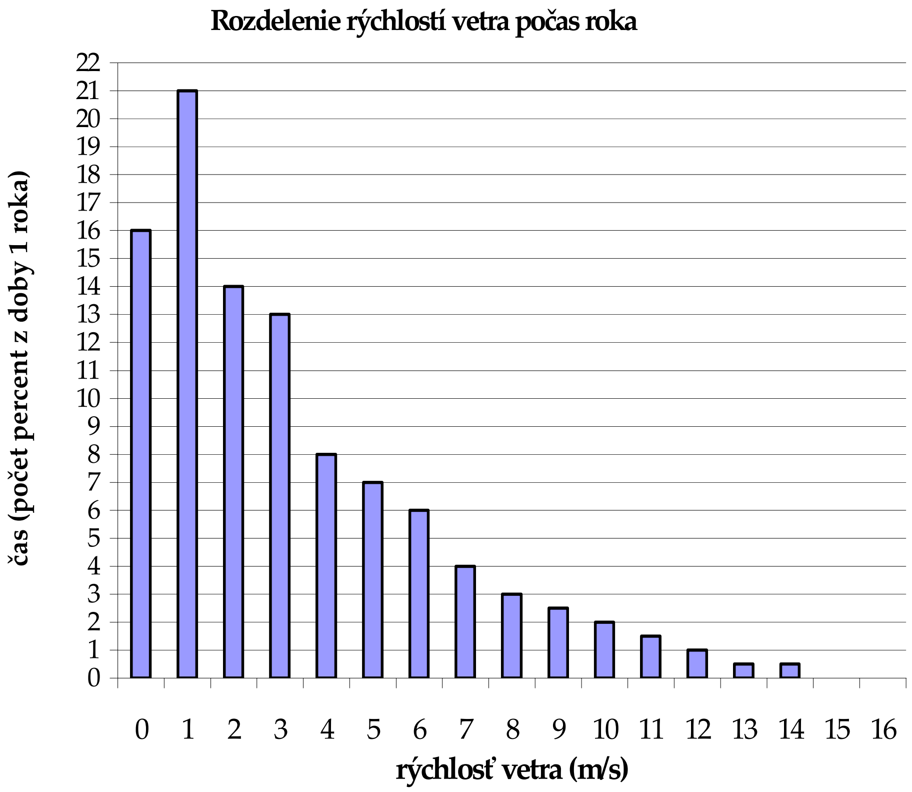
Odpoveď: Približne o ....................... %.

Pred vybudovaním veternej elektrárne treba odhadnúť, koľko elektrickej energie ročne by mohla na danom mieste veterná elektráreň vyrobiť. Treba preto zistiť, s koľkými hodinami vetra a s akou rýchlosťou vetra možno počas roka rátať.

V grafe na nasledujúcej strane sú tieto údaje zaznamenané pre lokalitu, v ktorej plánujú vybudovať veternú elektráreň.

Pozrime sa najprv, čo z grafu vieme vyčítať. Napr. nad hodnotou 5 je stĺpec s výškou 7. To znamená, že vietor s rýchlosťou 5 m/s na danom mieste vanie po 7 % z celkovej dĺžky roka. Rok má $365 \cdot 24 = 8\,760$ hodín, teda vietor s rýchlosťou 5 m/s je na tomto mieste po dobu

$$0{,}07 \cdot 8\,760 = 613{,}2 \approx 613 \text{ hodín.}$$




**Úloha 6:** V tejto lokalite chcú vybudovať veternú elektráreň, ktorej turbína má priemer 50 m. Elektráreň dokáže využiť len vietor, ktorý má rýchlosť aspoň 3 m/s.

Na základe grafu rozdelenia rýchlostí vetra vypočítajte, koľko elektrickej energie by táto elektráreň mohla vyrobiť za rok. Výsledok zaokrúhlite na celé MWh (megawatthodiny).

Odpoveď: Približne .......................... MWh.

Ďalším dôležitým údajom pri vybudovaní veternej elektrárne je návratnosť investícií. Najjednoduchší postup je zistiť, koľko rokov potrvá, kým cena elektrickej energie vyrobenej veternou elektrárňou pokryje náklady na jej výstavbu (pri tomto veľmi hrubom odhade sa náklady na prevádzku elektrárne zanedbávajú).

**Úloha 7:** Náklady na vybudovanie veternej elektrárne v uvedenej lokalite sa odhadujú na 35 miliónov Sk. Výkupná cena elektrickej energie sa odhaduje na 2,65 Sk/kWh.

Odhadnite na základe týchto údajov dobu návratnosti investícií na vybudovanie veternej elektrárne. Zapíšte svoj výpočet. Výsledok zaokrúhlite na celé roky.

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................................................

## FIRMA KOCKA

Na hracích kockách je na jednotlivých stenách 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6 bodiek. Súčet počtu bodiek na protiľahlých stenách kocky je vždy 7. Teda na jednej dvojici protiľahlých stien sú počty bodiek 1 a 6, na druhej 2 a 5 a na tretej 3 a 4.

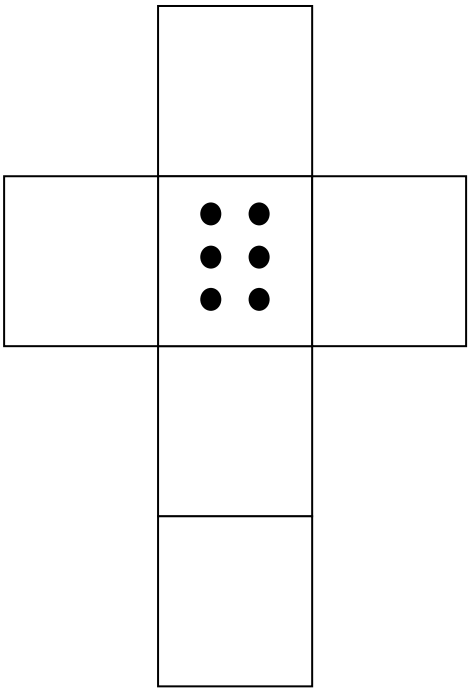
Firma KOCKA sa rozhodla vyrábať neštandardné hracie kocky. Na jednotlivých stenách síce bude 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6 bodiek, ale nebude už platiť, že súčet na protiľahlých stenách je vždy 7.

Prvý model nových kociek nazvali CASINO. Na týchto kockách bol súčet počtu bodiek na jednej dvojici protiľahlých stien 5 a na druhej dvojici protiľahlých stien 6.

**Úloha 1:** Aký bol súčet počtu bodiek na zvyšných dvoch protiľahlých stenách? Ak má úloha viac riešení, nájdite všetky.

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

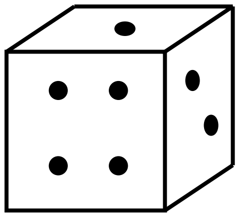
**Úloha 2:** Na obrázku je sieť kocky CASINO. Dokreslite bodky na zvyšných piatich stenách. Úloha má viac riešení, stačí však, keď nájdete jedno z nich.



Ďalší model nazvali LAS VEGAS. Na týchto kockách bol súčet počtu bodiek na jednej dvojici protiľahlých stien 8 a na druhej dvojici 6.

Kocky LAS VEGAS sa vyrábali v dvoch rôznych verziách.

**Úloha 3:** Na obrázku je jedna z verzií kocky LAS VEGAS. Koľko bodiek je na stenách tejto kocky, ktoré na obrázku nevidno?

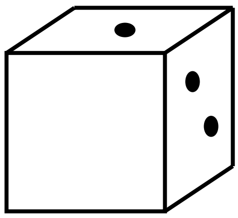


Odpoveď: Oproti stene s 1 bodkou je stena ........................................................................

Oproti stene s 2 bodkami je stena........................................................................

Oproti stene so 4 bodkami je stena ....................................................................

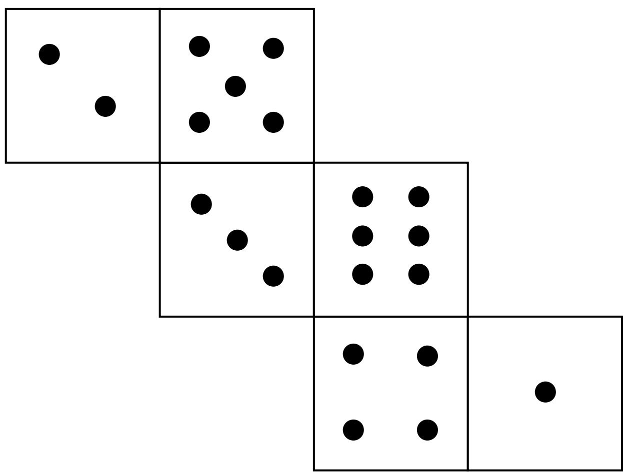
**Úloha 4:** Už sme povedali, že existovala aj druhá verzia kocky LAS VEGAS. Tá mala iný počet bodiek oproti stene s 1 bodkou aj oproti stene s 2 bodkami. Zistite tieto počty.



Odpoveď: Oproti stene s 1 bodkou je stena ........................................................................

Oproti stene s 2 bodkami je stena .......................................................................

**Úloha 5:** Tretí model sa volal REDUTA. Sieť tejto kocky je na obrázku. Aký súčet počtu bodiek na jednotlivých dvojiciach protiľahlých stien má kocka REDUTA?



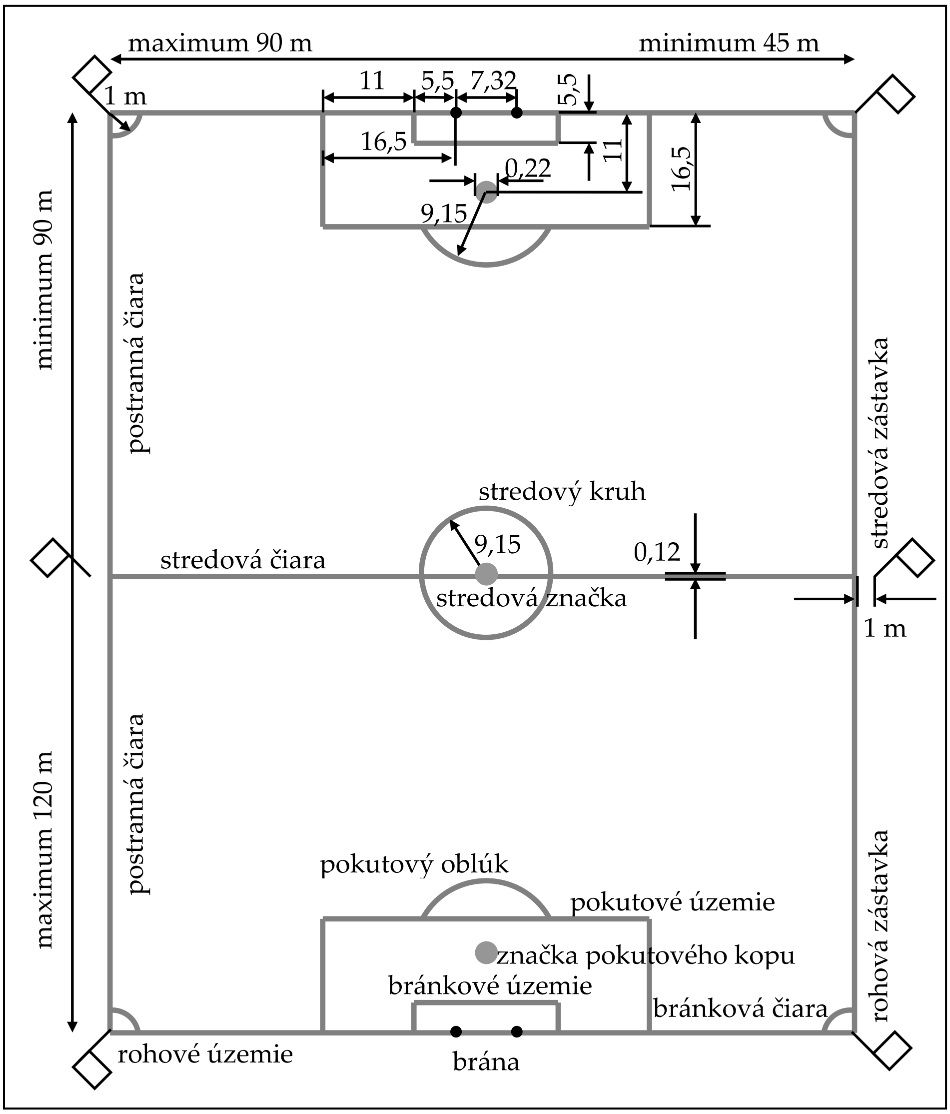
Odpoveď: Súčtami sú čísla ..........................................................................................................

## FUTBALOVÉ IHRISKO

V pravidlách futbalu, ktorými sa riadia futbalové zväzy a asociácie združené v medzinárodnej futbalovej organizácii FIFA (*Fédération Internationale de Football Association*), sú rozmery futbalového ihriska určené nasledovne:

*Hracia plocha musí mať tvar obdĺžnika. Dĺžka hracej plochy musí byť vždy väčšia ako šírka. Dĺžka hracej plochy nesmie byť väčšia ako 120 m a menšia ako 90 m; šírka nesmie byť väčšia ako 90 m a menšia ako 45 m. Medzinárodné stretnutia sa nesmú uskutočniť na hracej ploche, ktorej dĺžka je väčšia ako 110 m a menšia ako 100 m; šírka nesmie byť väčšia ako 75 m a menšia ako 64 m.*

HRACIA PLOCHA (rozmery sú v metroch)




**Úloha 1:** Peter a Viera sa hádajú o tom, či stredová zástavka je alebo nie je v hracej ploche. Aká je správna odpoveď?

Odpoveď: Stredová zástavka .................... v hracej ploche.

**Úloha 2:** V akej vzdialenosti od bránkového územia je umiestnená lopta pri pokutovom kope?

Odpoveď: Lopta na značke pokutového kopu je vo vzdialenosti ..................... m od bránkového územia.

**Úloha 3:** Bránkové územie má tvar obdĺžnika. Aké rozmery má tento obdĺžnik?

Odpoveď: Dlhšia strana = ......................... m,

kratšia strana = ........................ m.

**Úloha 4:** Môže sa na ihrisku s dĺžkou hracej plochy 115 m a šírkou hracej plochy 65 m hrať futbalové stretnutie Slovensko – Česko? Zakrúžkujte správnu z dvojice možností *áno – nie* a svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: áno nie

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |

**Úloha 5:** Môže mať hracia plocha zodpovedajúca pravidlám futbalu plochu 48 árov? Zakrúžkujte správnu z dvojice možností *áno – nie* a svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: áno nie

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |

**Úloha 6:** Môže mať hracia plocha pre medzinárodné stretnutia zodpovedajúca pravidlám futbalu plochu 110 árov? Zakrúžkujte správnu z dvojice možností *áno – nie* a svoju odpoveď zdôvodnite.

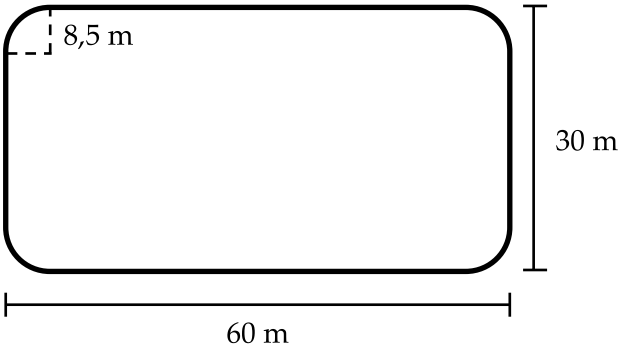
Odpoveď: áno nie

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |

**Úloha 7:** V mierke 1 : 500 narysujte hraciu plochu ihriska najmenších možných rozmerov, zodpovedajúceho pravidlám futbalu.

## HOKEJOVÝ ŠTADIÓN

V mestečku Jazvecovo majú hokejový štadión. Jeho rozmery môžete vyčítať z obrázka.




**Úloha 1:** Akú plochu v m² zaberá ľadová plocha tohto hokejového štadióna? Počítajte s hodnotou $\pi \approx 3{,}14$. Výsledok zaokrúhlite na celé m².

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

**Úloha 2:** Koľko hektolitrov vody je potrebných na pokrytie tejto plochy ľadom, ak má ľad mať hrúbku 3 cm? Z jedného litra vody sa vytvorí 1,09 litra ľadu. Počítajte s hodnotou $\pi \approx 3{,}14$. Výsledok zaokrúhlite na celé hektolitre nahor.

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

**Úloha 3:** Okolo ihriska je mantinel vysoký 1,2 m, ktorý treba dvakrát natrieť bielou základnou farbou. V spodnej časti mantinelu je pripevnená 20 cm vysoká odrazová lišta, ktorá sa základnou farbou nenatiera. Jeden kilogram farby vystačí na 6 m². Koľko kilogramových plechoviek bielej základnej farby budeme potrebovať na natretie mantinelu? Počítajte s hodnotou $\pi \approx 3{,}14$.

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

## HOLUBICA WINKIE

Počas druhej svetovej vojny, v marci 1942 sa na stránky britských novín dostal príbeh holubice Winkie.

*Statočná holubica zachránila životy štyroch letcov*

*Winkie, húževnatá poštová holubica, nasiaknutá olejom a premočená ľadovým Severným morom, preletela 120 míľ k svojmu domovu a zachránila tak život štyroch členov posádky britského bombardéra, ktorý havaroval pri návrate z hliadky nad Nórskom.*

*Pri dopade lietadla na vodu sa rozbila klietka, v ktorej bola Winkie. Kým sa posádka nalodila do záchranného člna, Winkie vyrazila k domovu.*

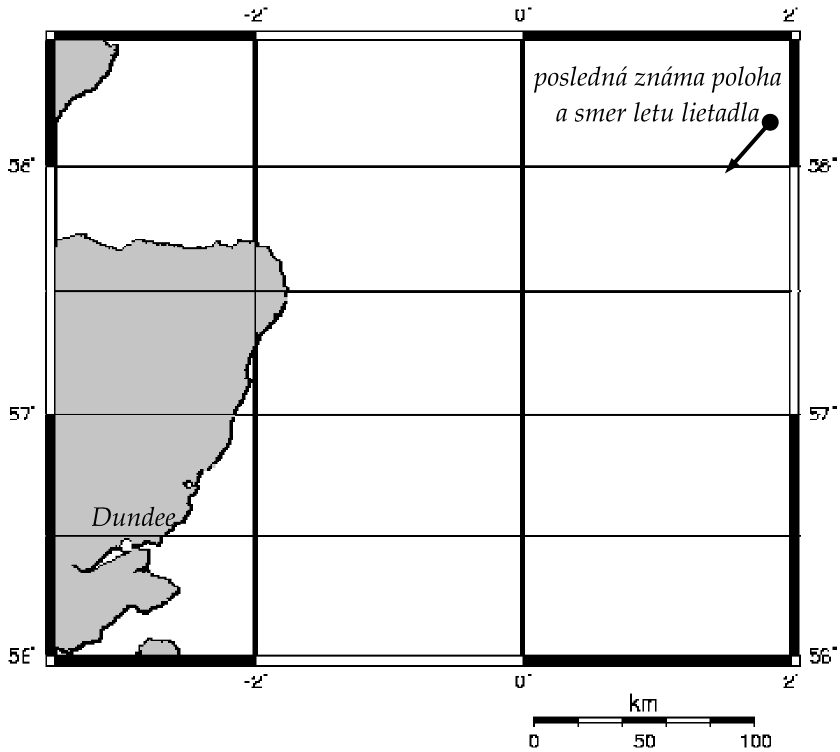
*Holubár James Ross z Dundee oznámil úradom, že Winkie sa vrátila. Zo stavu jej zaolejovaného a premočeného peria dokázal odhadnúť, ako dlho letela a koľko míľ urazila. To spolu s informáciou o poslednej známej polohe lietadla umožnilo pátracej čate objaviť havarované lietadlo a zachrániť posádku.*

Winkie bola v roku 1943 vyznamenaná medailou Marie Dickinovej. Je to obdoba najvyššieho britského vojenského vyznamenania – Viktoriinho kríža.

**Úloha 1:** a) Navrhnite, ako určiť miesto, kde lietadlo havarovalo, ak poznáte poslednú hlásenú polohu a smer letu lietadla a vzdialenosť, ktorú preletela Winkie.

b) Na základe vášho návrhu vyznačte na mape miesto, kde lietadlo havarovalo. Vzdialenosť medzi rovnobežkami zobrazujúcimi 56° a 57° zemepisnej šírky je 60 námorných míľ.

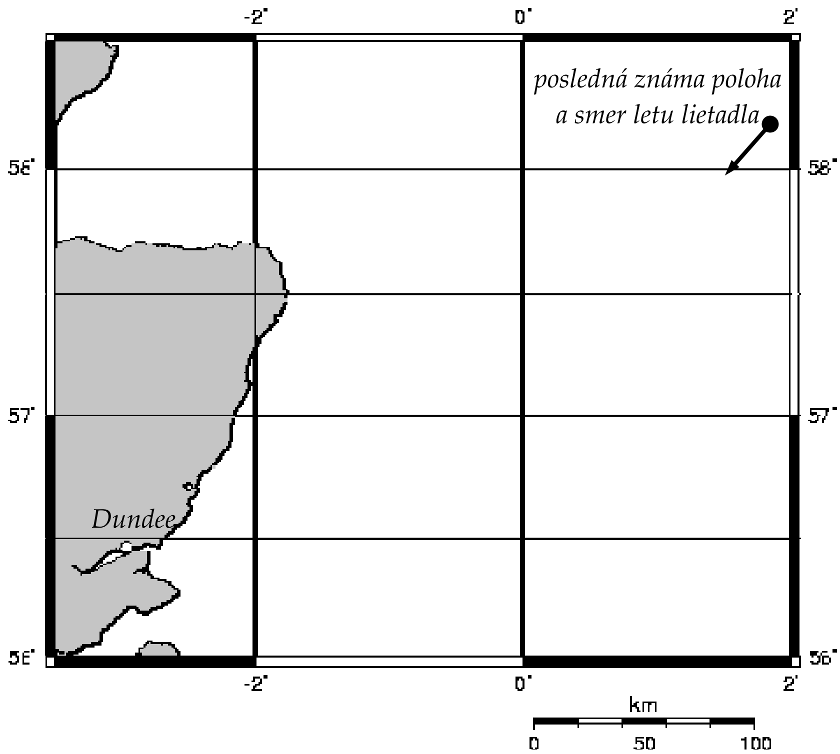
| Návrh, ako určiť miesto, kde lietadlo havarovalo: |
| --- |
| |
| |
| |
| |
| |




Pri riešení úlohy 1 sme predpokladali, že Winkie preletela presne 120 míľ. V skutočnosti túto vzdialenosť nevieme určiť úplne presne. Vieme ju iba odhadnúť.

Predpokladajme, že vzdialenosť, ktorú preletela Winkie, dokázal holubár odhadnúť s presnosťou na 10 míľ. To znamená, že Winkie preletela 120 ± 10 míľ, teda od 110 do 130 míľ.

**Úloha 2:** Vyznačte na mape miesto, kde havarovalo lietadlo, ak poznáte jeho poslednú hlásenú polohu a smer a viete, že vzdialenosť, ktorú preletela Winkie, je medzi 110 a 130 míľ.



Po havárii sa posádka lietadla nalodila do záchranného člna. Kým dorazila pátracia čata, mohol sa čln od miesta havárie vzdialiť. Predpokladajme, že za čas medzi haváriou a príletom pátracej čaty čln nepreplával viac ako 10 míľ.

V nasledujúcich dvoch úlohách nás bude zaujímať, kde sa záchranný čln mohol nachádzať v čase príletu pátracej čaty. Najprv túto otázku vyriešime pre miesto havárie, ktoré sme našli v riešení úlohy 1.

**Úloha 3:** Do mapy v úlohe 1 vyznačte, kde sa mohol v čase príletu pátracej čaty nachádzať záchranný čln.

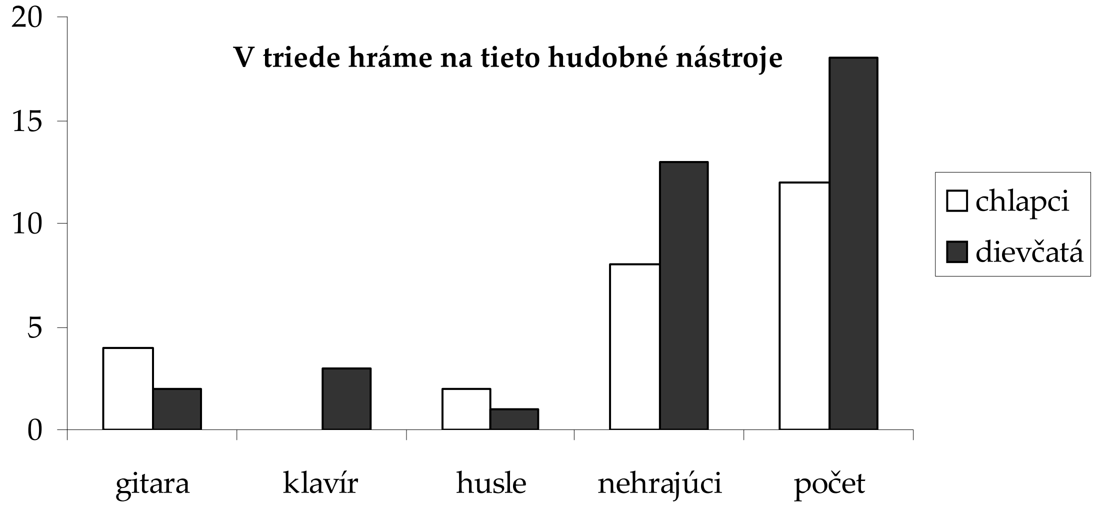
Teraz tú istú otázku budeme riešiť pre miesto havárie, ktoré sme našli v riešení úlohy 2.

**Úloha 4:** Do mapy v úlohe 2 vyznačte, kde sa mohol v čase príletu pátracej čaty nachádzať záchranný čln.


*Medaila Marie Dickinovej sa udeľuje aj v súčasnosti: 5.3.2002 ju dostali slepecké psy Roselle a Salty, ktoré vyviedli svojich pánov 11.9.2001 z budovy Svetového obchodného centra tesne pred tým, ako sa po útoku teroristov zrútila.*

## HUDOBNÉ NÁSTROJE

Na domácu úlohu mali žiaci urobiť v triede anketu o hre na hudobné nástroje. Janka od všetkých spolužiakov zistila všetky nástroje, na ktoré hrajú. Údaje znázornila stĺpcovým diagramom, ktorý vidíte na obrázku.




**Úloha 1:** Koľko je všetkých dievčat v triede? Vysvetlite, ako ste na svoj výsledok prišli.

Odpoveď: V triede je .............................. dievčat.

Vysvetlenie:

**Úloha 2:** Koľko chlapcov z triedy hrá na hudobný nástroj? Svoju odpoveď vysvetlite.

Odpoveď: ..........................................................................................................................

Vysvetlenie:

Darina s Kamilou navzájom porovnávali výsledok úlohy 2 a zistili, že ho nemajú rovnaký. Tu sú ich výpočty:

Darinin výpočet: 4 + 0 + 2 = 6,

Kamilin výpočet: 12 – 8 = 4.

**Úloha 3:** Vysvetlite, ako uvažovala pri výpočte Darina a ako Kamila. Zistite, ktorá z nich má nesprávny výsledok, a vysvetlite prečo.

Darinin postup:

Kamilin postup:

Nesprávny výsledok má ...............................................

Dôvod:

**Úloha 4:** Dá sa zistiť z diagramu, či niektorý chlapec hrá na tri hudobné nástroje? Zakrúžkujte správnu z možností *áno – nie* a svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: áno nie

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |

**Úloha 5:** Na hudobné nástroje hrá celkom 5 dievčat. Dá sa z diagramu zistiť, či niektoré z nich hrá na tri hudobné nástroje? Zakrúžkujte správnu z možností *áno – nie* a svoju odpoveď vysvetlite.

Odpoveď: áno nie

| Vysvetlenie: |
|---|
| |
| |

Spolužiaci v triede sa dohodli, že vytvoria hudobné skupiny. Dohadovali sa, kto s kým bude hrať.

**Úloha 6:** Najviac koľkými spôsobmi sa môže v tejto triede vytvoriť dvojčlenná gitarová skupina? Zapíšte svoje riešenie.

| Riešenie: |
|---|

Odpoveď: Dvojčlenná gitarová skupina sa dá vytvoriť ................................................ spôsobmi.

**Úloha 7:** Najviac koľkými spôsobmi sa môže v tejto triede vytvoriť trojčlenná dievčenská skupina s rôznymi hudobnými nástrojmi? Zapíšte svoje riešenie.

| Riešenie: |
|---|

Odpoveď: ................................................................................................................................

## HUSTOTA OBYVATEĽSTVA

*Hustota obyvateľstva* udáva priemerný počet obyvateľov na 1 km² daného územia. Napríklad Bratislava má rozlohu 368 km² a v roku 2006 tu žilo 426 091 obyvateľov (k 31.12. 2006). To znamená, že na jednom kilometri štvorcovom žilo priemerne

$$\frac{426\,091}{368} = 1\,157{,}85... \approx 1\,158 \text{ obyvateľov.}$$

Teda v roku 2006 bola hustota obyvateľstva Bratislavy približne 1 158 obyvateľov na km².

Visegrádska skupina alebo Visegrádska štvorka, skrátene V4, je spoločenstvo štyroch stredoeurópskych štátov: Česka, Maďarska, Poľska a Slovenska.

V nasledujúcej tabuľke je uvedená rozloha jednotlivých štátov V4 a počet ich obyvateľov v roku 2007 zaokrúhlený na tisícky.

| Krajina | Počet obyvateľov | Rozloha [km²] |
|---|---|---|
| Slovensko | 5 448 000 | 49 035 |
| Česko | 10 381 000 | 78 866 |
| Maďarsko | 10 053 000 | 93 030 |
| Poľsko | 38 518 000 | 312 685 |

**Úloha 1:** Aká bola v roku 2007 hustota obyvateľstva na Slovensku a aká v Česku?

Odpoveď: V roku 2007 bola hustota obyvateľstva na Slovensku približne .................................. obyvateľov na km², v Česku približne .............................. obyvateľov na km².

**Úloha 2:** Aká bola v roku 2007 celková hustota obyvateľstva skupiny V4? (V tejto úlohe chápeme územie krajín V4 ako jeden územný celok.) Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Približne ............................ obyv./km².

**Úloha 3:** Peter chcel vypočítať, aká by bola v roku 2007 hustota obyvateľstva v „Česko-Slovensku“. Sčítal hustoty vypočítané v riešení úlohy 1 a súčet vydelil dvoma. Je tento postup správny? Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite ju.

Odpoveď: Petrov postup je správny –– nesprávny.

Zdôvodnenie:

**Úloha 4:** O koľko percent sa zvýši hustota obyvateľstva krajiny, ak sa počet jej obyvateľov zvýši o 7 %? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|

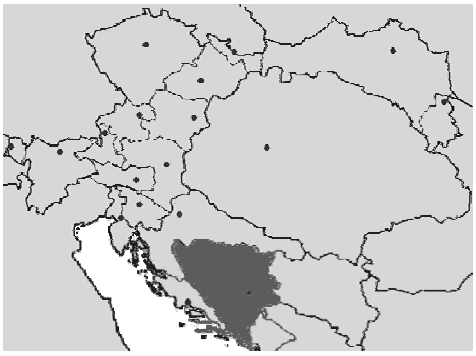
Odpoveď: Hustota obyvateľstva sa zvýši o ........................................................................ %.

**Úloha 5:** Pri výpočte hustoty obyvateľstva Nórska sa niekedy do celkovej rozlohy krajiny nezapočítavajú prakticky ľudoprázdne Špicbergy a ostrov Jan Mayen. Zarátaním ich plochy by sa rozloha Nórska zväčšila o 19 %. O koľko percent by sa tým zmenšila jeho hustota obyvateľstva? Výsledok zaokrúhlite na celé percentá. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|

Odpoveď: Hustota obyvateľstva by sa zmenšila približne o ....................................................... %.

**Úloha 6:** V roku 1908 rakúsko-uhorská monarchia pripojila k svojmu územiu Bosnu a Hercegovinu. Územie ríše sa tým zväčšilo o 8 % a počet obyvateľov o 4 %.



a) Rozhodnite, či sa pripojením zväčšila alebo zmenšila celková hustota obyvateľstva.

b) Vypočítajte, o koľko percent sa celková hustota zmenila. Výsledok zaokrúhlite na celé percentá. Zapíšte svoj výpočet.

Odpoveď: Celková hustota obyvateľstva sa zmenšila – zväčšila približne o ............................ %.

| Výpočet: |
|---|

## CHRÍPKOVÉ PRÁZDNINY

„Chrípkové“ prázdniny vyhlasuje riaditeľ školy (po porade s regionálnym úradom verejného zdravotníctva), ak chýba aspoň tri bezprostredne po sebe nasledujúce dni aspoň 30 % žiakov.

V tabuľke sú uvedené údaje o počte chýbajúcich žiakov v každej z ôsmich tried jedného osemročného gymnázia.

| **Trieda*** | **Pondelok** | **Utorok** | **Streda** | **Štvrtok** | **Piatok** |
|---|---|---|---|---|---|
| Príma (30) | 10 | 11 | 12 | | |
| Sekunda (30) | 14 | 14 | 12 | | |
| Tercia (29) | 8 | 6 | 7 | | |
| Kvarta (31) | 4 | 7 | 9 | | |
| Kvinta (28) | 12 | 13 | 11 | | |
| Sexta (29) | 11 | 10 | 9 | | |
| Septima (31) | 8 | 8 | 8 | | |
| Oktáva (31) | 4 | 5 | 5 | | |

** V zátvorke za názvom triedy je uvedený celkový počet žiakov v triede.*

**Úloha 1:** Ak riaditeľ školy dodrží podmienky vyhlasovania „chrípkových“ prázdnin, môže ich vyhlásiť od štvrtka? Zakrúžkujte správnu z možností *áno – nie* a zdôvodnite ju.

Odpoveď: áno nie

Zdôvodnenie:

**Úloha 2:** Mohol by riaditeľ školy vyhlásiť od štvrtka „chrípkové“ prázdniny, ak by v kvinte nechýbalo 11 žiakov, ale 12? Zakrúžkujte správnu z možností *áno – nie* a zdôvodnite ju.

Odpoveď: áno nie

Zdôvodnenie:

**Úloha 3:** Od piatku už „chrípkové“ prázdniny boli. Doplňte do tabuľky pred úlohou 1 údaje o počte chýbajúcich žiakov v jednotlivých triedach vo štvrtok.

## KALENDÁR

Kalendár, ktorý používame, sa nazýva *gregoriánsky*. Sú v ňom dva typy rokov: *priestupné* (tie majú 366 dní) a *nepriestupné* (tie majú 365 dní). Z rokov, ktoré končia dvomi nulami (napr. 1900, 2000, …), sú priestupné len tie, ktoré sú deliteľné 400. Z ostatných rokov sú priestupné tie, ktoré sú deliteľné 4.

**Úloha 1:** Zakrúžkujte priestupné roky:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1895 | 1896 | 1897 | 1898 | 1899 | 1900 | 1901 | 1902 | 1903 | 1904 |
| 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |

**Úloha 2:** V roku 1987 pripadol 1. január na štvrtok. Na aký deň pripadol 1. január v rokoch 1988, 1989? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Zdôvodnenie:

Odpoveď: 1. január pripadol v roku 1988 na ...................... , v roku 1989 na ........................ .

**Úloha 3:** Kedy prvýkrát po roku 1987 pripadol 1. január opäť na štvrtok? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Zdôvodnenie:

Odpoveď: Prvýkrát to bolo v roku ...................................... .

**Úloha 4:** Pán Jozef našiel v roku 2004 starý nepoužitý kalendár z roku 1989. Keďže je veľmi sporivý, rozhodol sa, že kalendár nezahodí a počká si na rok, v ktorom 1. január pripadne na rovnaký deň ako v roku 1989. V ktorom roku najskôr bude môcť pán Jozef nájdený kalendár použiť? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Zdôvodnenie:

Odpoveď: V roku ..................................................................... .

**Úloha 5:** Riešte tú istú úlohu pre starý kalendár z roku

a) 1990 b) 1988.

Svoje odpovede zdôvodnite.

Zdôvodnenie:

Odpoveď: Kalendár z roku 1990 možno prvýkrát znova použiť v roku ........................................ .

Kalendár z roku 1988 možno prvýkrát znova použiť v roku ........................................ .

Dorotka sa rozhodla urobiť si vo veci jasno. Preto si vyrobila tabuľku: číslo v jej poslednom riadku určuje, o koľko dní v týždni sa posunie 1. január voči predchádzajúcemu roku.

| priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | po priestupnom | | | | po priestupnom | | | | po priestupnom | | | | po priestupnom | | |
| | +2 | +1 | +1 | +1 | +2 | +1 | +1 | +1 | +2 | +1 | +1 | +1 | +2 | +1 | +1 |

Z tejto pomôcky Dorotka vyčítala napríklad toto (pozri tučne vytlačené čísla v nasledujúcej tabuľke):

**6** rokov

| priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | po priestupnom | | | | po priestupnom | | | | po priestupnom | | | | po priestupnom | | |
| | +2 | **+1** | **+1** | **+1** | **+2** | **+1** | **+1** | +1 | +2 | +1 | +1 | +1 | +2 | +1 | +1 |

**+7** dní

Ak mám starý kalendár z roku, ktorý je **prvý po priestupnom**, tak ho prvýkrát môžem znova použiť o 6 rokov.

**Úloha 6:** Doplňte nasledujúce vety:

Starý kalendár z roku, ktorý je **druhý po priestupnom**, možno prvýkrát znova použiť o ........................ rokov.

Starý kalendár z roku, ktorý je **tretí po priestupnom**, možno prvýkrát znova použiť o ..................................... rokov.

**Úloha 7:** Nájdite všetky roky medzi rokmi 1994 a 2050, v ktorých možno znovu použiť starý kalendár z roku 1993. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: ...................................................................................................................................

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |
| |
| |

**Úloha 8:** Doplňte nasledujúcu vetu:

Bez ohľadu na to, z ktorého roku je starý kalendár, opätovne ho možno použiť o .... rokov.

Svoju odpoveď zdôvodnite.

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |
| |
| |
| |

**Úloha 9:** Pani Jolana je ešte oveľa sporivejšia ako pán Jozef z úlohy 4. Rozhodla sa vystačiť s minimálnym počtom kalendárov, ktoré bude opakovane používať. Koľko kalendárov potrebuje pani Jolana? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: .................................... kalendárov

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |
| |

## KARÁTY

Rýdze zlato sa zväčša zmiešava s inými kovmi, napr. striebrom alebo meďou. *Karát* označuje 1/24 celkovej hmotnosti zliatiny. Napríklad v 14-karátovom zlate tvorí 14/24 hmotnosti zliatiny rýdze zlato a 10/24 hmotnosti sú prímesi. Inak povedané: 14 hmotnostných dielov je rýdze zlato, zvyšných 10 dielov sú prímesi.

**Úloha 1:** Koľko rýdzeho zlata obsahuje 7-gramový prsteň vyrobený zo 14-karátového zlata? Zapíšte svoj výpočet. Výsledok uveďte zaokrúhlený na desatiny gramu.

Výpočet:

Odpoveď: ..................................................................................................................................

Oficiálne sa rýdzosť zlata vyjadruje ako desatinné číslo s presnosťou na tri desatinné miesta, t.j. v tisícinách. Napr. tzv. *mincové* zlato má rýdzosť 0,900 (teda 900 tisícin). V takomto zlate $\frac{900}{1\,000}$ z celkovej hmotnosti tvorí rýdze zlato. Zvyšok, t.j. $\frac{100}{1\,000}$ celkovej hmotnosti, sú prímesi.

**Úloha 2:** Vyjadrite v tisícinách rýdzosť 22-karátového zlata.

Odpoveď: ..................................................................................................................................

**Úloha 3:** Koľko gramov medi musíme pridať k 1 000 g rýdzeho zlata, aby vzniklo 14-karátové zlato? Zapíšte svoj výpočet. Výsledok zaokrúhlite na celé gramy.

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................

**Úloha 4:** Na obrázku je tehlička rýdzeho zlata s hmotnosťou 1 000 g. Zlato akej rýdzosti by sme dostali, keby sme túto tehličku zliali s rovnako veľkou tehličkou medi? Rýdzosť uveďte v tisícinách. Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Vzniklo by zlato rýdzosti .............................. .

Pre jemnejšie určenie rýdzosti sa kedysi 1 karát delil na 12 *grénov*.

**Úloha 5:** Prepočítajte na karáty a grény rýdzosť 0,986. Zapíšte svoj výpočet (počet karátov aj počet grénov musia byť celé čísla).

Výpočet:

Odpoveď: ................. karátov a ................ grénov

Zlato s rýdzosťou 0,986 sa nazýva *dukátové*. V minulosti sa z takého zlata skutočne razili dukáty. Dukát mal hmotnosť 3,49 g. Zvlášť cenené boli kremnické dukáty. Tie sa až do roku 1765 razili zo zlata s rýdzosťou 23 karátov a 9 grénov.

*kremnický dukát,* 1696

Leopold I., 3,49 g, 23 karátov 9 grénov

**Úloha 6:** a) Na výrobu koľkých „obyčajných“ dukátov (s rýdzosťou 23⅔ karátu) stačí 1 kg rýdzeho zlata?

b) Koľko kremnických dukátov možno vyrobiť z tohto množstva rýdzeho zlata?

Zapíšte svoje výpočty.

Výpočet:

Odpoveď: Z 1 kg rýdzeho zlata možno vyrobiť ............... obyčajných dukátov.

Z 1 kg rýdzeho zlata možno vyrobiť ............... kremnických dukátov.

**Úloha 7:** Pre určenie vzájomnej výmennej hodnoty rôznych zlatých mincí bol v minulosti podstatný obsah rýdzeho zlata v nich. Len na základe obsahu zlata navrhnite výmenný kurz kremnického dukátu voči niektorým ďalším zlatým minciam: francúzskemu louisdoru, španielskemu escudu a anglickej guinei. Uveďte s presnosťou na stotiny, koľko kremnických dukátov by ste dostali za 1 louisdor, koľko za 1 escudo a koľko za 1 guineu. Zapíšte svoj výpočet.

*louis d'or*, 1701
Francúzsko, Ľudovít XIV.
6,7 g
22-karátové zlato

8 *escudo*, 1717
španielske kolónie
27,1 g, obsahuje 24,81 g
rýdzeho zlata


*guinea*, 1702
Anglicko, kráľovná Anna
8,3 g
rýdzosť 0,913

Výpočet:

Odpoveď: 1 louisdor = ............................ kremnických dukátov

1 escudo = .............................. kremnických dukátov

1 guinea = ............................... kremnických dukátov

## KOĽKO NÁS BUDE?

Rozdiel medzi počtom živonarodených detí a zomretých osôb za určité obdobie sa označuje ako *prirodzený prírastok*. Môže byť kladný alebo záporný. V prípade, že je záporný, hovoríme o *prirodzenom úbytku* obyvateľstva. Teda namiesto „prirodzený prírastok bol –51 osôb“ môžeme povedať „prirodzený úbytok bol 51 osôb“.

V tabuľke sú uvedené počty živonarodených detí a počty zomretých osôb na Slovensku v rokoch 2001-2005.

| rok | živonarodení | zomretí |
|---|---|---|
| 2001 | 51 136 | 51 980 |
| 2002 | 50 841 | 51 532 |
| 2003 | 51 713 | 52 230 |
| 2004 | 53 747 | 51 852 |
| 2005 | 54 430 | 53 475 |

**Úloha 1:** V ktorom z rokov 2001-2005 malo Slovensko naposledy prirodzený úbytok? Napíšte rok aj hodnotu tohto prirodzeného úbytku.

Odpoveď: Zo sledovaných rokov malo Slovensko naposledy prirodzený úbytok v roku ........... .

Jeho hodnota bola ...............

**Úloha 2:** Aký bol prirodzený prírastok na Slovensku za celé sledované obdobie 2001-2005? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..............................................................................................................................

**Úloha 3:** Aký bol priemerný ročný prirodzený prírastok na Slovensku za celé sledované obdobie?

Odpoveď: ..............................................................................................................................

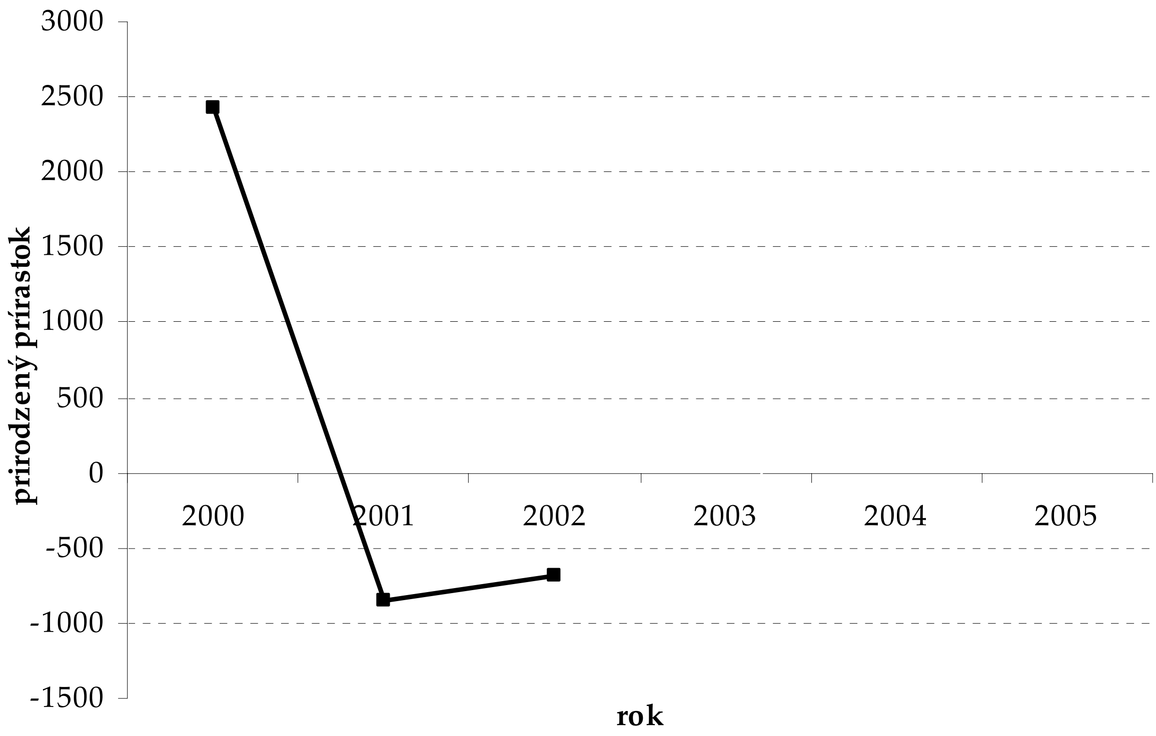
**Úloha 4:** Novinár uviedol v reportáži: „Na Slovensku pribudlo v roku 2004 spolu 1 895 obyvateľov.“

Uvažoval novinár správne, ak len na základe uvedenej tabuľky usúdil, ako sa zmenil počet obyvateľov Slovenska? Zakrúžkujte správnu odpoveď a svoje tvrdenie vysvetlite.

Odpoveď: áno nie

Vysvetlenie:

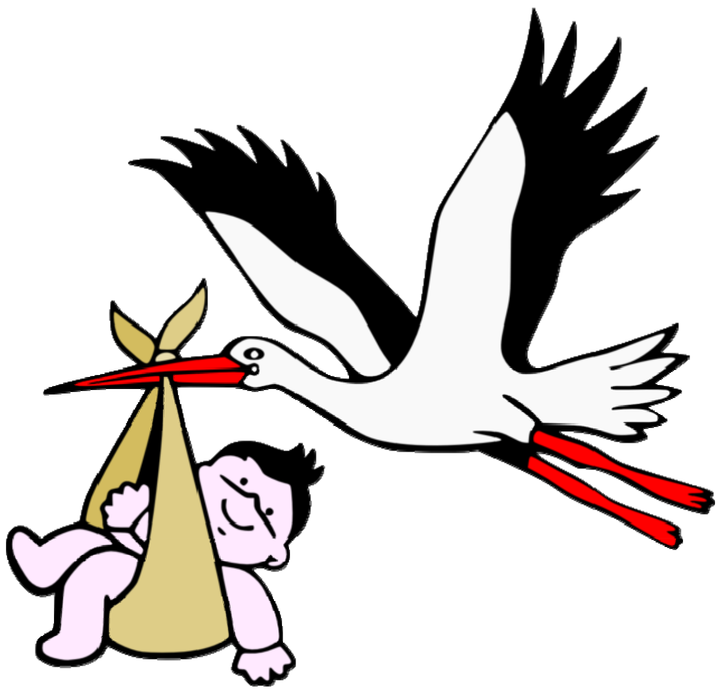
**Úloha 5:** Na základe tabuľky pred úlohou 1 čo najpresnejšie dorysujte spojnicový graf prirodzeného prírastku na Slovensku od roku 2000 do roku 2005.




**Úloha 6:** Na základe grafu v úlohe 5 odhadnite čo najpresnejšie chýbajúci údaj v nasledujúcej tabuľke.

| rok | živonarodení | zomretí |
|---|---|---|
| 2000 | 55 151 | ? |

Odpoveď: ....................



## KONTROLA V PIVÁRSKOM RAJI

Inšpektori Slovenskej obchodnej inšpekcie kontrolovali objem piva čapovaného v krčme Pivársky raj. Tu je záznam o ich prieskume – zistené objemy tzv. veľkých pív (0,5 litra) a malých pív (0,3 litra):

veľké pivá: 0,48 ; 0,48 ; 0,51 ; 0,47 ; 0,46 (údaje sú v litroch),

malé pivá: 0,28 ; 0,3 ; 0,27 ; 0,31 ; 0,27 ; 0,28 (údaje sú v litroch).

**Úloha 1:** Vypočítajte priemerný objem skúmanej vzorky veľkého piva.

Odpoveď: Priemerný objem vzorky čapovaného veľkého piva je ................... litra.

**Úloha 2:** O koľko percent malo priemerné malé pivo zo skúmanej vzorky menší objem, ako malo mať? Svoj výpočet zapíšte.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Priemerné malé pivo malo o ........................ % menší objem, ako malo mať.

**Úloha 3:** Predpokladajme, že vzorka, ktorú skúmali inšpektori obchodnej inšpekcie, bola reprezentatívna. To znamená, že výčapník predáva pivá s takýmto objemom všetkým hosťom. Koľko litrov piva takto výčapník za jeden deň ušetril, ak predal 240 veľkých a 80 malých pív? Svoj výpočet zapíšte.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Výčapník takto ušetril ..................................... piva.

**Úloha 4:** Rozhodnite, kedy sa vo väčšej miere poškodzuje zákazník: keď dostane veľké pivo s objemom 0,48 litra, alebo keď dostane malé pivo s objemom 0,28 litra. Svoju odpoveď zdôvodnite.

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |

Odpoveď: Keď dostane ....................... pivo s objemom ............. litra.

**Úloha 5:** Zistite, pri ktorom pive (malom alebo veľkom) zistila inšpekcia na základe uvedeného prieskumu v krčme Pivársky raj väčšiu mieru poškodzovania zákazníka. Svoju odpoveď zdôvodnite.

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |

Odpoveď: Väčšia miera poškodzovania bola pri ............................................... pive.

## KRVNÉ SKUPINY

Približne 42 % populácie na Slovensku má krvnú skupinu A. Krvnú skupinu 0 (nula) má približne 38 % populácie, krvnú skupinu B približne 13 % a krvnú skupinu AB približne 7 % obyvateľov Slovenska. Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný obyvateľ Slovenska je Rh pozitívny (značíme Rh+), je asi 0,85. Pravdepodobnosť, že je Rh negatívny (značíme Rh–) je asi 0,15. Tento takzvaný *Rh faktor* je nezávislý od krvnej skupiny a od pohlavia.

**Úloha 1:** S akou pravdepodobnosťou bude mať náhodne vybraný obyvateľ Slovenska krvnú skupinu B?

Odpoveď: Náhodne vybraný obyvateľ Slovenska bude mať krvnú skupinu B s pravdepodobnosťou ..................... .

**Úloha 2:** Koľko percent obyvateľov Slovenska je Rh negatívnych?

Odpoveď: ........................ %

**Úloha 3:** Spomedzi všetkých obyvateľov Slovenska s krvnou skupinou AB sme jedného náhodne vybrali. S akou pravdepodobnosťou má pozitívny Rh faktor?

Odpoveď: S pravdepodobnosťou ..............................

**Úloha 4:** Koľko percent obyvateľov Slovenska je Rh negatívnych a súčasne majú krvnú skupinu A? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
| --- |
| |

Odpoveď: ........................ %

**Úloha 5:** Ktorá z uvedených kombinácií krvných skupín a Rh faktorov je na Slovensku najvzácnejšia? Zakrúžkujte správnu odpoveď.

a) A Rh–, b) B Rh+,

c) 0 Rh–, d) AB Rh+.

**Úloha 6:** Peter tvrdí, že percentá uvedené v úvodnom texte nemôžu byť správne. Argumentuje takto: „V našej triede je nás 32. Lekárka po preventívnej prehliadke povedala, že presne ôsmi majú krvnú skupinu AB. To je až 25 % a nie 7 %, ako sa tvrdí v štatistike. Teda štatistika je nepravdivá."

Rozhodnite, či má Peter pravdu. Vyberte správnu z dvojice možností *má – nemá* pravdu a svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: Peter má – nemá pravdu.

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |

Pre bábätko môže byť nebezpečné, ak má jeho mama faktor Rh– a otec faktor Rh+. V minulosti bola takáto kombinácia nebezpečná: znamenala vysoké riziko úmrtia dieťaťa. Dnes si už vieme s touto (kedysi neriešiteľnou) situáciou poradiť.

**Úloha 7:** O uvedenej kombinácii Rh faktorov rodičov v novinách napísali: „Touto situáciou je na Slovensku ohrozené priemerne každé 7. – 8. manželstvo.“

Je to pravda? Zakrúžkujte správnu z možností *áno – nie* a svoju odpoveď zdôvodnite. (Predpokladáme, že výber životného partnera nie je na Slovensku ovplyvnený krvnou skupinou.)

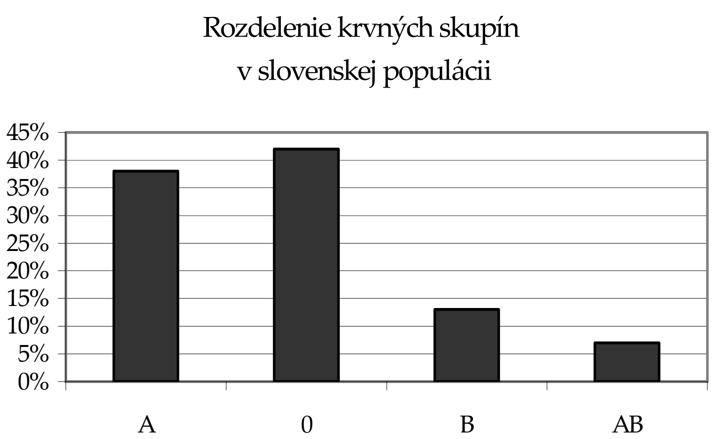
Výpočet a zdôvodnenie:

Odpoveď: áno nie

**Úloha 8:** Nasledujúci stĺpcový diagram by mal zodpovedať rozdeleniu krvných skupín v slovenskej populácii, nie je však celkom v poriadku.

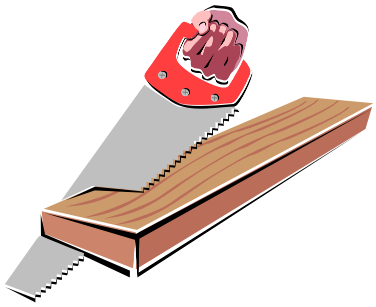
a) Priamo v obrázku ho opravte.

b) Vysvetlite, čo v ňom bolo chybné.




Vysvetlenie:

## LATY



Ak chceme rozpíliť latu na niekoľko menších kúskov, nesmieme zabudnúť, že každý rez má určitú šírku. O túto šírku sa lata pri rezaní skráti. Napríklad lata dlhá 1 meter sa nedá rozpíliť na dve laty dlhé presne 0,5 metra, lebo rez ju skráti o niekoľko milimetrov.

**Úloha 1:** Latu dlhú 319,4 cm chceme rozrezať na latky dlhé 45,5 cm. Každý rez je široký 3 mm. Najviac koľko takýchto latiek možno z pôvodnej laty odrezať? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|

Odpoveď: ..............................................................................................................................

**Úloha 2:** Z laty dlhej 208,5 cm chceme odrezať

a) 5 rovnako dlhých latiek,

b) 7 rovnako dlhých latiek.

Každý rez je široký 2 mm. Akú najväčšiu dĺžku v celých milimetroch môžu mať odrezané latky? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|

Odpoveď: a) ............................................

b) ............................................

**Úloha 3:** Latu dlhú 208,5 cm chceme rozrezať na $n$ rovnako dlhých latiek. Každý rez je široký 2 mm. Akú najväčšiu dĺžku môžu mať tieto latky? Výsledok vyjadrite pomocou $n$. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|

Odpoveď: ..............................................................................................................................

**Úloha 4:** Z dvoch lát dlhých 146,3 cm a 108 cm chceme odrezať celkom 10 rovnako dlhých latiek. Každý rez je široký 2 mm. Akú najväčšiu dĺžku v celých milimetroch môžu mať tieto latky? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|

Odpoveď: ..............................................................................................................................

**Úloha 5:** Z obdĺžnikovej dosky s rozmermi 60,5 cm × 95 cm chceme rozpiľovaním rovnobežným so stranami získať 34 rovnakých štvorcových doštičiek. Každý rez je široký 1 mm. Akú najväčšiu dĺžku strany (v celých milimetroch) môžu mať tieto doštičky?

Výpočet:

Odpoveď: ..............................................................................................................................

## LIEKY

Štvorročný Jurko ochorel. Jeho staršia sestra Monika mu chce podať lieky proti horúčke. Na informačnom letáku k lieku si prečítala tieto informácie:

*NÁZOV LIEKU PARALEN® 125 (paracetamolum)*
*tablety*

*KVALITATÍVNE A KVANTITATÍVNE ZLOŽENIE LIEKU*
*Paracetamolum 125 mg v 1 tablete*

*KLINICKÉ ÚDAJE*
*Terapeutické indikácie*
*Horúčka, najmä pri akútnych bakteriálnych a vírusových infekciách, bolesti zubov, hlavy, neuralgie, bolesti svalov alebo kĺbov nezápalovej etiológie.*

*Dávkovanie a spôsob podávania*
*Na jednorazové podanie je dávka 10 – 15 mg/kg telesnej hmotnosti. Podáva sa podľa potreby v najmenej 6-hodinových intervaloch.*
*Tablety, ktoré je možné deliť na polovice aj podať rozdrvené, sa užívajú po jedle, zapíjajú sa dostatočným množstvom tekutiny.*
*Vzhľadom na to, že tabletu prehltne dieťa až od 3 rokov, je nutné deťom do 3 rokov podávať tablety rozdrvené na lyžičke s čajom.*

Monika vedela, že Jurko váži 15 kilogramov.

**Úloha 1:** Najviac koľko tabliet môže Monika podať Jurkovi v jednej dávke? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Monika môže podať Jurkovi v jednej dávke najviac ..................... tabletiek.

**Úloha 2:** Koľko to je tabliet Paralenu za 24 hodín? Koľko tabletiek bude Monika potrebovať pre Jurka na tri dni? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Za 24 hodín je to .................... tabliet Paralenu. Na tri dni bude Monika potrebovať ........................... tabletiek.

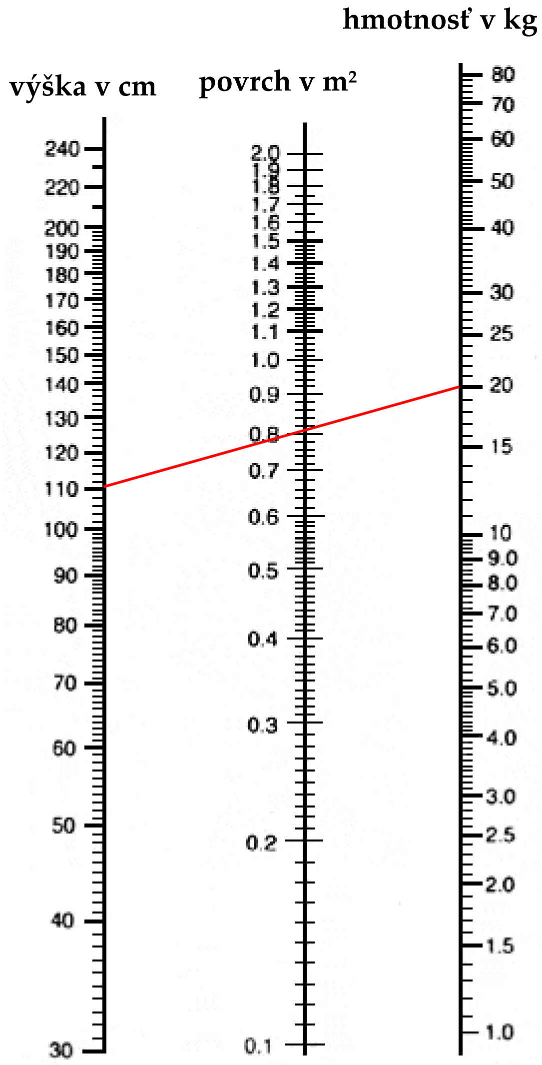
**Úloha 3:** Koľko tabletiek by ste v prípade rovnakej choroby potrebovali na tri dni vy?

| Výpočet: |
|---|
| Moja hmotnosť je ....................... kg. |

Odpoveď: Potreboval/potrebovala by som ....................... tabletiek.

## NOMOGRAM

Pri dávkovaní niektorých liekov potrebuje lekár poznať veľkosť povrchu pacientovho tela. Tá sa vypočíta z pacientovej výšky a hmotnosti buď dosadením do vzorca alebo graficky – z *nomogramu*.




Na obrázku je znázornený nomogram, ktorý zachytáva vzťah medzi výškou dieťaťa, povrchom jeho tela a hmotnosťou. Tento nomogram sa skladá z troch rovnobežných čiar. Na každej čiare je vyznačená iná veličina: na prvej čiare zľava je to výška dieťaťa v centimetroch, na druhej približný povrch tela v metroch štvorcových a na tretej hmotnosť v kilogramoch.

Ak chceme napríklad zistiť približnú veľkosť povrchu tela dieťaťa s výškou 110 cm a hmotnosťou 20 kg, priložíme pravítko tak, aby na prvej čiare prechádzalo hodnotou 110 a na tretej hodnotou 20 (pozri obrázok). Na strednej čiare potom odčítame hľadanú hodnotu: povrch tela je približne 0,8 m².

**Úloha 1:** Použitím zobrazeného nomogramu zistite, približne aký veľký je povrch Petrovho tela, ak je Peter

a) vysoký 160 cm a má hmotnosť 60 kg.

b) vysoký 144 cm a má hmotnosť 48 kg.

Odpoveď: a) približne ............. m²

b) približne ............. m²

**Úloha 2:** Predstavte si, že ste lekár. Predpisujete pacientovi liek, ktorého dávkovanie závisí od veľkosti telesného povrchu. Jedna dávka je 1 250 mg/m² telesného povrchu. Užíva sa jedna dávka ráno a jedna večer. K dispozícii sú tablety hmotnosti 150 mg a 500 mg, ktoré sa pri dávkovaní kombinujú (napr. dávka 1 650 mg: 1 tableta 150 mg a 3 tablety 500 mg). Vypočítaná dávka sa zaokrúhli tak, aby ju bolo možné podať ako kombináciu uvedených dvoch hmotností tabliet.

Pacient má hmotnosť 64 kg a výšku 170 cm. Vypočítajte, koľko tabliet a akej hmotnosti má pacient užívať ako jednu dávku a koľko tabliet celkovo bude potrebovať na liečbu trvajúcu 14 dní. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: 1 dávka = ............... ks tabliet 150 mg a ................. ks tabliet 500 mg

Celkovo bude pacient potrebovať ............. ks tabliet 150 mg a .......... ks tabliet 500 g.

**Úloha 3:** Igor zistil, že má povrch tela 1,75 m². Akú výšku a hmotnosť má Igor?

Odpoveď: ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**Úloha 4:** Môže sa stať, že Adam potom ako vyrástol o 10 cm, má ten istý povrch tela ako predtým? Zakrúžkujte správnu z možností *áno – nie* a svoju odpoveď zdôvodnite.

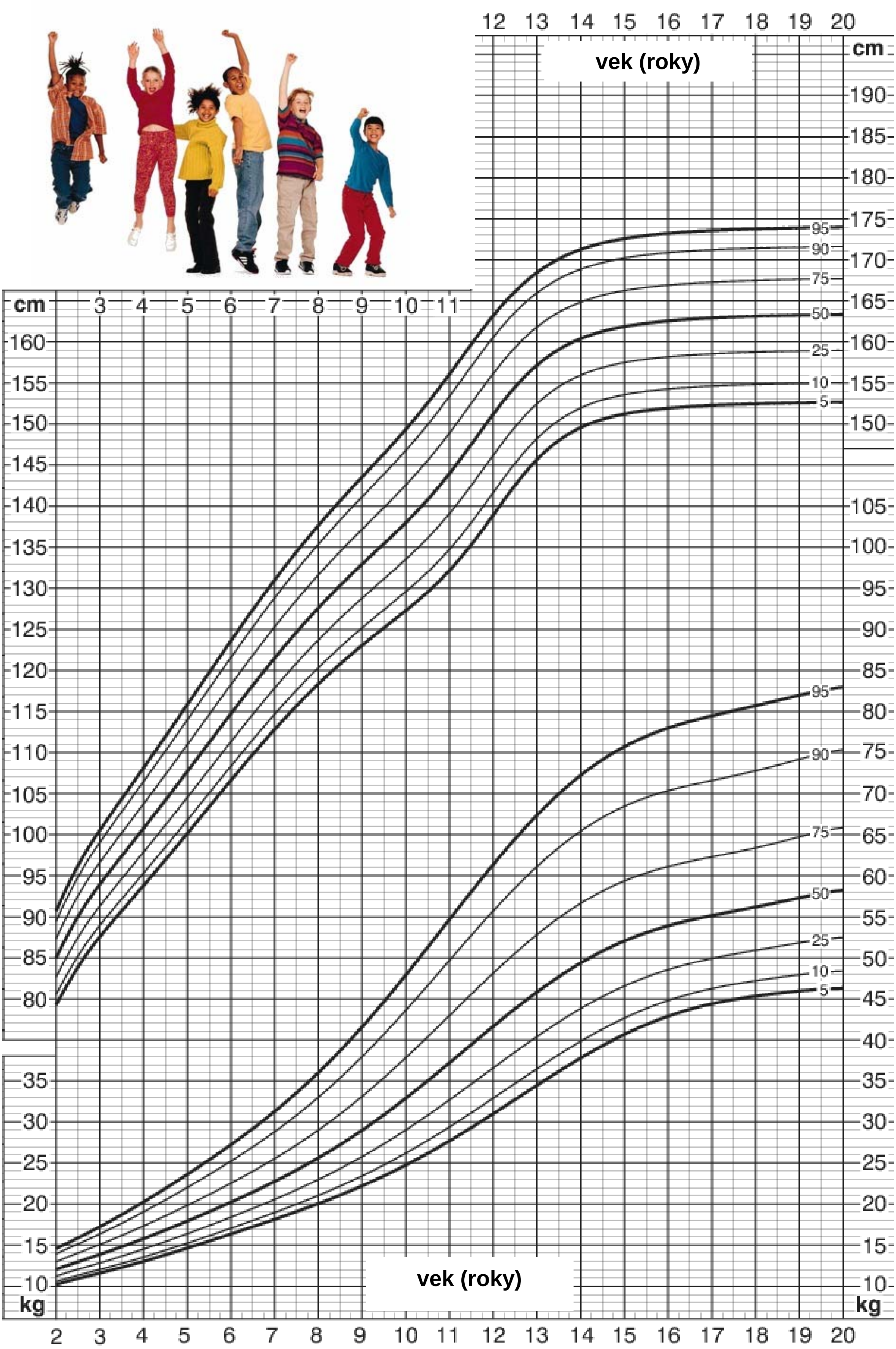
Odpoveď: áno nie

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |

**Úloha 5:** Na nasledujúcej dvojici grafov je zobrazená priemerná hmotnosť a priemerná výška dievčat medzi 2. a 20. rokom života. Priemerné hodnoty sú na čiarach označených číslom 50.

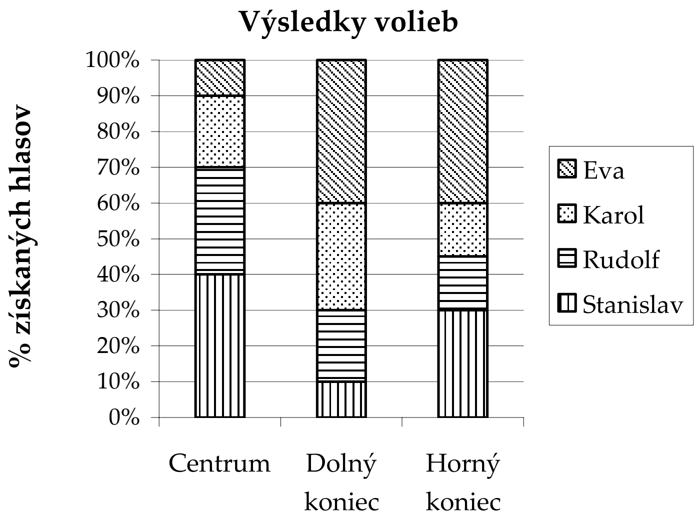
Zistite, v akom veku bude mať dievča s priemernou výškou a hmotnosťou veľkosť telesného povrchu 1 m².

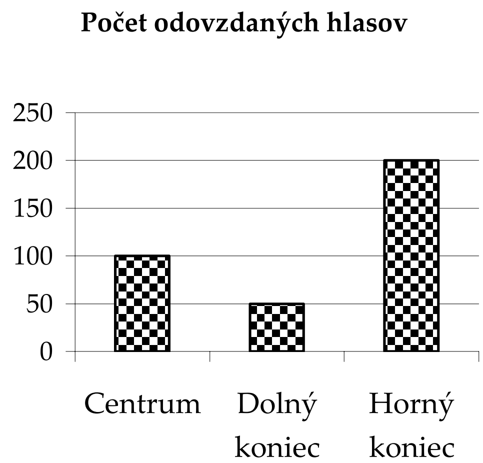
Odpoveď: ..........................................................................................................................


12 13 14 15 16 17 18 19 20
cm
vek (roky)
190
185
180
175
170
165
160
155
150
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
kg
95
90
75
50
25
10
5
cm
3 4 5 6 7 8 9 10 11
160
155
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
35
30
25
20
15
10
kg
vek (roky)
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

## OBECNÉ VOĽBY

O štyri mesiace budú v Novej Vsi voľby starostu. O túto funkciu sa uchádzajú štyria kandidáti. Dva diagramy na obrázku znázorňujú výsledky verejného prieskumu. V prvom diagrame sú predpokladané percentuálne výsledky volieb, v druhom je znázornený predpokladaný počet hlasov odovzdaných v jednotlivých volebných okrskoch.




**Úloha 1:** V ktorom okrsku by podľa tohto prieskumu bolo najviac odovzdaných hlasov?

Odpoveď: ..........................................................................................................

**Úloha 2:** Koľko percent hlasov by získal Rudolf v okrsku Centrum?

Odpoveď: ..........................................................................................................

**Úloha 3:** Koľko hlasov (nie percent hlasov) by získala Eva v okrsku Horný koniec?

Odpoveď: ..........................................................................................................

**Úloha 4:** O koľko hlasov menej ako Eva by získal Stanislav v okrsku Horný koniec?

Odpoveď: ..........................................................................................................

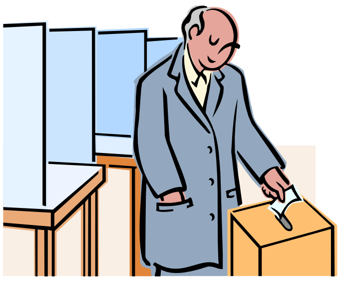
**Úloha 5:** Kto by podľa tohto prieskumu vyhral voľby? Napíšte aj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..............................................................................................................................

Dva mesiace pred voľbami sa konal nový prieskum. V ňom sa uvažovalo už len o troch kandidátoch, pretože na základe prvého prieskumu sa Rudolf svojej kandidatúry vzdal. Výsledky nového prieskumu zobrazuje tabuľka. Je v nej uvedené očakávané rozdelenie hlasov medzi kandidátov v jednotlivých okrskoch. Teda napríklad, zo všetkých platných hlasov odovzdaných v okrsku Centrum by získal Stanislav 40 %, Karol 20 % a Eva 40 %.

| **Okrsok** / **Kandidát** | Centrum | Dolný koniec | Horný koniec |
|---|---|---|---|
| Stanislav | 40 % | 30 % | 45 % |
| Karol | 20 % | 35 % | 45 % |
| Eva | 40 % | 35 % | 10 % |



Predstavte si, že:

- voľby dopadnú presne tak, ako ukazuje nový prieskum,
- voliči odovzdajú spolu 800 platných hlasov,
- počet platných hlasov nebude v žiadnom okrsku menší ako 50.

**Úloha 6:** Ukážte, že v takom prípade počet všetkých platných hlasov v okrsku Dolný koniec musí byť násobkom čísla 20.

Vysvetlenie:

**Úloha 7:** Zdá sa, že podľa prieskumu jednoznačným favoritom je Stanislav. Nemusí to však byť pravda: výsledok závisí od počtu hlasov odovzdaných v jednotlivých okrskoch. Ukážte, že 800 hlasov sa dá medzi jednotlivé okrsky rozdeliť tak, aby vyhral Karol.

a) Do tabuľky v odpovedi napíšte navrhnutý počet hlasov v jednotlivých okrskoch počty hlasov, ktoré získajú v okrskoch jednotliví kandidáti.

b) Uveďte výpočet ukazujúci, že pri vami navrhnutom rozdelení hlasov skutočne vyhrá Karol.

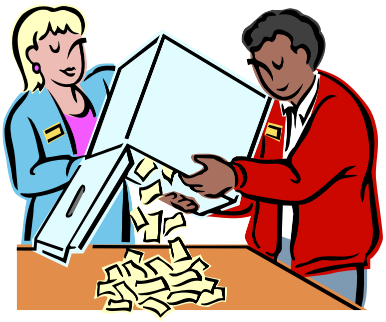
Odpoveď:

| | Centrum | Dolný koniec | Horný koniec |
|---|---|---|---|
| celkový počet hlasov v okrsku | | | |
| Stanislav | 40 % = | 30 % = | 45 % = |
| Karol | 20 % = | 35 % = | 45 % = |
| Eva | 40 % = | 35 % = | 10 % = |

Výpočet:

**Úloha 8:** Rovnako tak by sa mohlo zdať, že Eva nemá šancu. Zistite, či to je skutočne pravda. Otázka teda je:

Dá sa spomínaných 800 platných hlasov rozdeliť medzi jednotlivé okrsky tak, aby vyhrala Eva? Zakrúžkujte správnu z možností *áno* – *nie* a svoju odpoveď zdôvodnite.



Odpoveď: áno nie

Zdôvodnenie:

## PALACINKY

Martina sa na prázdninách u starej mamy naučila piecť palacinky.

Zapamätala si, že na 20 palaciniek potrebuje 1 liter mlieka, 4 vajcia, 4 lyžice kryštálového cukru, 1 vanilkový cukor, štipku soli, 50 dag polohrubej múky a olej na potretie panvice.

Hneď po prázdninách pozvala Martina na oslavu svojich menín 8 kamarátok. Rozhodla sa pre každú vrátane seba pripraviť po 4 palacinky s ananásom, šľahačkou a čokoládou.

**Úloha 1:** Koľko litrov mlieka a koľko vajec by Martina potrebovala, ak by chcela upiecť presne toľko palaciniek, koľko si naplánovala? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Martina by potrebovala ....................... l mlieka a .................. vajec.

Aby nemala problémy s dávkovaním, rozhodla sa Martina nakoniec urobiť 40 palaciniek.

**Úloha 2:** Na 40 palaciniek chce Martina nakúpiť všetky suroviny uvedené v recepte, okrem soli, ktorú má doma. Navyše chce kúpiť jednu šľahačku v spreji, jednu čokoládu na varenie a dva kompóty. Bude jej na tento nákup stačiť 7 €? Ceny tovarov sú uvedené v tabuľke. Zapíšte svoj výpočet.

| Tovar | Cena (€) | Tovar | Cena (€) |
|---|---|---|---|
| mlieko 1 liter | 0,66 | polohrubá múka 1 kg | 0,31 |
| vajce 1 ks | 0,10 | ananásový kompót | 0,66 |
| kryštálový cuko 1 kg | 0,99 | šľahačka v spreji | 0,99 |
| vanilkový cukor | 0,08 | čokoláda na varenie | 0,49 |
| olej | 1,35 | | |

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................................................

**Úloha 3:** Martina nakoniec spolu s kamarátkou kúpila všetko, čo potrebovala. Hneď si pripravila cesto a pustila sa do pečenia. Aké bolo jej prekvapenie, keď zistila, že nakúpené suroviny jej vystačili len na 32 palaciniek. Skúste nájsť čo najviac dôvodov, ako sa to mohlo stať.

| Možné vysvetlenia: |
|---|
| |
| |
| |
| |

Keďže mala ešte dosť času, rozhodla sa Martina upiecť chýbajúcich 8 palaciniek.

**Úloha 4:** Koľko surovín potrebuje na týchto 8 palaciniek, ak bude pri pečení postupovať takisto ako doteraz? Zapíšte svoj výpočet. Množstvá potravín napíšte do nasledujúcej tabuľky.

Odpoveď:

| **potravina** | **množstvo** (uveďte aj jednotky, napr. liter, kilogram) |
|---|---|
| mlieko | |
| vajcia | |
| kryštálový cukor | |
| vanilkový cukor | |
| polohrubá múka | |

Výpočet:

## PIRÁTI

Piráti boli v očiach väčšiny svojich súčasníkov bandou lúpežníkov bez cti. Medzi sebou však dodržiavali prísne pravidlá, ktoré každý odprisahal nad bibliou alebo sekerou. Týkali sa aj delenia koristi. Dohoda, ktorú v roku 1721 uzavrel pirátsky kapitán Bartholomew Roberts (na obrázku) so svojou posádkou, obsahovala aj tieto dva články:

*Článok 9. Nikto nenavrhne ukončenie výpravy, kým hodnota jedného podielu nedosiahne 1 000 £ (libier). Každý muž, ktorý sa stane mrzákom alebo príde o končatinu v službe, dostane 800 španielskych pesiet z celkového imania.*

*Článok 10. Kapitán a prvý dôstojník dostanú každý 2 podiely na koristi, hlavný delostrelec a bocman (loďmajster) jeden a pol podielu, ostatní dôstojníci jeden a štvrť, jednoduchí vojaci (gentlemani šťasteny) každý jeden podiel.*

**Úloha 1:** Aká by bola hodnota jedného podielu, keby bocman, ktorý prežil celú výpravu bez zranenia, dostal celkom 5 250 pesiet? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Hodnota jedného podielu by bola .................................. .

**Úloha 2:** Pri rozdelení koristi podľa uvedených pravidiel dostal lodný tesár Jack (je odmeňovaný ako dôstojník) celkom 7 100 pesiet. Koľko dostal jednoduchý vojak Edward? (*Pozor, úloha má viac riešení.*)

Odpoveď: ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**Úloha 3:** Podľa uvedených pravidiel treba rozdeliť korisť 500 000 španielskych pesiet medzi posádku pozostávajúcu z kapitána, prvého dôstojníka, hlavného delostrelca, bocmana, lodného tesára (je odmeňovaný ako dôstojník), 4 ďalších dôstojníkov a 223 pirátov. 15 námorníkov prišlo o ruku, dvaja ďalší o nohu. Aká bude hodnota jedného podielu? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Hodnota 1 podielu bude .................................................. .

**Úloha 4:** Pri akej hodnote jedného podielu by sa mohlo stať, že obyčajný vojak by dostal z koristi viac ako niektorý z dôstojníkov? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Mohlo by sa to stať pri hodnote podielu ......................................

Najčastejšie sa v pirátskej koristi nachádzali španielske mince: strieborné reály a zlaté escudá. Ich vzájomné pomery poznal každý pirát:

1 zlaté escudo = 16 strieborných reálov.

Zlatá 8-escudová minca sa volala dublón, strieborná minca v hodnote 8 reálov bolo peso, o ktorom sme hovorili predtým. Medzi dublónmi a vtedajšími anglickými librami (£) platil približne vzťah

1 dublón = 4 £.

Niektorí autori odhadujú, že vtedajšia anglická libra mala hodnotu zodpovedajúcu asi 550 £ v súčasnosti. Na začiatku roka 2008 bol kurz približne

1 £ = 1,3 eur.

**Úloha 5:** Vojak Edward zistil, že hodnota 1 podielu dosiahla hodnotu 3 500 pesiet. Oprávňuje táto hodnota pirátov, aby požadovali ukončenie výpravy (podľa článku 9 dohody s kapitánom)? Správnu odpoveď zakrúžkujte, svoje tvrdenie zdôvodnite.

Odpoveď: oprávňuje neoprávňuje

Zdôvodnenie:

**Úloha 6:** Odhadnite, akú hodnotu v eurách (zaokrúhlenú na desaťtisíce) by mal dnes jeden podiel v hodnote 3 800 pesiet. Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Suma 1 podielu by mala dnes hodnotu asi ........................ eur.

## PREKLÁPANIE

Asi viete, že na hracích kockách je súčet počtu bodiek na protiľahlých stenách vždy 7. Na jednej dvojici protiľahlých stien sú čísla 1 a 6, na druhej čísla 2 a 5 a na tretej 3 a 4.

*obr. 1*

Ľavú kocku na obrázku 1 sme začali preklápať smerom k sebe. Teda po prvom preklopení bude päť bodiek dole a šesť bodiek vpredu. Aj naďalej preklápame k sebe.

**Úloha 1:** Koľko bodiek bude na hornej stene tejto hracej kocky

a) po 2. preklopení? b) po 8. preklopení?

Odpoveď: Po 2. preklopení bude hore stena ..................................................... .

Po 8. preklopení bude hore stena ..................................................... .

**Úloha 2:** Koľko bodiek bude vpredu

a) po 100. preklopení?

b) po 150. preklopení?

c) po 999. preklopení?

Svoje odpovede vysvetlite.

Odpoveď: Po 100. preklopení bude vpredu stena ............................................. .

Po 150. preklopení bude vpredu stena ............................................. .

Po 999. preklopení bude vpredu stena ............................................. .

| Vysvetlenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |
| |

Teraz budeme tú istú kocku striedavo preklápať smerom od seba a smerom doprava. Začneme v polohe, ako je na obrázku 1 vľavo, prvé preklopenie bude smerom od seba.

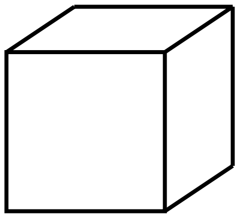
**Úloha 3:** Znázornite túto kocku

a) po 2 preklopeniach. b) po 3 preklopeniach.

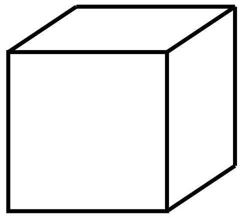
Zaznačte počty bodiek na všetky tri zobrazené steny kocky.

Znázornenie kocky:

a) po 2 preklopeniach



b) po 3 preklopeniach



**Úloha 4:** Po koľkých preklopeniach sa dostane kocka do rovnakej polohy ako na začiatku preklápania?

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

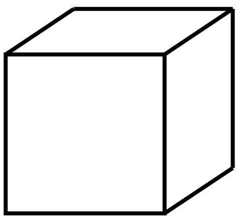
**Úloha 5:** Po koľkých preklopeniach budú vpredu 4 bodky? Svoju odpoveď vysvetlite.

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

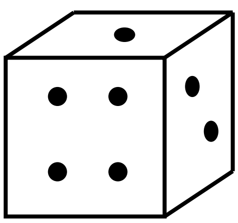
Vysvetlenie:

**Úloha 6:** Znázornite túto kocku po 99 preklopeniach. Zdôvodnite počet bodiek, ktoré má kocka na vašom znázornení vpredu, hore a vpravo.

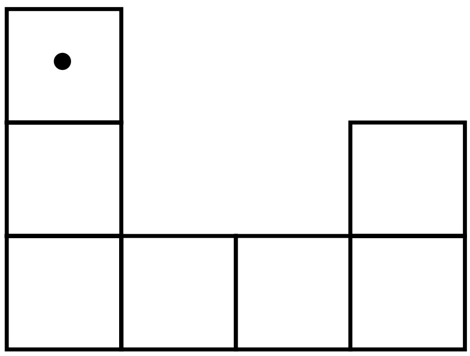
Znázornenie a vysvetlenie:



Hraciu kocku, ktorá je na obrázku 2, sme začali postupne preklápať. Začali sme smerom k sebe. Po každom preklopení sme zakreslili polohu vrchnej steny kocky a počet bodiek na nej, pozri obr. 3.



*obr. 2*



*obr. 3*

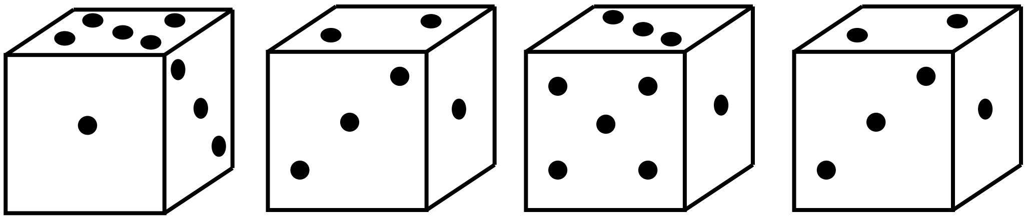
**Úloha 7:** Ktorým smerom sme podľa obrázka 3 preklápali druhýkrát a ktorým smerom tretíkrát?

Odpoveď: Druhýkrát sme preklápali smerom ........................................................................

Tretíkrát sme preklápali smerom ........................................................................

**Úloha 8:** Dokreslite do obrázka 3 počty bodiek na vrchnej stene kocky.

Ak položíme vedľa seba 4 hracie kocky, na ich horných stenách vidíme počty bodiek. Tie môžeme prečítať ako jedno štvorciferné číslo. Napríklad kocky na obrázku 4 určujú číslo 5232:



*obr. 4*

**Úloha 9:** Predstavte si, že štyri kocky na obrázku 4 naraz preklopíte dopredu. Dostanete nové štvorciferné číslo. Preklopte ich ešte dvakrát dopredu. Dostanete ďalšie dve štvorciferné čísla, po každom preklopení jedno.

Tieto štyri štvorciferné čísla sčítajte. Výsledok zapíšte do tabuľky do stĺpca *1. pokus*.

Nastavte 4 kocky tak, aby počty bodiek na ich horných stenách ukazovali iné číslo ako 5232. Potom zopakujte predchádzajúci pokus (teda všetky 4 kocky preklopte trikrát po sebe a potom číslo, ktoré kocky ukazovali vo východiskovej polohe, sčítajte s ďalšími tromi štvorcifernými číslami, ktoré ste dostali po jednotlivých preklopeniach). Výsledný súčet zapíšte do stĺpca *2. pokus*.

Urobte tento pokus ešte niekoľkokrát tak, aby číslo, ktoré ukazujú 4 kocky vo východiskovej polohe, bolo pri každom pokuse iné. Výsledný súčet vždy zapíšte. Čo pozorujete?

| 1. pokus | 2. pokus | 3. pokus | 4. pokus | 5. pokus | 6. pokus |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Pozorovanie: ........................................................................................................................

**Úloha 10:** Vysvetlite výsledok predchádzajúcej úlohy.

| Vysvetlenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |

## PREZIDENTSKÉ VOĽBY

Začneme úryvkom z novinového článku:

*Na prvom kole prezidentských volieb v roku 2004 sa mohlo zúčastniť 4 204 899 oprávnených voličov. Zúčastnilo sa však len 47,94 %.*

**Úloha 1:** Koľko oprávnených voličov sa zúčastnilo prvého kola volieb? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..............................................................................................................................

**Úloha 2:** Viera tvrdí, že počet voličov, ktorí sa zúčastnili na voľbách, mohol byť 2 015 624. Dodala, že to musí mať dobre, lebo si urobila skúšku.

Je Vierin výsledok správny? Overte to aj vy. Zapíšte svoju skúšku správnosti. Potom zakrúžkujte správnu z dvoch možností *je – nie je správny*.

Skúška správnosti:

Odpoveď: Vierin výsledok je – nie je správny.

**Úloha 3:** Rovnako, ako ste skontrolovali Vierin výsledok, skontrolujte aj výsledok svojho riešenia úlohy 1.

Skúška:

Z riešenia predchádzajúcich úloh vidno, že existuje viacero čísel, ktoré by mohli byť správnou odpoveďou na otázku z úlohy 1.

**Úloha 4:** Nájdite všetky počty voličov, ktoré by mohli byť riešením úlohy 1. Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Riešením úlohy 1 by mohli byť čísla ........................................................................ .

V skutočnosti sa prvého kola prezidentských volieb v roku 2004 zúčastnilo 2 015 889 oprávnených voličov. To je

$$2\,015\,889 : 42\,048{,}99 = 47{,}941\,436\,881\,123\,660\,758\,558\,053\ \%$$

z celkového počtu oprávnených voličov (zaokrúhlené na 24 desatinných miest).

**Úloha 5:** Najmenej na koľko desatinných miest treba zaokrúhliť vypočítaný počet percent, aby sme z neho vedeli určiť počet zúčastnených voličov (teda 2 015 889) jednoznačne? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: najmenej na ........................... desatinných miest

Tu je pokračovanie novinového článku spomenutého v úvode:

*Kandidátom bolo odovzdaných 1 986 214 platných hlasov. Najviac z nich, rovných 650 242 hlasov, dostal Vladimír Mečiar, čo bolo 32,74 % všetkých platných hlasov. Druhým najúspešnejším bol Ivan Gašparovič, ktorý získal 442 564 platných hlasov. Eduardovi Kukanovi nestačilo 22,10 % získaných platných hlasov, aby postúpil do druhého kola.*

**Úloha 6:** Na základe údajov z článku zistite, koľko percent platných hlasov získal I. Gašparovič. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: ..............................................................................................................................

Tu sú tri rôzne riešenia úlohy 6:

- Milan využíval údaje o V. Mečiarovi:

  650 242 ........ 32,74 %
  442 564 ........ ? %

  $32{,}74 \cdot 442\,564 : 650\,242 = 22{,}283\,3\ldots$, po zaokrúhlení 22,28 %.
- Katarína sa snažila napodobniť riešenie úlohy 4, pričom tiež vychádzala z údajov o V. Mečiarovi:

  32,74 vzniklo zaokrúhlením niektorého čísla z intervalu $\langle 32{,}735\,;\,32{,}745)$

  pre 32,735 : $32{,}735 \cdot 442\,564 : 650\,242 = 22{,}279\,9\ldots$, po zaokrúhlení 22,28 %
  pre 32,745 : $32{,}745 \cdot 442\,564 : 650\,242 = 22{,}286\,7\ldots$, po zaokrúhlení 22,29 %

  I. Gašparovič získal 22,28 % alebo 22,29 % platných hlasov.
- Juraj využil pri riešení úlohy 6 údaj o všetkých platných hlasoch:

  1 % je 19 862,14 $442\,564 : 19\,862{,}14 = 22{,}281\,7\ldots$, po zaokrúhlení 22,28 %.

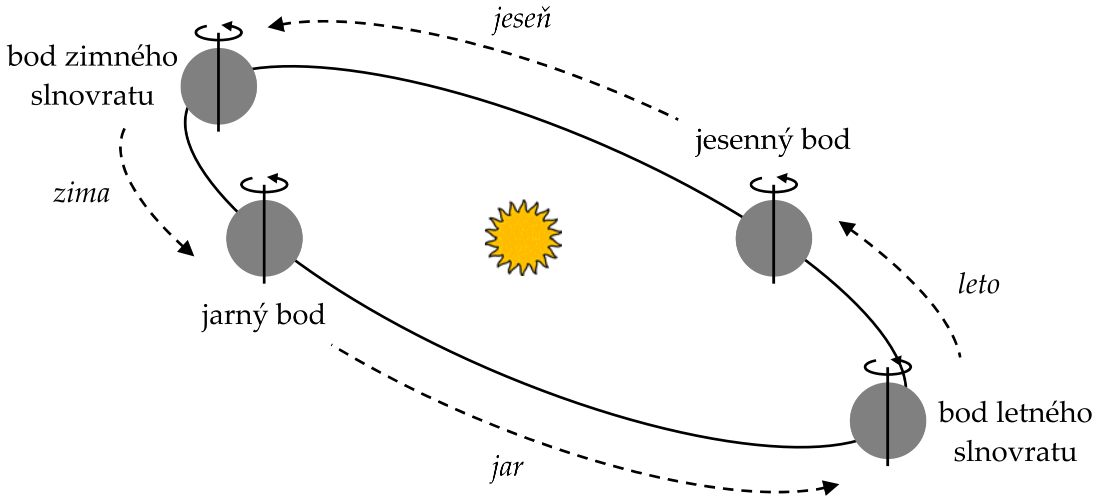
**Úloha 7:** Diskutujte o správnosti jednotlivých postupov a presnosti získaných riešení. Ktoré z uvedených riešení sú správne? Svoje tvrdenie vysvetlite.

Odpoveď: Správne riešenie má ..................................................................................................

| Vysvetlenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

## PRIESTUPNÉ ROKY

Na svojej ceste okolo Slnka prechádza naša Zem štyrmi význačnými bodmi: jarným bodom, bodom letného slnovratu, jesenným bodom a bodom letného slnovratu. Tieto body určujú začiatky ročných období:




- prechodom Zeme jarným bodom začína jar, okamih tohto prechodu je jarná rovnodennosť,
- prechodom Zeme bodom letného slnovratu začína leto, okamih tohto prechodu je letný slnovrat,
- prechodom Zeme jesenným bodom začína jeseň, okamih tohto prechodu je jesenná rovnodennosť,
- prechodom Zeme bodom zimného slnovratu začína zima, okamih tohto prechodu je zimný slnovrat.

Jeden obeh okolo Slnka trvá Zemi asi 365,2422 dňa.

**Úloha 1:** Koľko dní a hodín trvá jeden obeh? Zapíšte svoj výpočet. Výsledok zaokrúhlite na celé hodiny.

| Výpočet: |
|---|
| |

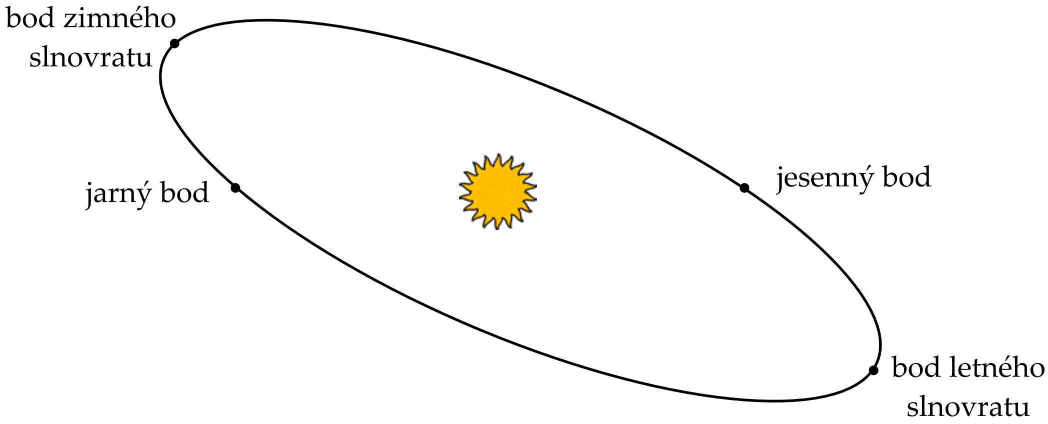
Odpoveď: Je to 365 dní a približne .................. hodín.

Aby bol náš kalendár v súlade s obehom Zeme okolo Slnka, je potrebné v niektorých rokoch pridať v kalendári 1 deň naviac. Tieto roky sa nazývajú *priestupné*. Ukážme si, čo by sa stalo, keby sme nepoužívali priestupné roky, teda keby každý rok mal 365 dní.

**Úloha 2:** V roku 2000 prechádzala Zem jarným bodom 21. marca. Predstavme si, že každý z nasledujúcich 100 rokov by mal 365 dní.

a) Na obrázku vyznačte, kde by sa Zem nachádzala 21. marca 2100.

b) Uveďte dátum, kedy by začala jar v roku 2100.

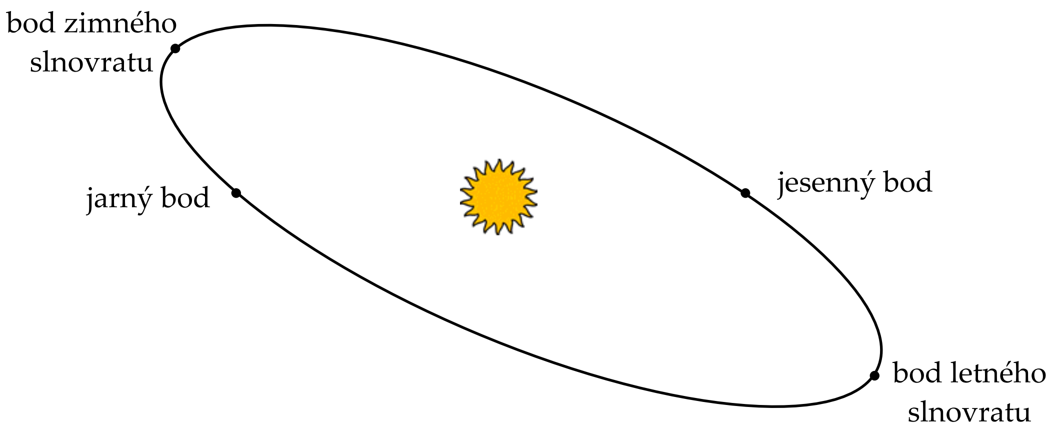



Odpoveď: V roku 2100 by jar začínala ........................................... .

**Úloha 3:** Riešme teraz tú istú úlohu pre 100 po sebe nasledujúcich rokov s 366 dňami.

a) Vyznačte na obrázku, kde by sa Zem nachádzala 21.3.2100.

b) Uveďte dátum, kedy by začala jar v roku 2100.




Odpoveď: V roku 2100 by jar začínala ........................................... .

*Juliánsky kalendár sa nazýva podľa Gaia Julia Caesara, ktorý ho zaviedol v r. 45 pr. n. l.*

Až do roku 1587 sa v Uhorsku používal tzv. *juliánsky kalendár*. V ňom bol priestupný každý rok deliteľný 4. Ako uvidíme, ani používanie tohto kalendára nebolo v úplnom súlade s obehom Zeme okolo Slnka.

Budeme si teraz všímať obdobie medzi rokmi 325 a 1587. Počas celého tohto obdobia sa používal juliánsky kalendár. Je známe, že v roku 325 prechádzala Zem jarným bodom 21. marca.

**Úloha 4:** Koľko priestupných rokov mal v uvedenom období juliánsky kalendár? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

**Úloha 5:** Kedy prechádzala Zem jarným bodom v roku 1587? Zakrúžkujte správnu odpoveď a uveďte výpočet.

Odpoveď: asi 10 dní pred 21. marcom asi 10 dní po 21. marci

Výpočet:

Uhorský snem rozhodol v roku 1587 o oprave kalendára a odstránení tejto 10-dňovej odchýlky. Posledným dňom starého kalendára bol 21. október 1587.

**Úloha 6:** Aký dátum nasledoval po 21. októbri 1587? Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite ju.

Odpoveď: 12. október 1587 22. október 1587 1. november 1587

Zdôvodnenie:

Od tejto zmeny sa na našom území používa nový, tzv. *gregoriánsky kalendár*. V ňom sa zmenšil počet priestupných rokov: z rokov, ktoré sú deliteľné 100, sú priestupné len tie, ktoré sú deliteľné 400.

**Úloha 7:** Koľko priestupných rokov by pripadlo podľa gregoriánskeho kalendára na obdobie medzi rokmi 325 a 1587? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:


*Gregoriánsky kalendár sa nazýva podľa pápeža Gregora XIII., ktorý jeho používanie nariadil 24. februára 1582.*

Odpoveď: ..........................................................................................................................

V súčasnosti sa juliánskym kalendárom riadi napríklad pravoslávna cirkev. Rozdiel medzi juliánskym a gregoriánskym kalendárom je teraz 13 dní (napr. 1. január 2008 bol podľa juliánskeho kalendára 19. december 2007).

**Úloha 8:** V ktorom roku sa zmení rozdiel medzi juliánskym a gregoriánskym kalendárom? Ako sa zmení tento rozdiel: zväčší sa na 14 dní alebo sa zmenší na 12 dní? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: Zmení sa v roku ...................., v tomto roku sa ....................... na ............ dní.

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |
| |

**Úloha 9:** Doplňte chýbajúce údaje v nasledujúcom texte. Zapíšte svoje výpočty.

V juliánskom kalendári pripadal na každé 4 roky 1 priestupný rok. V gregoriánskom kalendári na každých 400 rokov pripadá ........................................ priestupných rokov. Preto priemerná dĺžka roka v juliánskom kalendári je ................................ dňa, priemerná dĺžka roka v gregoriánskom kalendári je ................................ dňa.

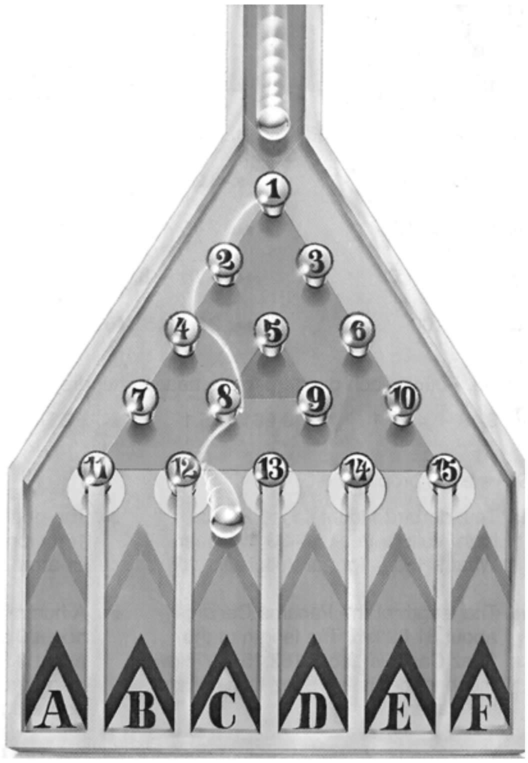
| Výpočet: |
| --- |
| |

**Úloha 10:** Na základe porovnania priemernej dĺžky roka (vypočítali ste ju v úlohe 9) s dobou obehu Zeme okolo Slnka vysvetlite, ktorý z dvojice juliánsky – gregoriánsky kalendár je viac v súlade s obehom Zeme okolo Slnka. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: Vo väčšom súlade je ..........................................................................................................

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |
| |

## QUINCUNX – GALTONOVA DOSKA




Francis Galton (1822 – 1911), jeden zo zakladateľov daktyloskopie, bol aj veľkým priekopníkom štatistiky. Aby znázornil niektoré javy súvisiace s náhodnosťou, navrhol (v r. 1873 alebo 1874) zariadenie nazývané *Galtonova doska* alebo tiež *Quincunx*.

Keď do Quincunxu zvrchu vpustíme loptičku, tá pri svojom páde narazí do kolíku s číslom 1. Podľa toho, ktorým smerom sa od neho odrazí, zasiahne kolík číslo 2 alebo kolík číslo 3. Obe tieto možnosti sú rovnako pravdepodobné. V prípade odrazu na kolíku číslo 2 zasiahne loptička s rovnakou pravdepodobnosťou kolík číslo 4 alebo kolík číslo 5. Podobne v prípade odrazu na kolíku 3 zasiahne kolíky číslo 5 alebo číslo 6. Takýmto spôsobom postupuje loptička smerom nadol, až kým nedopadne do niektorého z chlievikov označených A, B, C, D, E a F.

**Úloha 1:** S akou pravdepodobnosťou narazí loptička pri páde do kolíka č. 2?

Odpoveď: Do kolíka číslo 2 narazí loptička s pravdepodobnosťou ................................................ .

**Úloha 2:** S akou pravdepodobnosťou narazí loptička pri páde do kolíka č. 4? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Do kolíka číslo 4 narazí loptička s pravdepodobnosťou ................................................ .

**Úloha 3:** S akou pravdepodobnosťou loptička pri páde <u>nenarazí</u> do kolíka č. 5? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Pravdepodobnosť, že loptička nenarazí do kolíka č. 5, je ............................................... .

**Úloha 4:** S akou pravdepodobnosťou narazí loptička pri páde do kolíka č. 14? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Do kolíka číslo 14 narazí loptička s pravdepodobnosťou .............................................. .

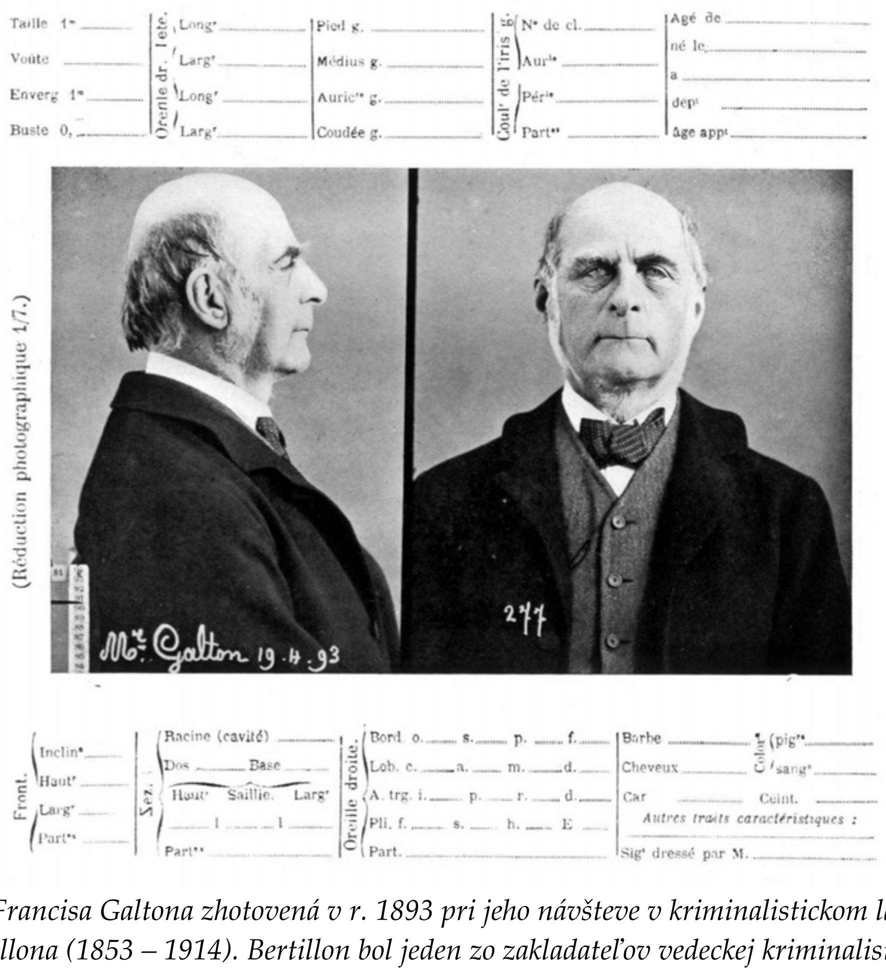
**Úloha 5:** V Quincunxe je práve jeden chlievik, do ktorého padne loptička s rovnakou pravdepodobnosťou ako do chlievika B. Ktorý chlievik to je?

Odpoveď: Je to chlievik označený písmenom ......................................

**Úloha 6:** Pre ktoré chlieviky Quincunxu je pravdepodobnosť, že do nich padne loptička, menšia ako pre chlievik D? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Odpoveď: S menšou pravdepodobnosťou ako do chlievika D dopadne loptička do chlievikov označených písmenami .......................................................................................................

| Zdôvodnenie: |
| --- |
| |
| |
| |
| |
| |
| |




*Fotografia Francisa Galtona zhotovená v r. 1893 pri jeho návšteve v kriminalistickom laboratóriu Alphonsa Bertillona (1853 – 1914). Bertillon bol jeden zo zakladateľov vedeckej kriminalistiky a súčasne veľký odporca daktyloskopie. Jeho systém zaznamenávania telesných mier vychádzal z poznatku Adolpha Quételeta, že neexistujú dvaja ľudia s úplne totožnými telesnými mierami.*

## RÝCHLOSŤ ZVIERAT

Janko sa v encyklopédii dočítal, že gepard dokáže vyvinúť maximálnu rýchlosť 120 km/h, ale iba na úseku dlhom 600 až 800 m. Korisť loví tak, že sa nepozorovane priplazí čo najbližšie k stádu a vyhliadne si obeť. Potom z úkrytu vyrazí. Ak nedokáže korisť dobehnúť do 200 m, prestane ju prenasledovať.

**Úloha 1:** Za koľko sekúnd prebehne gepard maximálnou rýchlosťou vzdialenosť 200 m? Svoj výpočet zapíšte.

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

**Úloha 2:** Ako blízko k antilope sa musí gepard nebadane dostať, aby mal šancu chytiť ju za 6 sekúnd od okamihu, kedy ho antilopa zbadá a začne utekať? Maximálna rýchlosť antilopy je 80 km/h. Svoj výpočet zapíšte. Výsledok zaokrúhlite na desiatky metrov.

Výpočet:

Odpoveď: ......................................................................................... .

Podľa tej istej encyklopédie slimák vyvinie maximálnu rýchlosť iba 0,05 km/h.

**Úloha 3:** Bez počítania odhadnite, koľko centimetrov prejde slimák touto maximálnou rýchlosťou za pol minúty. Vyberte si z nasledujúcich možností. Vybranú možnosť zakrúžkujte.

(a) asi 5 cm (b) asi 10 cm

(c) asi 20 cm (d) asi 40 cm (e) asi 80 cm

Potom hľadanú vzdialenosť vypočítajte. Výsledok zaokrúhlite na centimetre.

Výpočet:

Janko sedel v záhrade, keď si všimol, že na múrik vylieza slimák. Využil príležitosť, aby preveril údaj o slimákovej rýchlosti. Preto slimáka sledoval a stopoval čas. Slimák preliezol cez múrik vysoký 25 cm a široký 20 cm za 1 minútu a 24 sekúnd.

**Úloha 4:** Akou priemernou rýchlosťou liezol slimák? Zapíšte svoj výpočet. Výsledok uveďte a) v cm/min. b) v km/h.

Výpočet:

Odpoveď: Priemerná rýchlosť slimáka bola ..................... cm/min, to je ................ km/h.

Poľský denník Gazeta Wyborcza uverejnil v januári 2008 túto správu: Pobúrený Poliak, ktorý dostal 3. januára list odoslaný 20. decembra ako prioritnú zásielku, vypočítal, že dokonca aj slimák by celú 11,1 km dlhú trasu medzi miestom odoslania listu a miestom jeho doručenia prešiel rýchlejšie.

**Úloha 5:** Má pobúrený Poliak pravdu? Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite ju.

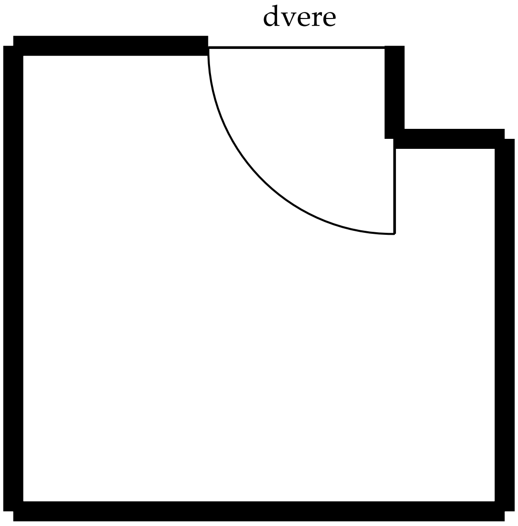
Výpočet:

Odpoveď: áno nie

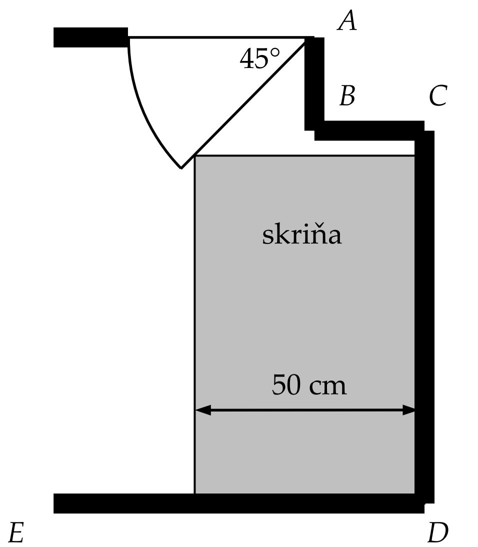
## Skriňa za dverami

Na obrázku 1 je znázornená izba v byte Cypriána Tótha-Zvolenského. Pán Cyprián do nej chce kúpiť skriňu hlbokú 50 cm. Načrtol, ako si umiestnenie skrine predstavuje (pozri obr. 2).

Je mu jasné, že kvôli skrini sa nebudú dať úplne otvoriť dvere. Stačí mu však, aby sa dali otvoriť o 45° (pozri obr. 2).




obr. 1




obr. 2


Pán Cyprián potrebuje zistiť, akú najširšiu skriňu môže za týchto podmienok do izby umiestniť. Rozhodol sa tento problém riešiť graficky: narysuje vo vhodnej mierke plánik izby a na ňom odmeria, aká široká môže byť skriňa.

Jeho náčrtok na obr. 2 bol len ilustračný, preto teraz v izbe odmeral tie dĺžky, ktoré pri rysovaní plániku bude potrebovať. Zistil, že v skutočnosti

$$|AB| = 19\ \text{cm},\ |BC| = 22\ \text{cm},\ |CD| = 104\ \text{cm}.$$

Šírka dverí vrátane pántov je 65 cm.

**Úloha 1:** Zvoľte si vhodnú mierku a narysujte čo najpresnejšie plánik tej časti izby, ktorá je na obr. 2.

Odpoveď: Zvolil/zvolila som si mierku ................................................

| Miesto na váš plánik: |
|---|
| |

**Úloha 2:**
a) Do plánika z úlohy 1 narysujte skriňu, ktorá spĺňa podmienky pána Cypriána.
b) Do tabuľky *Postup konštrukcie* zapíšte, ako ste pri rysovaní postupovali.
c) Na plániku odmerajte, aká široká je skriňa.
d) Určte skutočnú šírku skrine.

| Postup konštrukcie: |
|---|
| |

Odpoveď: Odmeraná dĺžka narysovanej skrine je .................... mm.

Skutočná dĺžka skrine je ...................... cm.

Pán Cyprián sa neuspokojil len s grafickým riešením. Aby mal úplnú istotu, hľadanú šírku skrine aj vypočítal.

**Úloha 3:** Zistite výpočtom, aká hodnota mala vyjsť pánovi Cypriánovi, ak počítal správne. Svoj výpočet zapíšte.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: ..............................................................................................................................................

Teraz do veci zasiahla pani Norika, manželka pána Cypriána. Povedala, že 45° sa jej zdá na otvorenie dverí málo. Podľa jej názoru by to malo byť 60°.

**Úloha 4:** Zistite, aká najširšia skriňa sa zmestí do izby, ak sa dvere majú dať otvoriť na 60°. Napíšte, aký postup riešenia ste zvolili, a zapíšte svoj výsledok.

| Zvolený postup: |
|---|
| |
| |

Odpoveď: .................................................................................................................................

Kým pán Cyprián zisťoval šírku skrine, pani Norika zistila, že sused má na predaj staršiu skriňu hlbokú 40 cm a širokú 90 cm. Než však pani Norika skriňu kúpi, chce vedieť, nakoľko sa budú dať na izbe otvoriť dvere.

**Úloha 5:** Narysujte nový plánik izby a na ňom zistite, o koľko stupňov sa budú dať otvoriť dvere. Napíšte, akú mierku ste zvolili a ako ste postupovali pri zisťovaní veľkosti uhla.

Odpoveď: Zvolil/zvolila som si mierku ...................................

| Postup pri zisťovaní veľkosti uhla: |
|---|
| |
| |
| |

Odpoveď: Dvere sa budú dať otvoriť o uhol ...........................

Rovnako ako predtým, aj teraz pán Cyprián pre istotu správnosť výsledku, ktorý získal meraním, ešte preveril výpočtom.

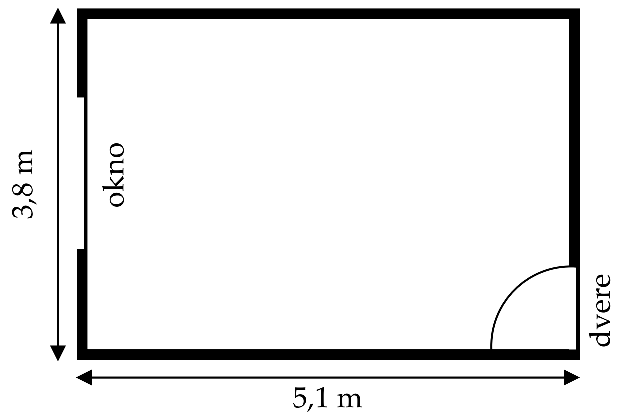
**Úloha 6:** Zistite výpočtom, o koľko stupňov sa budú dať otvoriť dvere.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: ..............................................................................................................................................

## SPOLOČNÝ PRENÁJOM

Traja susedia si prenajali miestnosť v suteréne panelového domu. Chcú ju používať ako pivnicu. Miestnosť je vysoká 3 metre. Jej pôdorys je na obrázku. Dvere majú rozmery 1 m × 2 m, okno 2 m × 0,5 m.




Susedia sa dohodli, že miestnosť najprv vymaľujú.

**Úloha 1:** Treba urobiť dva nátery stien a stropu miestnosti. V predajni majú balenia farby po 5 kg, 7,5 kg a 10 kg. 1 kg farby stačí podľa informácií výrobcu asi na 8 m² plochy. Zistite, aké balenie farby potrebujú susedia kúpiť. Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: Na maľovanie miestnosti dvoma nátermi potrebujú kúpiť ............................................ .

Susedia chcú v prenajatej miestnosti urobiť spoločnú obdĺžnikovú chodbičku širokú 1 meter a zvyšok miestnosti rozdeliť priečkami na tri pivnice. Dohodli sa na týchto podmienkach:

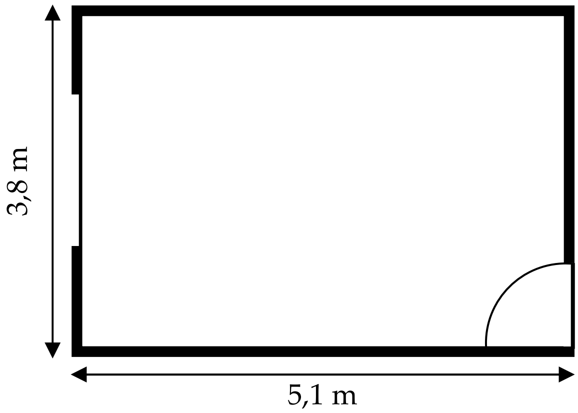
- Každá pivnica bude mať rovnakú plochu.
- Každá pivnica bude samostatná – nebude sa do nej vchádzať cez cudziu časť.
- Dvere do jednotlivých pivníc budú široké 60 cm.
- Do stien prenajatej miestnosti už nie je možné vybúrať ďalšie dvere.
- Pri delení miestnosti netreba brať ohľad na polohu okna (pretože nie je problém namontovať osvetlenie).

**Úloha 2:** Navrhnite susedom rozdelenie prenajatej miestnosti, ktoré spĺňa uvedené podmienky.

Vypočítajte plochu jednotlivých častí s presnosťou na celé $dm^2$. Svoj výpočet zapíšte.

Pri vašom návrhu a výpočte hrúbku priečok zanedbajte.

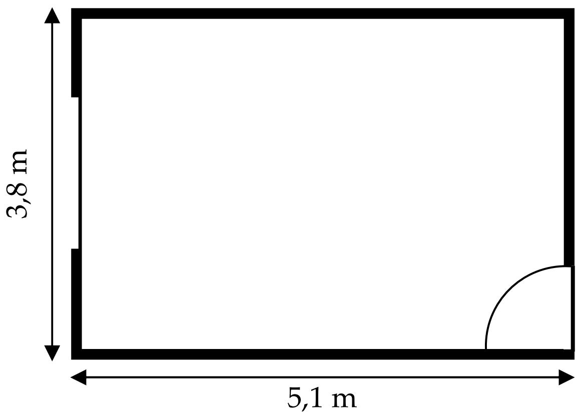
Sem nakreslite váš návrh rozdelenia miestnosti:



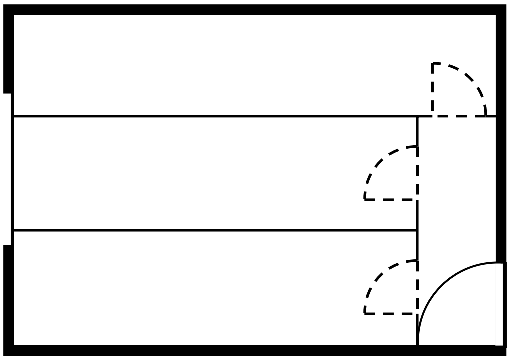

Tu vypočítajte plochu jednotlivých častí:

**Úloha 3:** Navrhnite, ako rozdeliť prenajatú miestnosť tak, aby boli splnené podmienky uvedené pred úlohou 2 a navyše aby plocha jednotlivých pivníc bola čo najväčšia. Na tvare pivníc nezáleží.

Odpoveď:



Po dlhých diskusiách sa naši traja susedia dohodli na rozdelení, ktoré je znázornené na nasledujúcom plániku.



Dohodli sa tiež, že priečky budú mať hrúbku 5 cm.

**Úloha 4:** Akú plochu bude mať jedna pivnica, ak pri výpočte uvážime aj hrúbku priečok? Uveďte svoj výpočet, výsledok zaokrúhlite na celé dm².

| |
|---|
| Výpočet: |

Odpoveď: Plocha jednej pivnice bude približne ..................... dm².

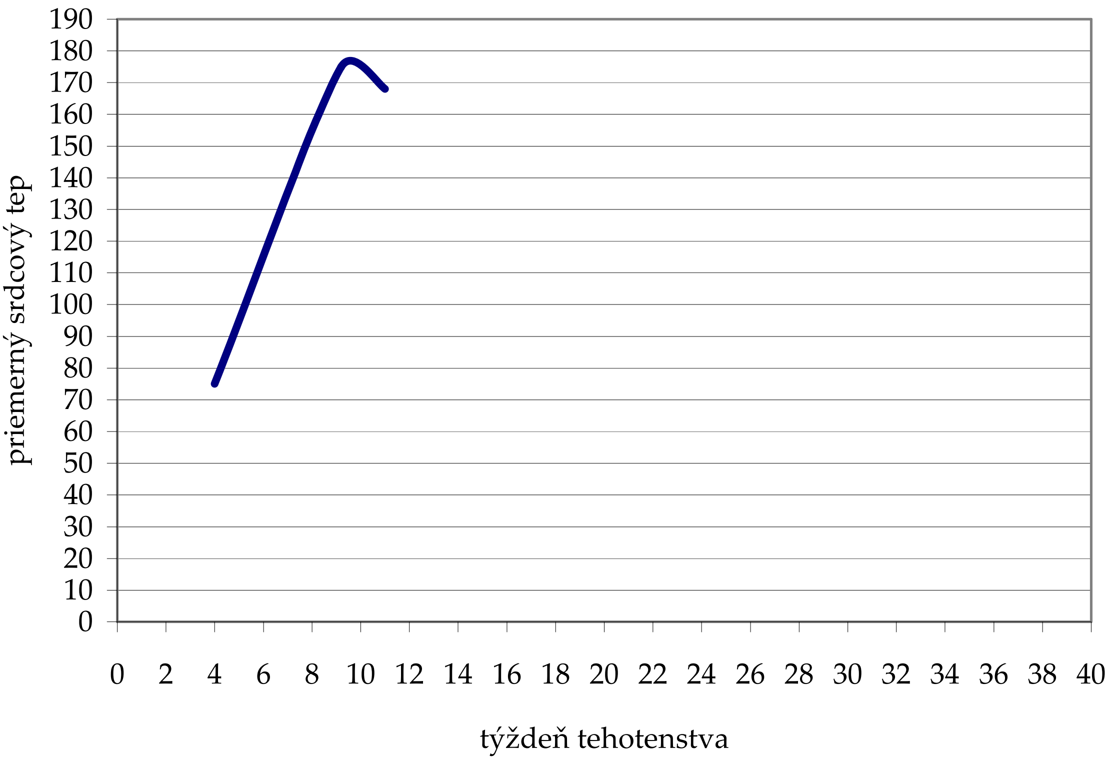
## Srdiečko embrya

Jedným z vyšetrení, ktoré podstúpi každá budúca mamička, je vyšetrenie ultrazvukom asi v 10. týždni tehotenstva. Okrem iného sa pri ňom sleduje bijúce srdiečko embrya.

Srdiečko embrya začne biť asi v 5. týždni tehotenstva. Srdcový tep začína na hodnotách blízkych tepu matky, t.j. asi 75 úderov za minútu. V priebehu nasledujúceho mesiaca pravidelne vzrastá, za 3 dni o 10 úderov, až dosiahne najvyššiu hodnotu asi 175 úderov za minútu na začiatku 9. týždňa tehotenstva.

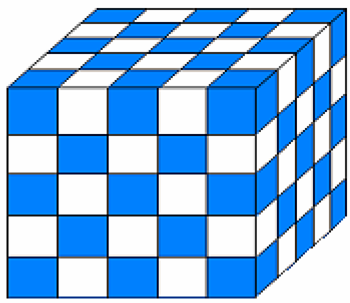
Po 9. týždni začína srdcový tep embrya klesať na hodnotu asi 150 úderov za minútu v 15. týždni tehotenstva. Od tohto týždňa je ďalší pokles veľmi pomalý na záverečnú hodnotu asi 145 úderov za minútu v 40. týždni tehotenstva.

**Úloha 1:** Na základe informácií z textu čo najpresnejšie dokreslite nasledujúci graf srdcového tepu embrya.



## ŠACHOVNICOVÁ KOCKA

V jedno popoludnie prišiel Martin za mamou. Práve vyraďovala v škôlke hračky, s ktorými sa deti už nehrajú. Boli medzi nimi aj staré drevené kocky, všetky rovnako veľké. „Mami, tie kocky nevyhadzuj, s kamarátom Jarom ich natrieme celé na bielo alebo na modro. Budú ako nové a poslúžia deťom ako stavebnica. Chcem, aby sa z nich dala postaviť veľká kocka tak, aby sa v nej pravidelne striedali biele a modré kocky." „Aj vnútri sa majú striedať?" spýtala sa pre istotu mama. „Hej, aj vnútri. Dve kocky, ktoré sa budú dotýkať stenami, nesmú mať rovnakú farbu," potvrdil Martin. Nakreslil mame obrázok, ako si veľkú kocku predstavuje.



**Úloha 1:** Koľko starých kociek potrebuje Martin na postavenie svojej veľkej kocky?

Odpoveď: ..........................................................................................................................

**Úloha 2:** Koľko z nich musia chlapci natrieť na modro? Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
| --- |
| |

Odpoveď: ..........................................................................................................................


Keď boli chlapci s prácou hotoví, začali sa s kockami hrať. Martin si želal, aby mu Jaro postavil veľkú kocku, ktorá bude „najmodrejšia" – bude mať na povrchu čo najviac modrých štvorčekov. Musí pritom ale použiť všetky malé kocky. „Je to ľahké, už viem, ako umiestniť modré kocky", vraví Jaro po chvíli rozmýšľania.

**Úloha 3:** Ako musí Jaro umiestniť modré kocky, aby postavil „najmodrejšiu" kocku?

Odpoveď: ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**Úloha 4:** Koľko modrých štvorčekov je na povrchu tejto „najmodrejšej“ kocky? Zapíšte svoj výpočet.

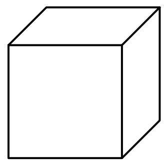
Výpočet:

Odpoveď: ..........

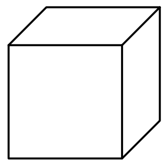
Potom si Jaro želal, aby mu Martin zo všetkých malých kociek postavil veľkú kocku, ktorá bude mať tri steny biele. „A ostatné steny?“ spýtal sa Martin. „Tie môžu byť aké chcú. Podstatné je, aby tri steny boli celé biele,“ vysvetľoval Jaro. Martin sa zamyslel a hovorí: „Musíš si ale vybrať, ktoré tri steny to majú byť. Sú totiž dve možnosti, ako na kocke tie tri biele steny umiestniť.“

**Úloha 5:** Opíšte dve možnosti, ako môžu byť umiestnené tri biele steny.

Prvá možnosť – opis:



Druhá možnosť – opis:



**Úloha 6:** Pozrime sa teraz na prvú možnosť z predchádzajúcej úlohy. Zistite, či sa dá postaviť kocka, na ktorej budú biele tie steny, ktoré ste opísali v prvej možnosti. Nezabudnite, že Martin musí pri stavbe použiť všetky malé kocky.

Zakrúžkujte správnu z dvoch možností *dá sa – nedá sa postaviť* a svoju odpoveď zdôvodnite.

Prvá možnosť: Kocka sa dá – nedá postaviť.

Zdôvodnenie:

Tú istú úlohu riešte pre druhú možnosť z úlohy 5.

Druhá možnosť: Kocka sa dá – nedá postaviť.

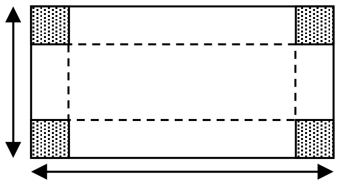
Zdôvodnenie:

**Úloha 7:** Akú najväčšiu kocku s celým povrchom bielym môžu chlapci postaviť?

Odpoveď: ..........

## ŠKATUĽKY

Z dvoch obdĺžnikových kartónov s rozmermi 28 cm a 14 cm si Ivo a Emil vyrábali dve škatuľky na odkladanie farbičiek. Ivo vystrihol z každého rohu štvorec so stranou dlhou 4 cm. Pozdĺž čiarkovaných čiar vyhol kartón nahor a lepiacou páskou zlepil bočné steny škatuľky:




Emil postupoval podobne. Rozdiel bol len v tom, že v každom rohu vystrihol štvorec so stranou dlhou 2 cm.

Škatuľky ešte neboli ani hotové a Ivo s Emilom už začali spor o tom, ktorá z nich bude lepšia.

Emil: „Moja škatuľka bude dlhšia, širšia aj vyššia ako tvoja."

Ivo: „Ale do mojej škatuľky sa zmestí viac farbičiek, lebo bude mať väčší objem ako tvoja."

**Úloha 1:** Aké rozmery majú škatuľky chlapcov?

Odpoveď: Ivova škatuľka má rozmery ............................................................................................ .

Emilova škatuľka má rozmery ........................................................................................ .

**Úloha 2:** Aké objemy majú škatuľky? Zapíšte svoj výpočet. Odpoveď uveďte v $cm^3$.

Výpočet:

Odpoveď: Ivova škatuľka má objem ........................... $cm^3$, Emilova škatuľka má objem ........................... $cm^3$.

**Úloha 3:** Ktorý z chlapcov hovoril pravdu o svojej škatuľke? Svoju odpoveď vysvetlite.

Odpoveď: Pravdu ..............................................................................................................................

Vysvetlenie:

Ivova sestra Janka potrebuje podobnú škatuľku na uloženie korálikov, ktoré má odložené v prasknutom pollitrovom pohári.

Chlapci sa dali do počítania. Potrebujú zistiť, či sa z kartónu s rozmermi 28 cm × 14 cm dá zhotoviť škatuľka, ktorá by mala objem aspoň 0,5 l. Aby sa im ľahšie pracovalo, chcú, aby rozmery škatuľky boli celé centimetre alebo polcentimetre (teda celočíselné násobky 5 mm).

**Úloha 4:** Ak Ivo s Emilom počítali správne, k akej odpovedi dospeli? Zakrúžkujte správnu z možností *dá – nedá sa* zhotoviť a svoju odpoveď zdôvodnite. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet a zdôvodnenie: |
|---|
| |

Odpoveď: Škatuľka sa dá – nedá zhotoviť.

Emil a Ivo sa rozhodli, že každú stenu svojej škatuľky zvonka oblepia ozdobným papierom.

**Úloha 5:** Bude každému z nich stačiť na oblepenie celej škatuľky ozdobný papier tvaru obdĺžnika s rozmermi 40 cm × 10 cm? Zakrúžkujte pre každú škatuľku správnu z dvoch možností *bude – nebude* stačiť. Zapíšte svoj výpočet a svoju odpoveď zdôvodnite.

| Výpočet a zdôvodnenie: |
|---|
| |

Odpoveď: Emilova škatuľka: ozdobný papier bude – nebude stačiť.

Ivova škatuľka: ozdobný papier bude – nebude stačiť.

Emilova staršia sestra chodí na vysokú školu. Vypočítala, že škatuľa vyrobená z kartónu s rozmermi $a$ cm × $b$ cm má maximálny objem vtedy, keď z každého rohu kartónu odstrihneme štvorec so stranou dlhou

$$\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} \text{ cm.}$$

**Úloha 6:** Zistite pomocou tohto vzťahu, aký najväčší objem môže mať škatuľa vyrobená z obdĺžnikového kartónu s rozmermi 21 cm × 45 cm. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Objem škatule bude ................. cm$^3$.

## TARIFY ELEKTRICKEJ ENERGIE


V roku 2007 zverejnila energetická spoločnosť ponuku dvoch taríf elektrickej energie pre domácnosti:

*Tarifa D1* (pre odberné miesta s nižšou spotrebou elektriny). Sadzba je zložená z

- pevnej mesačnej platby 7,12 Sk/mesiac,
- tarify za elektrinu 4,62 Sk/kWh.

*Tarifa D2* (pre odberné miesta s vyššou spotrebou elektriny). Sadzba je zložená z

- pevnej mesačnej platby 145,00 Sk/mesiac,
- tarify za elektrinu 3,31 Sk/kWh.

**Úloha 1:** Vypočítajte, koľko zaplatí podľa tarify D1 za spotrebu energie domácnosť, ktorá od 1.8.2007 do 29.2.2008 spotrebovala 900 kWh.

Výpočet:

Odpoveď: ..................................................................................................................

**Úloha 2:** Vypočítajte, koľko zaplatila domácnosť za jeden rok, ak si vybrala tarifu D2 a za tento rok spotrebovala 1 000 kWh elektrickej energie.

Výpočet:

Odpoveď: ..................................................................................................................

**Úloha 3:** Ktorú tarifu si má domácnosť vybrať, ak jej odhadovaná spotreba za rok je 1 300 kWh? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..................................................................................................................

**Úloha 4:** Domácnosť Novákovcov zaplatila za polročné obdobie niečo vyše 4 000 korún. Koľko kWh za tento čas spotrebovali? Zapíšte svoj výpočet.

Výpočet:

Odpoveď: ..........................................................................................................................................

**Úloha 5:** Domácnosť, ktorá si vybrala tarifu D2, spotrebovala za rok $x$ kWh elektrickej energie. Zapíšte pomocou $x$ cenu, ktorú táto domácnosť zaplatí za svoju spotrebu.

Výpočet:

Odpoveď: cena = ......................................... Sk

**Úloha 6:** Pre tarifu D1 narysujte graf, ktorý znázorňuje závislosť ceny $C$, ktorú zaplatí domácnosť za rok, od množstva $x$ kWh, ktoré spotrebovala počas tohto roka. Použite mierky 1 cm ≈ 200 kWh, 1 cm ≈ 1 000 Sk.

Miesto na narysovanie grafu:

**Úloha 7:** Určte, pri akej ročnej spotrebe je výhodnejšia tarifa D1 a pri akej tarifa D2. Zapíšte svoj výpočet. V odpovedi uveďte hodnoty spotreby zaokrúhlené na desatiny kWh.

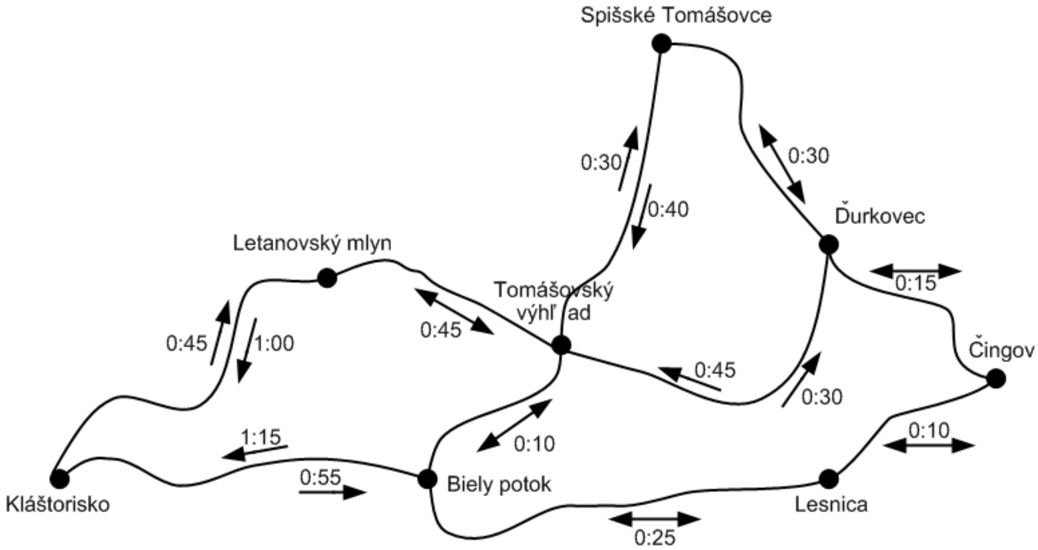
Výpočet:

Odpoveď: Tarifa D1 je výhodnejšia pri spotrebe .......................................... kWh,

tarifa D2 je výhodnejšia pri spotrebe ........................................... kWh.

## TURISTIKA

Trieda 9.A si spolu s triednou učiteľkou plánovala záverečný školský výlet. Rozhodli sa, že pôjdu do Slovenského raja. Pred odchodom si z internetu vytlačili mapu turistických trás (pozri obrázok).




**Úloha 1:** Koľko minút podľa tejto mapy trvá turistická vychádzka z Čingova priamo na Lesnicu a späť?

Odpoveď: Turistická vychádzka z Čingova na Lesnicu a späť trvá ................. minút.

**Úloha 2:** Janka si všimla, že cesta z Bieleho potoka na Kláštorisko trvá dlhšie ako cesta opačným smerom. Vysvetlite, prečo je to tak.

| Vysvetlenie: |
|---|
| |
| |

*Pri zapisovaní riešení úloh 3 a 4 môžete použiť skratky, napr. BP = Biely potok, L = Lesnica.*

Jožko povedal spolužiakom, že s nimi pôjde na túru iba vtedy, ak aj s krátkou prestávkou pôjdu približne tri hodiny. Omnoho dlhšie sa mu ísť nechce a kvôli túre oveľa kratšej sa mu vraj ani neoplatí obuť.

**Úloha 3:** Navrhnite tri rôzne vychádzky, ktoré začínajú aj končia na Čingove a vyhovujú Jožkovi.

Odpoveď: Prvý návrh: ..........................................................................................

Druhý návrh: ........................................................................................

Tretí návrh: ..........................................................................................

Učiteľka chcela prejsť počas túry po každej ceste najviac raz, ale chcela prejsť cez každú vyznačenú zastávku. Zaujímalo ju, ako dlho by takýto výlet trval.

**Úloha 4:** Akú najkratšiu a akú najdlhšiu turistickú vychádzku viete pomocou mapy za uvedených podmienok vytvoriť?

Odpoveď: Najkratšia trasa: ...................................................................................

Najdlhšia trasa: .....................................................................................

## VÝMENA OKIEN

Pán Veselý chce na svojom dome vymeniť pôvodné okná za nové plastové. Na základe jeho požiadaviek mu firma, u ktorej si výmenu okien objednal, poslala túto cenovú ponuku:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cenová ponuka č. : 36296 – OBJEDNÁVKA<br>Sumár | | | |
| Výrobky | Okná | | **6 178,00 €** |
| | Parapetné dosky | z toho: vnútorné : 229,00 €<br>vonkajšie: 190,00 € | **419,00 €** |
| | Žalúzie retiazkové | | **509,62 €** |
| | Pevné siete na okná proti hmyzu | | **145,00 €** |
| Montážne práce spolu | | z toho:<br>osadzovanie okien: 429,00 €<br>demontáž okien : 129,00 €<br>doprava: 19,00 € | **577,00 €** |
| Všetky ceny v tabuľke sú uvedené bez DPH.<br>Pri výpočte celkovej sumy vám bude účtované 19 % DPH.<br>Nakoľko vaša objednávka presiahla sumu 6 500,00 €, firma vám poskytne nasledovnú zľavu:<br>zľava: okná: 40 %<br>montážne práce: 20 % | | | |

**Úloha 1:** V cenovej ponuke firma uvádza, že pánovi Veselému poskytne zľavu z niektorých uvedených súm. Akú cenu bez DPH (daň z pridanej hodnoty) by mal pri uplatnení tejto zľavy pán Veselý zaplatiť za

a) okná?

b) parapetné dosky?

c) montážne práce?

Zapíšte svoje výpočty. Sumy uvádzajte s presnosťou na stotiny eura.

| |
|---|
| Výpočet:<br><br><br><br> |

Odpoveď: Pán Veselý by mal zaplatiť za okná ................ €, za parapetné dosky .................... € a za montážne práce ................ €.

**Úloha 2:** Koľko eur z celkovej sumy, ktorú by mal zaplatiť pán Veselý, je DPH? Zapíšte svoj výpočet. Výsledok zaokrúhlite na stotiny eura.

| |
|---|
| Výpočet:<br><br> |

Odpoveď: DPH je ................ €.

V nasledujúcej úlohe nás bude zaujímať, akú úsporu pánovi Veselému prinesie zľava, ktorú mu firma v cenovej ponuke poskytla.

**Úloha 3:** O koľko eur väčšia by bola celková suma, ktorú by pán Veselý zaplatil v prípade, že by mu firma neposkytla zľavu? Zapíšte svoj výpočet. Výsledok zaokrúhlite na stotiny eura.

Výpočet:

Odpoveď: Celková suma by bola o .......................... € väčšia.

Pán Veselý s cenovou ponukou firmy súhlasil. Uzatvoril preto s firmou zmluvu o dielo. V nej sa zmluvné strany (firma = zhotoviteľ a pán Veselý = objednávateľ) dohodli na týchto platobných podmienkach:

*Celé dielo bude zhotovené a odovzdané po uhradení zálohy do 1.10.2009. Montážne práce začnú 8.9.2009.*

*Termín zaplatenia zálohy je 17.8.2009. Výška zálohy je 70 % z celkovej ceny zákazky.*

*Objednávateľ je povinný uhradiť ďalších 25 % ceny zákazky do 10 dní od odovzdávacieho konania.*

*Objednávateľ je povinný uhradiť posledných 5 % ceny zákazky do 10 dní od preberacieho konania.*

*Ak objednávateľ nezaplatí fakturovanú cenu v lehotách daných týmito podmienkami, zhotoviteľ bude môcť účtovať objednávateľovi úrok z omeškania platby vo výške 0,05 % denne z dlžnej sumy až do jej zaplatenia.*

*Dielo zostáva až do zaplatenia celej ceny za dielo vlastníctvom zhotoviteľa.*

Cenu zakázky vrátane DPH stanovili na 6 250 €.

**Úloha 4:** Zistite, v ktorej z nasledujúcich troch tabuliek sú dátumy v súlade s platobnými podmienkami. Ak údaje v tabuľke nespĺňajú tieto podmienky, vypočítajte sumu, ktorú môže firma účtovať pánovi Veselému za omeškanie platby. Zapíšte svoj výpočet. Sumu zaokrúhlite na stotiny eura.

*Tabuľka č. 1*

| **Začiatok montáže** | **Odovzdávacie konanie** | **Preberacie konanie** |
|---|---|---|
| 8.9.2009 | 18.9.2009 | 1.10.2009 |
| **Termín zaplatenia** | | |
| zálohy 70 % | 25 % | 5 % |
| 17.8.2009 | 21.9.2009 | 18.10.2009 |

*Tabuľka č. 2*

| **Začiatok montáže** | **Odovzdávacie konanie** | **Preberacie konanie** |
|---|---|---|
| 8.9.2009 | 18.9.2009 | 1.10.2009 |
| **Termín zaplatenia** | | |
| zálohy 70 % | 25 % | 5 % |
| 17.8.2009 | 8.10.2009 | 8.10.2009 |

*Tabuľka č. 3*

| **Začiatok montáže** | **Odovzdávacie konanie** | **Preberacie konanie** |
|---|---|---|
| 8.9.2009 | 18.9.2009 | 1.10.2009 |
| **Termín zaplatenia** | | |
| zálohy 70 % | 25 % | 5 % |
| 17.8.2009 | 25.9.2009 | 4.10.2009 |

Výpočet:

Tabuľka č. 1:

Tabuľka č. 2:

Tabuľka č. 3:

Odpoveď: *Tabuľka č. 1*: Dátumy *sú – nie sú* v súlade s platobnými podmienkami. Za omeškanie platby môže firma pánovi Veselému účtovať sumu ................................ €.

*Tabuľka č. 2*: Dátumy *sú – nie sú* v súlade s platobnými podmienkami. Za omeškanie platby môže firma pánovi Veselému účtovať sumu ................................ €.

*Tabuľka č. 3*: Dátumy *sú – nie sú* v súlade s platobnými podmienkami. Za omeškanie platby môže firma pánovi Veselému účtovať sumu ................................ €.

## ZEMETRASENIA

Zemetrasenie je náhle uvoľnenie energie pod zemským povrchom. Prejavuje sa chvením a otrasmi. Z miesta, v ktorom zemetrasenie vzniklo, sa všetkými smermi šíria *seizmické vlny*. Existujú dva hlavné typy týchto vĺn: pozdĺžne (P) a priečne (S).

P-vlny sa šíria rýchlejšie ako S-vlny. Prístroj na zaznamenávanie seizmických vĺn – *seizmometer* – preto najprv zachytí pozdĺžne vlny a až neskôr priečne. Z dĺžky doby, ktorá uplynie medzi zaznamenaním pozdĺžnych a priečnych vĺn, sa dá určiť vzdialenosť od miesta zemetrasenia. Ukážeme si to v úlohách 1 a 2 na príklade záznamu seizmickej stanice Albuquerque v Novom Mexiku.

Táto seizmická stanica zaznamenala 17.1.1994 priečne vlny so 169-sekundovým oneskorením v porovnaní s pozdĺžnymi vlnami. Priemerná rýchlosť P-vĺn bola 7,7 km/s, priemerná rýchlosť S-vĺn 3,5 km/s.

Albín si myslí, že vzdialenosť stanice Albuquerque od miesta zemetrasenia bola 709,8 km. Vypočítal to tak, že rozdiel rýchlostí ($7{,}7 - 3{,}5 = 4{,}2$ km/s) vynásobil dobou oneskorenia (169 s):

$$4{,}2 \cdot 169 = 709{,}8 \text{ km}.$$

Peter je presvedčený, že Albínov výsledok je nesprávny. Preto urobil skúšku správnosti. Vypočítal, koľko je $709{,}8 : 7{,}7$ a $709{,}8 : 3{,}5$ a tvrdí: „Keby vzdialenosť bola 709,8 km, tak by muselo platiť

$$\frac{709{,}8}{3{,}5} - \frac{709{,}8}{7{,}7} = 169 \text{ .“}$$

**Úloha 1:** Vysvetlite, prečo Peter počítal čísla $709{,}8 : 7{,}7$ a $709{,}8 : 3{,}5$.

| Vysvetlenie: |
|---|
| |
| |

**Úloha 2:** Rozhodnite, či Albínov výsledok je alebo nie je správny. Zakrúžkujte správnu z dvojice možností *je* – *nie je* a svoju odpoveď zdôvodnite.

Odpoveď: Albínov výsledok je – nie je správny.

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |

Petrova skúška správnosti nám môže pomôcť pri nájdení vzdialenosti stanice Albuquerque od miesta zemetrasenia. Stačí v nej číslo 709,8 nahradiť písmenom *s*, ktoré bude označovať hľadanú vzdialenosť. Dostaneme tak rovnicu s neznámou *s*.

**Úloha 3:** Zapíšte túto rovnicu a nájdite jej riešenie. Výsledok zaokrúhlite na celé kilometre.

| Rovnica s neznámou *s*: |
|---|
| Riešenie rovnice: |

Odpoveď: Vzdialenosť stanice Albuquerque od miesta zemetrasenia bola približne ........................ km.

Dňa 30. novembra 2004 otriaslo strednou Európou zemetrasenie, ktoré pocítili aj mnohí obyvatelia Slovenska. Zaznamenali ho európske seizmické stanice aj stanice Národnej siete seizmických staníc na Slovensku.

V nasledujúcej tabuľke uvádzame pre toto zemetrasenie

- čas príchodu P-vlny a S-vlny na tri seizmické stanice: stanicu Vyhne (VYHS), stanicu Červenica (CRVS) a českú seizmickú stanicu Ostrava-Krásné Pole (OKC),
- priemerné rýchlosti šírenia sa pozdĺžnych P-vĺn a priečnych S-vĺn pre každú z uvedených troch seizmických staníc.

| | čas príchodu | | priemerná rýchlosť šírenia sa | |
|---|---|---|---|---|
| | P-vlny | S-vlny | P-vlny [km/s] | S-vlny [km/s] |
| Vyhne (VYHS) | 17 hod 18′ 57,9′′ | 17 hod 19′ 15,4′′ | 6,30 | 3,37 |
| Červenica (CRVS) | 17 hod 18′ 57,7′′ | 17 hod 19′ 15,9′′ | 6,50 | 3,30 |
| Ostrava-Krásné Pole (OKC) | 17 hod 18′ 59,6′′ | 17 hod 19′ 17,0′′ | 6,53 | 3,60 |

V zápise času jedna čiarka (′) označuje minúty, dve čiarky (′′) sekundy.

**Úloha 4:** Vypočítajte vzdialenosť miesta zemetrasenia od seizmických staníc VYHS, CRVS a OKC. Zapíšte svoj výpočet. Výsledok zaokrúhlite na desatiny kilometra.

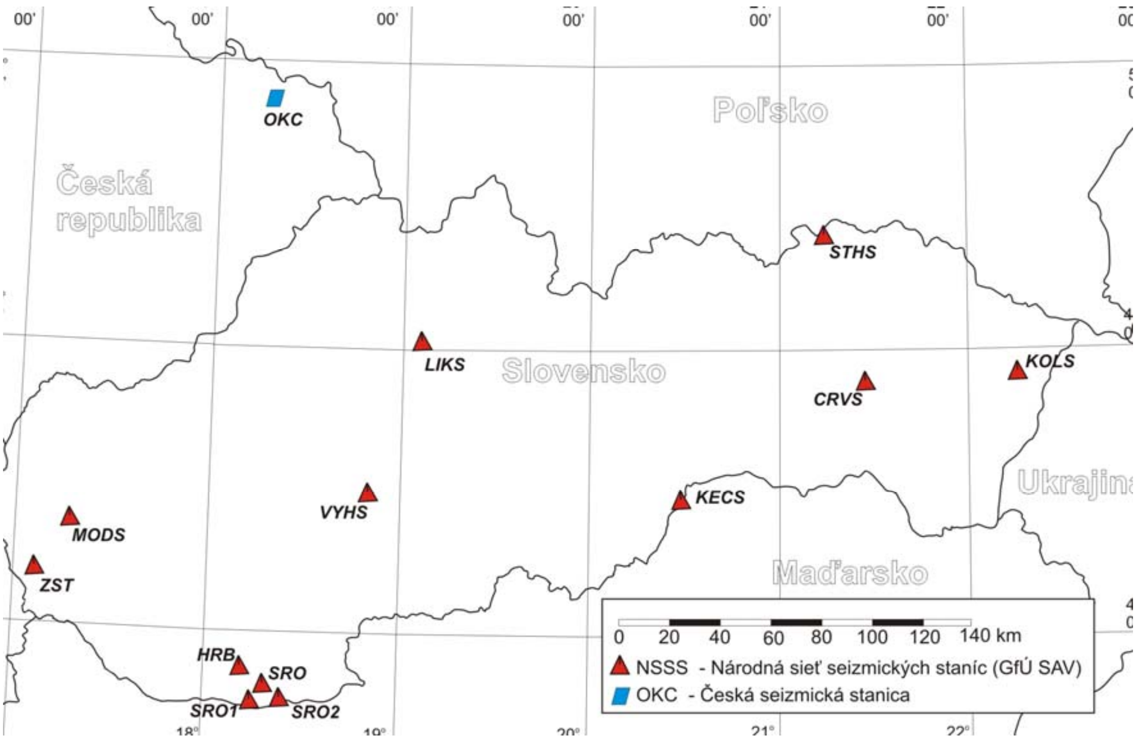
Výpočet:

Odpoveď: Miesto zemetrasenia bolo vzdialené od stanice Vyhne .......................................... km, od stanice Červenica ............ km a od stanice Ostrava-Krásné Pole ................... km.

**Úloha 5:** Vypočítanú vzdialenosť od miesta zemetrasenia možno použiť pri určovaní miesta zemetrasenia na mape. Opíšte, ako možno na základe výsledkov predchádzajúcej úlohy určiť miesto zemetrasenia na mape.

Opis:

**Úloha 6:** Na priloženej mapke rysovaním približne určte miesto zemetrasenia.

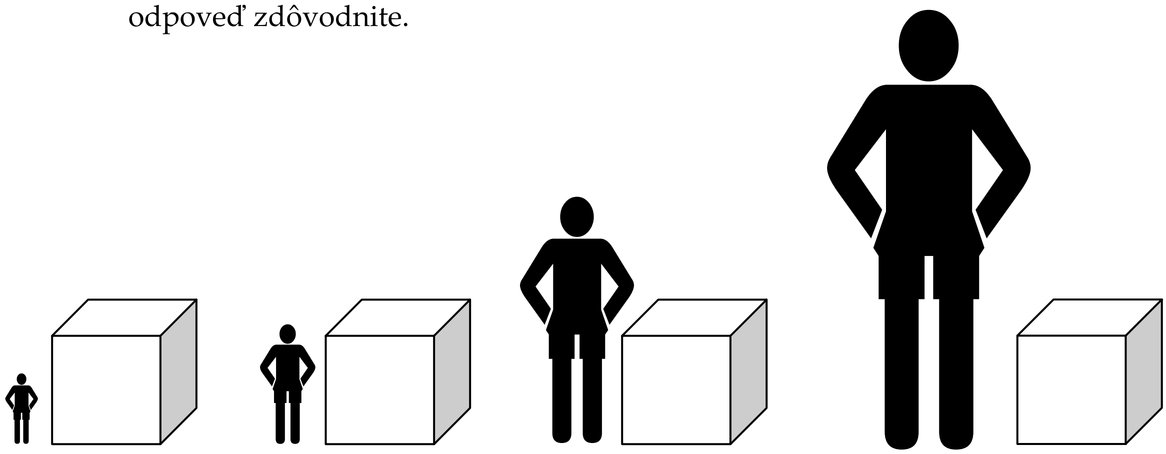


## ZLATO

Rýdze zlato je dosť ťažké: kocka s hranou 1 cm má hmotnosť 19,29 g. Kilogramová tehlička rýdzeho zlata na obrázku má veľkosť asi ako mobilný telefón.

Zaujíma nás, aká veľká by bola kocka z rýdzeho zlata, ktorá by vážila 1 tonu. Bola by vyššia ako dospelý človek, približne rovnako vysoká alebo by mu siahala po pás alebo len po kolená?

**Úloha 1:** Ktorý z nasledujúcich obrázkov zobrazuje správne výšku dospelého človeka, ktorý stojí vedľa kocky z rýdzeho zlata s hmotnosťou 1 tona? Číslo vybraného obrázku zakrúžkujte a svoju odpoveď zdôvodnite.



1. 2. 3. 4.

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |

V rozprávkach občas niekomu ponúkajú „toľko zlata, koľko sám váži“. Napríklad, podľa povesti o hrade Beckov zaň Ctibor I. dal šašovi Beckovi takú hŕbu zlata, koľko vážil šašo.

**Úloha 2:** Predstavte si, že ste šašo Becko. Aká veľká by bola kocka z rýdzeho zlata, ktorú by ste dostali za hrad? Vypočítajte dĺžku jej hrany s presnosťou na celé centimetre.

| Výpočet: |
|---|
| Moja hmotnosť je ................. kg. |

Odpoveď: Hrana kocky by mala dĺžku približne ................ cm.

Zlato sa dá roztepať na pliešok hrúbky približne 0,000 1 mm. Takýto tenký pliešok sa nazýva *lístkové zlato*. Používa sa napríklad na pozlátenie kostolných veží alebo sôch. Na porovnanie: hrúbka novinového papiera je asi 0,07 mm.

**Úloha 3:** Koľko $m^2$ lístkového zlata hrúbky 0,000 1 mm možno vyrobiť z 1 kg rýdzeho zlata? Výsledok zaokrúhlite na celé $m^2$. Zapíšte svoj výpočet.

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: približne ...................... $m^2$

Tajný sen pána Róberta je mať pozlátenú sochu seba samého v životnej veľkosti. Aby zistil, koľko gramov zlata by potreboval na jej pozlátenie, vypočítal pán Róbert veľkosť povrchu svojho tela. Použil približný vzorec

$$\text{povrch tela}\,[\mathrm{m}^2] = \sqrt{\frac{\text{hmotnosť [kg]} \cdot \text{výška[cm]}}{3\,600}}\,,$$

výsledok zaokrúhlil na stotiny.

**Úloha 4:** Koľko gramov lístkového zlata hrúbky 0,000 1 mm by potreboval pán Róbert, ak jeho hmotnosť je 96 kg a výška 173 cm? Zapíšte svoj výpočet, výsledok zaokrúhlite na celé gramy.

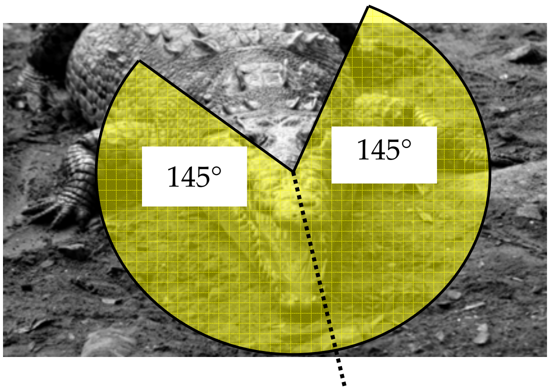
| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Na pozlátenie svojej sochy v životnej veľkosti by pán Róbert potreboval asi

................. g zlata.

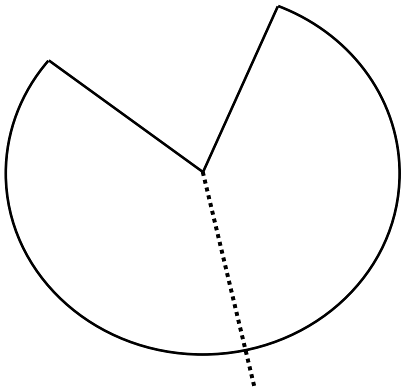
## ZORNÉ POLE

*Zorné pole* je oblasť, ktorú dokážu oči obsiahnuť bez toho, aby sa pohybovali (tj. pri pohľade fixovanom na jeden bod). Na obrázku je znázornené zorné pole krokodíla. Toto *zorné pole* má zorný uhol 290°. To znamená, že krokodíl vidí čiastočne aj „za seba“.




*obr. 1*

**Úloha 1:** Do obrázka 2 znázornite tú časť videnia, ktorú sme nazvali „videnie za seba“. Aký uhol v stupňoch vyjadruje toto „videnie za seba“ pre každé oko? Zapíšte svoj výpočet.

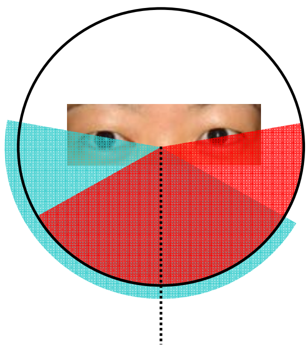


*obr. 2*

| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Je to pre každé oko uhol ......................... stupňov.

Uhol celkového zorného poľa človeka (obidvoch očí) je asi 200°. Zorný uhol jedného oka je asi 160°. Prienik zorného poľa pravého a ľavého oka (teda oblasť, ktorú vidíme obidvomi očami súčasne) je oblasť, ktorú dokážeme vidieť priestorovo (trojrozmerne).



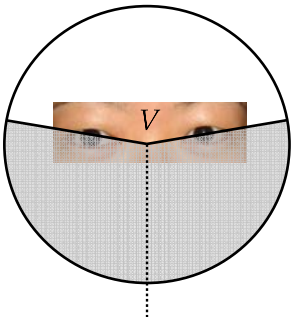

*obr. 3*

**Úloha 2:** Vypočítajte veľkosť zorného uhla oblasti, ktorú vidíme priestorovo.

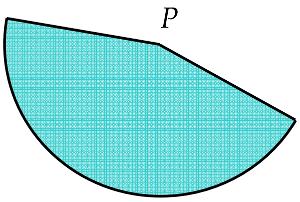
| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Táto oblasť má zorný uhol ........................... stupňov.

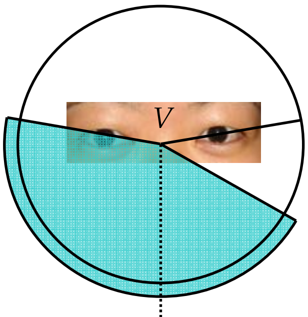
Obrázok 3 z predchádzajúcej úlohy je trocha zjednodušený: Do celkového zorného poľa (obr. 4) sme uhol pre zorné pole pravého oka (obr. 5) umiestnili tak, aby jeho vrchol $P$ ležal v bode $V$ (obr. 6).



*obr. 4*

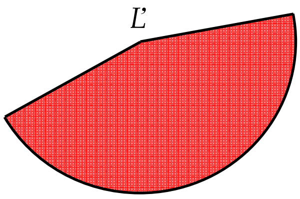


*obr. 5*

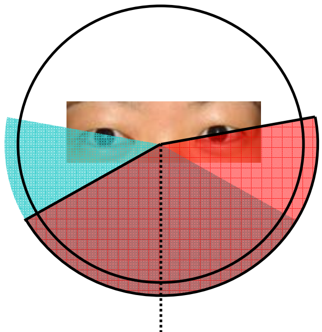


*obr. 6*

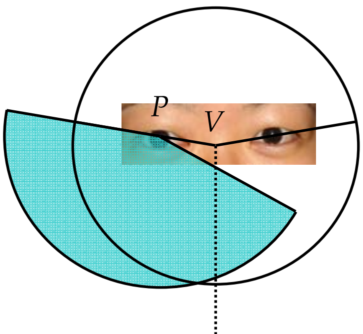
Rovnako sme postupovali so zorným poľom ľavého oka (obrázky 7 a 8).



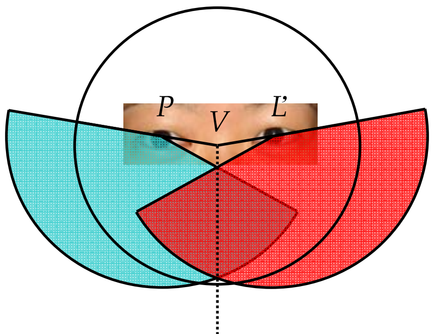
*obr. 7*


*obr. 8*

Skutočnosti by viac zodpovedalo, keby sme vrchol $P$ umiestnili do pravého oka (obr. 9) a vrchol $Ľ$ do ľavého oka (obr. 10).

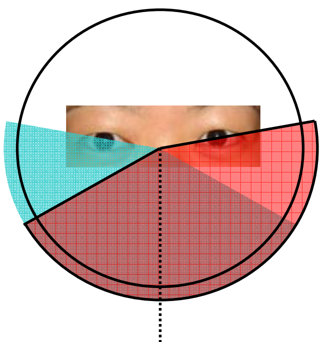


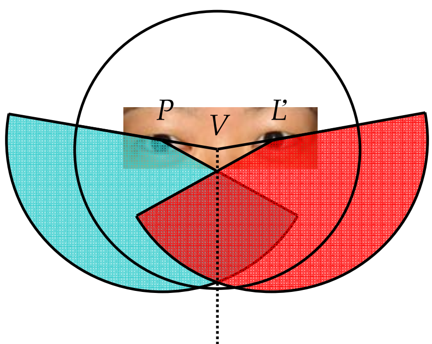
*obr. 9*



*obr. 10*

Ak porovnáme obrázky 8 a 10, vidíme, že oblasť, ktorú vidíme priestorovo, je na nich zobrazená rozdielne. Zaujíma nás, či zjednodušenie, ktoré sme použili na obr. 8, mohlo zmeniť veľkosť zorného uhla oblasti, ktorú vidíme priestorovo.


(*obr. 8*)



(*obr. 10*)

**Úloha 3:** Má oblasť priestorového videnia znázornená na obr. 8 rovnaký zorný uhol ako oblasť priestorového videnia na obr. 10? Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite ju.

Odpoveď: áno nie

| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |

V porovnaní s človekom má pes celkové zorné pole väčšie, až 240°. Oblasť, ktorú vidí pes obidvomi očami súčasne, je ale menšia, asi 60°.

**Úloha 4:** Narysujte do obrázka 11 celkové zorné pole psa, zorné pole pravého a ľavého oka a farebne vyznačte oblasť, ktorú pes vidí priestorovo.

*obr. 11*

**Úloha 5:** Vypočítajte zorný uhol jedného oka psa.

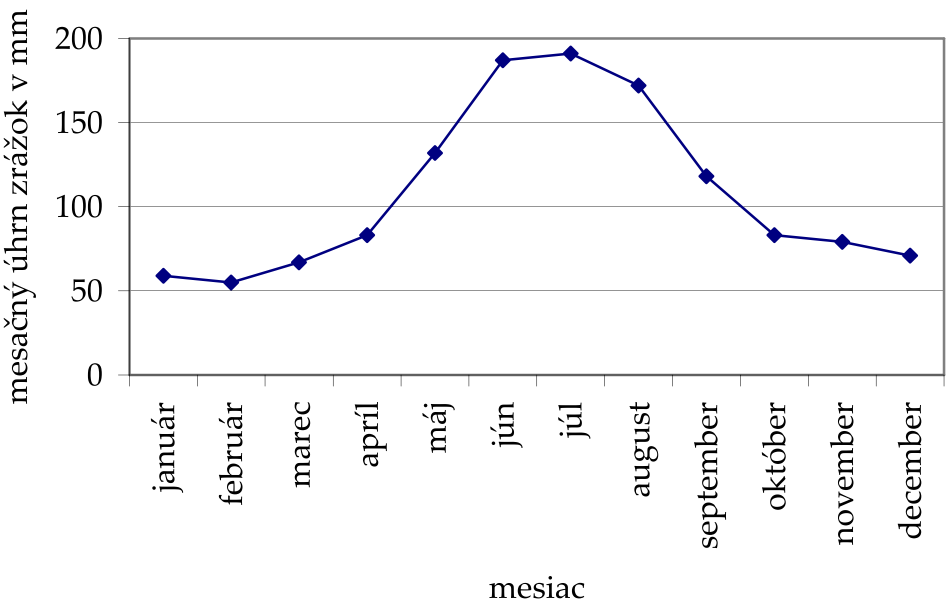
| Výpočet: |
|---|
| |

Odpoveď: Zorný uhol jedného oka psa je .................................. stupňov.

## ZRÁŽKY

Množstvo zrážok (dážď, sneh) sa udáva v milimetroch (mm), pritom 1 mm predstavuje 1 liter vody na 1 m². Ak sčítame množstvo zrážok, ktoré na danom mieste boli počas daného mesiaca, dostaneme *mesačný úhrn zrážok*.

Nasledujúci graf znázorňuje mesačný úhrn zrážok na Skalnatom plese v jednotlivých mesiacoch:




**Úloha 1:** Tvrdenia v nasledujúcej tabuľke sa týkajú predchádzajúceho grafu. O každom tvrdení rozhodnite, či je pravdivé alebo nepravdivé. Ak si myslíte, že je pravdivé, zakrúžkujte odpoveď *áno*, ak si myslíte, že je nepravdivé, zakrúžkujte odpoveď *nie*.

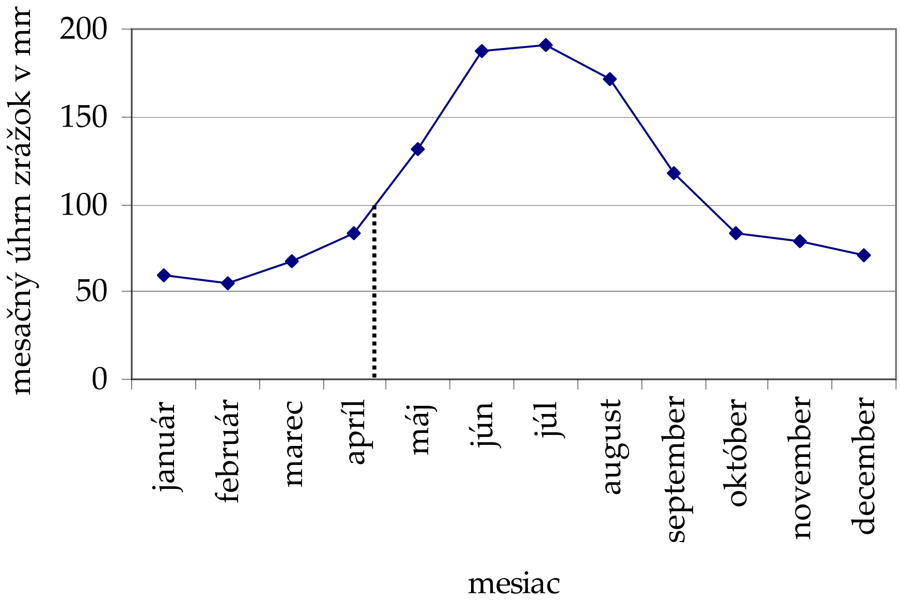
| | | |
|---|---|---|
| Najväčší mesačný úhrn zrážok bol v júli. | áno | nie |
| Mesačný úhrn zrážok nikdy neklesol pod 50 mm. | áno | nie |
| Po väčšinu roka je mesačný úhrn zrážok väčší ako 100 mm. | áno | nie |
| Mesačný úhrn zrážok je v decembri menší ako v januári. | áno | nie |
| Mesačný úhrn zrážok sa zväčšuje od januára po jún. | áno | nie |
| Nárast množstva zrážok medzi marcom a aprílom je menší ako medzi aprílom a májom. | áno | nie |
| Najväčší pokles množstva zrážok nastal medzi septembrom a októbrom. | áno | nie |

**Úloha 2:** Odhadnite čo najpresnejšie úhrn zrážok za 2. štvrťrok uvedeného roka.

Odpoveď: Úhrn zrážok za 2. štvrťrok bol približne .............................. mm.

**Úloha 3:** Janko do grafu prikreslil prerušovanú čiaru (pozri obrázok) a povedal: „Z grafu vidno, že ku koncu apríla spadlo na Skalnatom plese asi 100 mm zrážok.“

Má Janko pravdu? Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite ju.




Odpoveď: áno nie

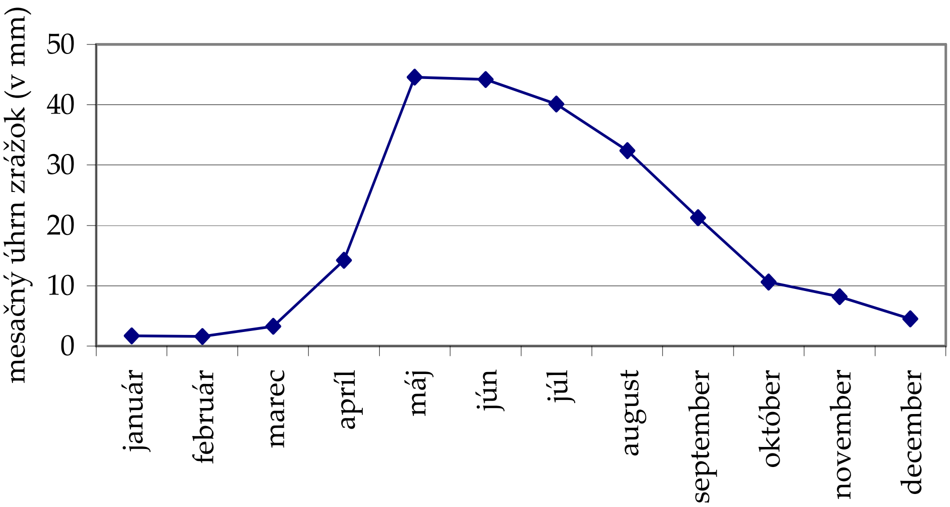
| Zdôvodnenie: |
|---|
| |
| |
| |
| |

*Zrážky a kaktusy*. Pre pestovateľov kaktusov sú zaujímavé údaje o množstvách zrážok v oblastiach, kde kaktusy rastú. O Mexiku sme sa dočítali v časopise pre kaktusárov toto:

*Mexiko sa z pohľadu pestovateľa kaktusov delí na tri oblasti: Prvé dve z nich sú*

- *oblasť s obdobím sucha v prvých mesiacoch roka, obdobie dažďov začína v apríli, dosahuje prvý slabší vrchol v júli s poklesom zrážok v auguste a s maximom zrážok v mesiacoch september až október,*
- *oblasť s maximom zrážok v máji až júni, ktoré sa postupne znižujú ku koncu roka a obdobie sucha trvá prvé mesiace v roku.*

**Úloha 4:** Nasledujúci graf množstva zrážok patrí k jednej z uvedených oblastí. Ku ktorej? Zakrúžkujte správnu odpoveď. Vysvetlite, prečo oblasť, ktorú ste nezakrúžkovali, nevyhovuje.

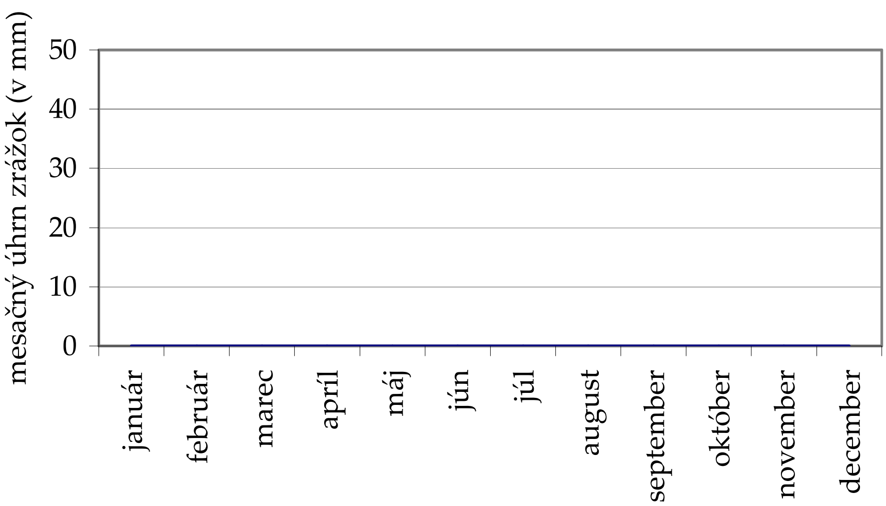



Odpoveď: Graf patrí k prvej – k druhej oblasti.

| Vysvetlenie: |
|---|
| |
| |

Text článku v časopise pre kaktusárov pokračuje: *Treťou oblasťou je Baja California a priľahlé časti štátu Sonora. Tu obdobie sucha začína v druhom-treťom mesiaci roka a trvá do prvej polovice roka, obdobie dažďov dosahuje svoj vrchol v auguste až septembri a pozvoľna doznieva až do konca januára.*

**Úloha 5:** Do nasledujúceho obrázka nakreslite graf množstva zrážok, ktorý by podľa informácií v článku mohol zodpovedať oblasti Baja California. V období sucha voľte hodnoty pod 10 mm, vo vrchole obdobia dažďov nad 40 mm.



## ŽUMPA

Bezdetní manželia Novákovci si kúpili rodinný dom. Budú v ňom bývať celoročne len sami dvaja. Pri dome je jama s obdĺžnikovým pôdorysom s rozmermi 2,5 m × 3,5 m a hĺbkou 2,5 m, v ktorej bola už nefunkčná žumpa. Žumpa je nádrž na zhromažďovanie znečistenej vody. Jej obsah sa musí pravidelne vyvážať fekálnym vozidlom.

Novákovci chcú do jamy umiestniť novú žumpu. Na internete si vyhľadali ponuky plastových hranatých žúmp (tieto žumpy majú tvar kvádra):

| Žumpy hranaté - rozmery | | | | |
|---|---|---|---|---|
| žumpa číslo | približný celkový objem ($m^3$) | šírka (mm) | dĺžka (mm) | výška (mm) |
| 1 | 2 | 1500 | 1000 | 1500 |
| 2 | 4 | 1500 | 2000 | 1500 |
| 3 | 6 | 1500 | 3000 | 1500 |
| 4 | 9 | 1500 | 4000 | 1500 |
| 5 | 12 | 2000 | 4000 | 1500 |
| 6 | 16 | 2000 | 4000 | 2000 |
| 7 | 20 | 2000 | 5000 | 2000 |

**Úloha 1:** V prvom stĺpci tabuľky zakrúžkujte číslo každej žumpy, ktorá sa zmestí do jamy pri dome.

Denná produkcia znečistenej vody, ktorá odtečie do žumpy, sa odhaduje na 120 litrov na osobu a deň.

**Úloha 2:** Vypočítajte, za koľko dní by pri tomto odhade Novákovci naplnili žumpu číslo 3. Pri výpočte vychádzajte z približného objemu, ktorý je uvedený v druhom stĺpci tabuľky. Svoj výpočet zapíšte.

Výpočet:

Odpoveď: ....................................................................................................................................

Novákovci plánovali, že žumpu nechajú vyvážať jedenkrát za dva mesiace.

**Úloha 3:** Vypočítajte, koľko litrov znečistenej vody vyprodukujú Novákovci za 2 mesiace. Potom zo všetkých žúmp v tabuľke vyberte rozmery najvhodnejšej novej žumpy. Svoj výpočet zapíšte.

Výpočet:

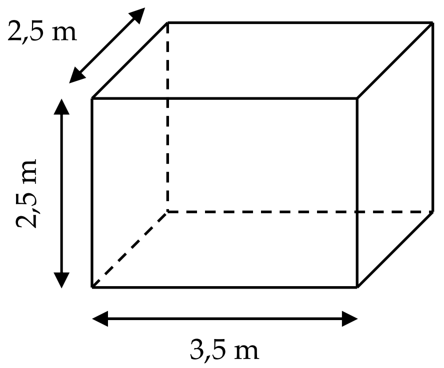
Odpoveď: Za 2 mesiace Novákovci vyprodukujú ........................... litrov znečistenej vody. Rozmery najvhodnejšej novej žumpy sú

............... mm × ............. mm × ............. mm.

Nová žumpa z úlohy 3 sa nezmestí do jamy pri dome. Preto bude treba jamu zväčšiť. Navyše

- jama pre žumpu má mať o 0,5 m väčšiu šírku a dĺžku než je šírka a dĺžka žumpy,
- dno jamy treba vybetónovať do výšky 20 cm,
- vrchná stena žumpy má byť 0,3 m pod úrovňou terénu.

**Úloha 4:** Na náčrte je jama pri dome. Dokreslite, ako navrhujete jamu zväčšiť tak, aby sa muselo vykopať čo najmenej zeminy. Vyznačte rozmery zväčšenej jamy.




**Úloha 5:** Vypočítajte s presnosťou na celé $m^3$, koľko zeminy vykopú pri zväčšovaní jamy pred osadením novej žumpy. Svoj výpočet zapíšte.

Výpočet:

Odpoveď: Vykopú približne ..................... $m^3$ zeminy.

**Úloha 6:** Konečne stojí v jame na betónovom podklade nová žumpa. Pán Novák ju podľa rady suseda chce obsypať hlinou a cementom v pomere 8:1 až po úroveň terénu. Bude na to stačiť zemina vykopaná pri rozširovaní jamy? Zakrúžkujte správnu z dvoch možností *zostane – bude chýbať* a vypočítajte tiež, koľko zeminy zostane alebo bude chýbať. Svoj výpočet zapíšte.

Výpočet:

Odpoveď: Zostane – bude chýbať približne .................... $m^3$ zeminy.

## METODICKÉ POZNÁMKY A RIEŠENIA ÚLOH



## AKCIA

1. Za nákup sme zaplatili **3 030** Sk. Nákup bol lacnejší o **9 %**.

   Akcia sa vzťahuje na
   - papuče: 600 Sk, zľava 30 %, $0{,}7 \cdot 600 = 420$, ušetrili sme 180 Sk,
   - ponožky: 300 Sk, zľava 40 %, $0{,}6 \cdot 300 = 180$, ušetrili sme 120 Sk.

   Akcia sa nevzťahuje na
   - topánky, modrú čiapku a sivú čiapku (len po jednom kuse): spolu 2 190 Sk,
   - pančuchy (akcia sa na ne nevzťahuje): 240 Sk.

   Zaplatili sme $420 + 180 + 2\,190 + 240 = 3\,030$ Sk, ušetrili sme 120 + 180 = 300 Sk.

   300 Sk je približne 9 % (9, 009...%) z ceny 3 330 Sk (cena bez zľavy).

   *Poznámka. Časť žiakov pravdepodobne nepostrehne drobný text dole na plagáte. Je pravdepodobné, že na základe vlastných skúseností žiakov vznikne diskusia napr. o tom, či sivá a modrá čiapka sú alebo nie sú dva rovnaké kusy.*

2. **70 %**

   Tri z možných riešení sú:
   1. Nech 1 sveter stál 100 Sk. 3 svetre by stáli 300 Sk, zľava 30 % je $0{,}3 \cdot 300 = 90$. Sused platil $300 - 90 = 210$ Sk 4 svetre by stáli 400 Sk, zľava 40 % je $0{,}4 \cdot 400 = 160$. Sused by zaplatil $400 - 160 = 240$ Sk. Ja by som susedovi doplatil $240 - 210 = 30$ Sk. Moja zľava by bola 70%.
   2. Nech 1 sveter stál $C$ Sk. Potom 3 svetre stáli 3 $C$, zľava 30 % je $0{,}3 \cdot 3\,C = 0{,}9\,C$. Sused teda platil $3\,C - 0{,}9\,C = 21\,C$. 4 svetre by stáli 4 $C$, zľava 40 % je $0{,}4 \cdot 4\,C = 1{,}6\,C$. Sused by platil $4\,C - 1{,}6\,C = 2{,}4\,C$. Ja by som susedovi doplatil $2{,}4\,C - 2{,}1\,C = 0{,}3\,C$. Moja zľava by bola 70 %.
   3. Za 4 svetre by „vrátili“ $4 \cdot 40\,\% = 160\,\%$ ceny jedného svetra, za 3 svetre by vrátili $3 \cdot 30\,\% = 90\,\%$ ceny jedného svetra. Rozdiel vráteného $(160 - 90 = 70)$ by som ušetril ja, to je 70 % ceny jedného svetra.

3. **130/3 = 43,333 ... %**

   Úlohu možno podobne ako úlohu 2 riešiť viacerými spôsobmi, najjednoduchší je asi tento: Za 4 kusy by „vrátili“ $4 \cdot 40\,\% = 160\,\%$ ceny jedného kusu. Z týchto 160 ja by som získal 30, susedovi by zostalo 130. To znamená: mne by za 1 sveter „vrátili“ 30 %, susedovi by za 3 svetre „vrátili“ 130 %, teda na jeden susedov sveter pripadá 130/3 % ceny jedného kusu.

   Rovnaký výsledok dostaneme riešením rovnice $30 + 3\,x = 4 \cdot 40$.

4. **V KUBUSe.**

   V obchode KUBUS ušetríte pri kúpe troch kusov cenu celého kusu, teda 100 %, v obchode TORUS len $3 \cdot 30\,\% = 90\,\%$.

5. **60 kusov**

   V KUBUSe sa 3 kusy predávajú za cenu dvoch po 250 Sk, teda za 500 Sk. Keď v TORUSe nakúpime väčšie množstvo, dostaneme zľavu 40 %. Teda za každý kus zaplatíme $0{,}6 \cdot 250 = 150$ Sk, za 3 kusy 450 Sk. Na 3 kusoch je rozdiel 50 Sk, musíme preto nakúpiť a predať (1 000 : 50)·3 = 60 kusov.

## BEH NA EMPIRE STATE BUILDING

*Úlohu 3 odporúčame využiť ako podnet na diskusiu na tému „nepresnosť vyjadrovania a neúplnosť informácií“.*

1. Predpokladáme, že žiaci preveria výsledok delenia: 1576 : 86 = 18,3.

Vysvetlenie: Nie na všetky poschodia musí viesť rovnako veľa schodov. Vo výškových budovách je spravidla prízemie (kde sú obchody a pod.) vyššie ako ostatné poschodia, preto aj počet schodov z prízemia na 1. poschodie je väčší. Beh *Empire State Building Run Up* začína v lobby (hale) budovy, tá má výšku niekoľkých poschodí.

2. **nie**

Zápis

- 11:33 (ktorý je vo výsledkovej listine) znamená 11 minút, 33 sekúnd,
- 11,33 minúty (ktorý použila Kamila) znamená 11 minút a 33 stotín minúty.

Tieto zápisy nevyjadrujú rovnaký časový údaj, pretože $\frac{33}{100} \neq \frac{33}{60}$. Žiaci vo svojom vysvetlení môžu buď len ukázať nesprávnosť Kamilinho zápisu, alebo naviac uviesť aj správny zápis času 11:33 ako desatinného čísla: 33 sekúnd je $\frac{33}{60} = 0{,}55$ minúty, preto 11:33 je 11,55 minúty.

3. Žiaci by mali zistiť, že priemernú rýchlosť $v$ =1,455 km/h reportér vypočítal ako podiel dráhy $s$ = 320 metrov a Suzinho času $t$ = 13:12 min:

- 12 sekúnd = 0,2 minúty, preto $t$ = 13:12 minúty = 13,2 minúty = $\frac{13{,}2}{60} = 0{,}22$ hodiny; iná možnosť je vyjadriť čas 13:12 najprv v sekundách a tie potom prerátať na hodiny:

$$t = 13:12 \text{ min} = \frac{13 \cdot 60 + 12}{60 \cdot 60} = 0{,}22 \text{ hod.},$$

- $s = 320 \text{ metrov} = 0{,}32 \text{ km}$, potom

$$v = \frac{s}{t} = \frac{0{,}32}{0{,}22} = 1{,}45454... \approx 1{,}455 \text{ (km/h)}.$$

Údaje, ktoré použil reportér, možno objaviť tipovaním alebo výpočtom, napr.: Pri výpočte priemernej rýchlosti reportér použil Suzin čas t = 13:12. Ak mu vyšla priemerná rýchlosť $v \approx 1{,}455$, tak dráha, z ktorej vychádzal, musela byť $s = v \cdot t = 1{,}455 \cdot 0{,}22 \approx 0{,}3201$ km, teda asi 320 m.

Údaj 320 metrov v texte sa nevzťahuje na dráhu, ktorú bežci prebehli, ale na výškový rozdiel, ktorý pri behu prekonali. Preto podiel, ktorý počítal reportér (výškový rozdiel delený dobou behu) nie je priemerná rýchlosť behu (tá by sa počítala ako podiel prebehnutej vzdialenosti a času), ale priemerná rýchlosť stúpania (teda zmeny nadmorskej výšky). Reportérov nadpis je zavádzajúci: pri jeho čítaní totiž čitateľ predpokladá, že uvedený údaj je priemerná rýchlosť bežkyne.

*Námet na ďalšiu prácu: Skúste zistiť, ako rýchlo by ste museli bežať po schodisku vo vašej škole, aby ste dosiahli rýchlosť stúpania 1,455 km/h.*

## BEŽNÉ A ŠPECIÁLNE HRACIE KOCKY

*Téma je zameraná na výpočet pravdepodobnosti v situácii, keď jednotlivé udalosti nie sú rovnako pravdepodobné. Túto situáciu predstavuje hracia kocka, na ktorej jednotlivé steny nepadajú rovnako často. Aby bolo možné výpočty previesť na výpočet podielu všetkých priaznivých a všetkých možných udalostí, nahrádzame špeciálnu hraciu kocku pravidelným osemstenom. Osemsten ako model špeciálnej hracej kocky by mal žiakom uľahčiť riešenie úloh 6 až 8.*

*Úlohy 2 a 3, ktoré uvádzame ešte pred zavedením osemstenu ako pomôcky pre ďalšie výpočty, sú preto pomerne náročné. Odporúčame zadať ich len lepším žiakom. K týmto úlohám sa s ostatnými žiakmi možno vrátiť po vyriešení úlohy 6 (úloha 3 je totožná s výpočtom pravdepodobnosti pre Beátu v úlohe 7).*

*Úlohu 4 odporúčame robiť v skupinách.*

*Úlohu 5 odporúčame riešiť až po diskusii o riešení úlohy 4. Ak sa žiaci ešte nestretli s pravidelnými mnohostenmi, môžeme im pomôcť obrázkami týchto mnohostenov:*

*Tiež je vhodné po vyriešení úlohy 5 zadať žiakom ako úlohu zhotovenie modelu pravidelného mnohostena.*

1. Stena so 4 bodkami padne s pravdepodobnosťou **0,125**.
Stena so 6 bodkami padne s pravdepodobnosťou **0,375**.

Pravdepodobnosti, že padnú steny s 1, 2, 3, 4 alebo 5 bodkami, sú rovnaké, označme ich $p$. Pravdepodobnosť, že padne stena so 6 bodkami, je 3-krát väčšia, teda $3p$. Súčet všetkých týchto pravdepodobností musí byť 1:

$$p+p+p+p+p+3p=1, \quad \text{t.j.} \quad 8p=1,$$

odtiaľ

$$p=\frac{1}{8}=0{,}125, \qquad 3p=0{,}375.$$

2. **14,0625 %**

Súčet 12 môže padnúť len jedným spôsobom: na oboch kockách padne stena so 6 bodkami. Tá padne s pravdepodobnosťou 0,375. Preto hľadaná pravdepodobnosť je

$$0{,}375\cdot 0{,}375=0{,}140\,625=14{,}062\,5\,\%.$$

3. **9,375 %.**

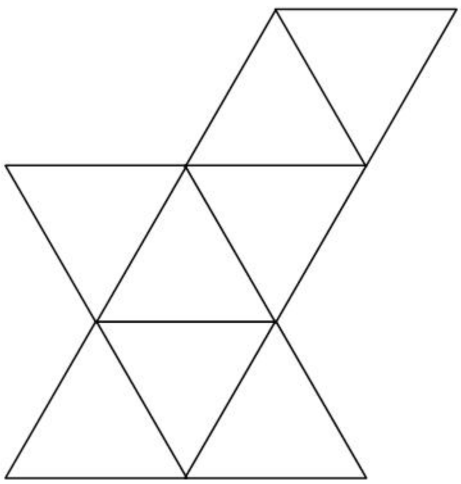
Súčet 11 môže padnúť dvoma spôsobmi: na jednej kocke padne stena s 5 bodkami a na druhej stena so 6 bodkami, alebo naopak. Stena s 5 bodkami padne s pravdepodobnosťou 0,125 a stena so 6 bodkami padne s pravdepodobnosťou 0,375. Preto hľadaná pravdepodobnosť je

$$0{,}125\cdot 0{,}375+0{,}375\cdot 0{,}125=0{,}093\,75=9{,}375\,\%.$$

4. Mnohosten má **8** stien.

Hľadaným mnohostenom je pravidelný 8-sten (dve štvorboké pyramídy zlepené základňami), jeho stenami sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Tri steny obodkujeme 6 bodkami a na zvyšných päť stien dáme 1, 2, 3, 4 a 5 bodiek.

5. Rôznych sietí pravidelného osemstena je viac, uvádzame jednu z možností.



6. Najväčšiu šancu na výhru má **Adam Poctivý**.

Uvedieme dve riešenia:

1. Na oboch kockách musí padnúť stena s 1 bodkou. Tá padá na bežnej kocke častejšie ako na špeciálnej, preto najväčšiu šancu na výhru má Adam.
2. Vypočítame pravdepodobnosť, s akou pri jednom hode padne súčet 2. Čím väčšia je táto pravdepodobnosť, tým väčšia je aj šanca na výhru.

   *Adam Poctivý*: Celkom je 36 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky (6 pre každú kocku, $6 \cdot 6 = 36$). Priaznivá je len jedna: na oboch kockách padne stena s 1 bodkou. Hľadaná pravdepodobnosť je $\frac{1}{36} = 0{,}027\,77\ldots$ .

   *Beáta Nečestná*: Celkom je 64 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve špeciálne kocky (8 pre každú z nich, presnejšie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, to je pre dve kocky $8 \cdot 8 = 64$ možností). Priaznivá je len jedna: na oboch padne stena s 1 bodkou. Výsledná pravdepodobnosť je

   $$\frac{1}{64} = 0{,}015\,625 .$$

   *Viera Polovičná*: Celkove je 48 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky (6 pre bežnú hraciu kocku a 8 pre špeciálnu hraciu kocku, $6 \cdot 8 = 48$). Priaznivá je len jedna, keď na oboch padne stena s 1 bodkou. Výsledná pravdepodobnosť je

   $$\frac{1}{48} = 0{,}020\,833\ldots .$$

   Najväčšie z týchto čísel je $\frac{1}{36}$, preto najväčšiu šancu má Adam.

   *Poznámka*: *Jednotlivé pravdepodobnosti sme mohli vypočítať aj ako súčin pravdepodobnosti, že na prvej kocke padne 1 bodka, a pravdepodobnosti, že na druhej kocke padne 1 bodka. V uvedených troch prípadoch by sme dostali výsledky*

   $$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \quad \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{64}, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{48} .$$

7. Výpočty pravdepodobností jednotlivých hráčov:

   *Adam Poctivý*: Celkom je 36 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivé sú dve: na jednej kocke padne stena s 5 bodkami a na druhej kocke stena so 6 bodkami, alebo naopak. Výsledná pravdepodobnosť je

   $$\frac{2}{36} = 0{,}055\,555\ldots .$$

   *Beáta Nečestná*: Celkom je 64 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivých je 6: na jednej kocke padne stena s 5 bodkami a na druhej kocke niektorá z troch stien so 6 bodkami (to nastane v 3 prípadoch), alebo naopak. Výsledná pravdepodobnosť je

   $$\frac{6}{64} = 0{,}093\,75 .$$

   *Viera Polovičná*: Celkom je 48 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivé sú 4: na špeciálnej kocke padne stena s 5 bodkami a na obyčajnej kocke stena so 6 bodkami (to nastane v 1 prípade), alebo na obyčajnej kocke padne stena s 5 bodkami a na špeciálnej stena so 6 bodkami (to nastane v 3 prípadoch). Výsledná pravdepodobnosť je

   $$\frac{4}{48} = 0{,}083\,33\ldots .$$

   *Poznámka. Podobne ako v riešení úlohy 6, aj tu môžeme použiť súčin pravdepodobností. V uvedených troch prípadoch dostaneme výsledky*

   $$2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36}, \quad 2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{6}{64}, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8} = \frac{4}{48} .$$

8. Najväčšiu šancu na výhru má **Beáta Nečestná a Viera Polovičná**.

   Výpočty pravdepodobností jednotlivých hráčov:

   *Adam Poctivý*: Celkom je 36 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivé sú štyri:

   - na jednej kocke padne stena so 4 bodkami a na druhej kocke stena s 5 bodkami alebo naopak,
   - na jednej kocke padne stena s 3 bodkami a na druhej kocke stena so 6 bodkami alebo naopak.

   Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{4}{36} = 0{,}111\,111\ldots .$$

   *Beáta Nečestná*: Celkom je 64 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivých je osem:

   - na jednej kocke padne stena so 4 bodkami a na druhej kocke stena s 5 bodkami (táto možnosť nastane v 1 prípade) alebo naopak,
   - na jednej kocke padne stena s 3 bodkami a na druhej kocke niektorá z troch stien so 6 bodkami (táto možnosť nastane v 3 prípadoch) alebo naopak.

   Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{8}{64} = 0{,}125 .$$

   *Viera Polovičná*: Celkom je 48 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivých je šesť:

   - na jednej kocke padne stena s 5 bodkami a na druhej kocke stena so 4 bodkami (táto možnosť nastane v 1 prípade) alebo naopak,
   - na špeciálnej kocke padne stena s 3 bodkami a na obyčajnej stena so 6 bodkami (táto možnosť nastane v 1 prípade), alebo na špeciálnej kocke padne stena so 6 bodkami a na obyčajnej stena s 1 bodkou (táto možnosť nastane v 3 prípadoch).

   Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{6}{48} = 0{,}125 .$$

   *Poznámka. Ak pri výpočte použijeme súčin pravdepodobností, dostaneme v uvedených troch prípadoch výsledky*

$$2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{36},\quad 2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{8}{64},\quad 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}=\frac{6}{48}.$$

## BÚDKA

1. Vnútorný priestor má objem **2 800** cm$^3$ = **2,8** litra.

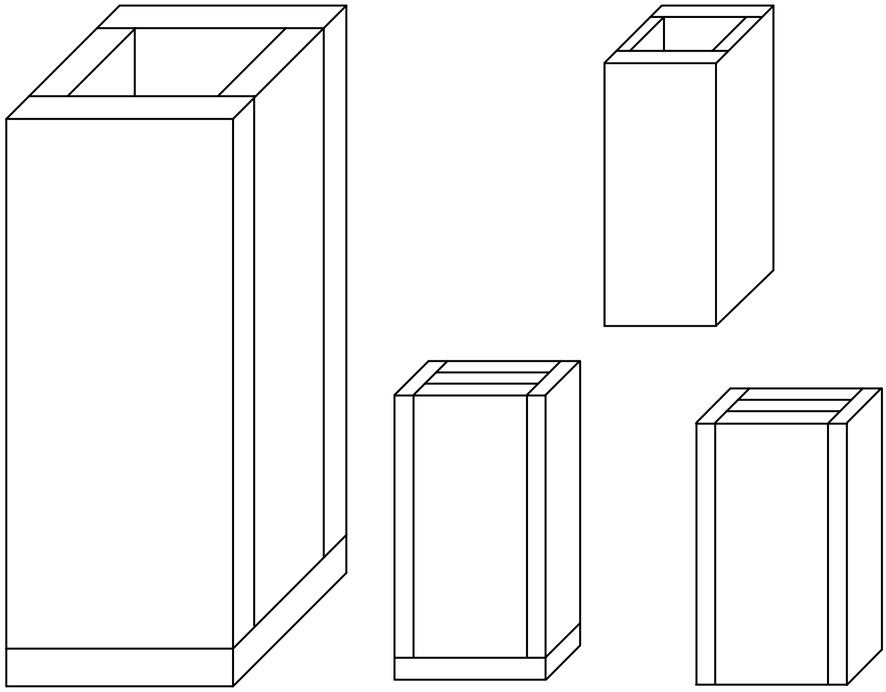
   Vnútorný priestor má tvar kvádra so štvorcovou podstavou. Odmerané rozmery sú 0,5 cm, 3 cm, 7 cm. Skutočné rozmery sú 4-krát väčšie, teda 2 cm, 12 cm, 28 cm. Potom objem je

$$28\cdot(12-2)\cdot(12-2) = 2\,800 \ \text{cm}^3 = 2{,}8 \text{ l}.$$

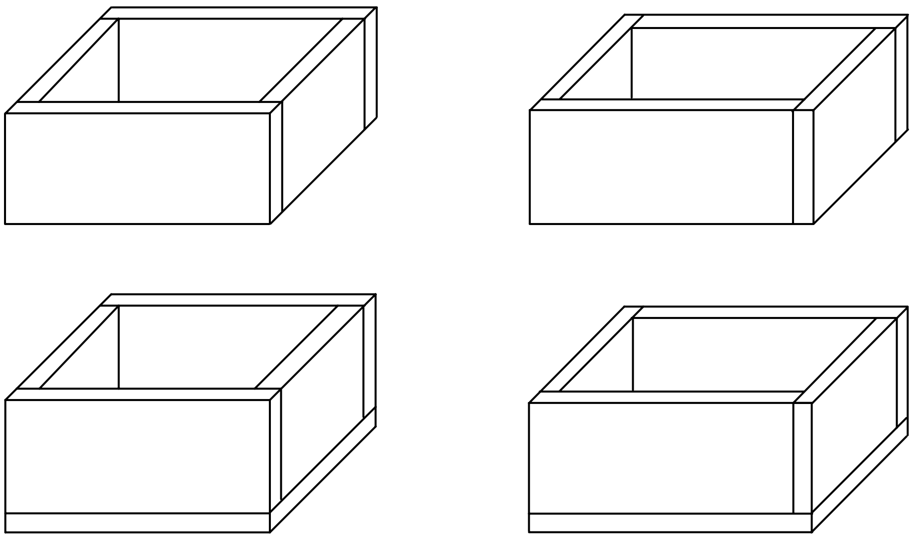
   *Poznámka: Pri tlači alebo rozmnožovaní zadania tejto úlohy na kopírke sa môžu zmeniť rozmery obrázka búdky. Ak sa to stane, treba výpočet upraviť podľa skutočnosti.*

2. Očakávané správne odpovede sú

   - **12 cm × 16 cm,** ak je spodná doska umiestená zvonka ako na veľkom obrázku (veľký obrázok je v mierke 1 : 4, tá istá situácia z iného pohľadu – len v mierke $1:8$ – je znázornená na hornom z troch menších obrázkov),
   - **8 cm × 12 cm,** ak spodnú dosku dáme dovnútra (pozri dva menšie obrázky v spodnom rade).



Je možné, že niektorí žiaci uvedú aj niektoré z ďalších 4 možných správnych riešení (**24 cm × 28 cm, 28 cm × 32 cm, 28 cm × 28 cm, 26 cm × 26 cm**), ktoré dostaneme, ak boky zložíme „naležato“ (teda nie „nastojato“, ako je to na obrázku v zadaní). Tieto riešenia sú zobrazené v mierke 1 : 8 na nasledujúcich obrázkoch.



Stačí, aby žiak našiel jedno z uvedených riešení.

3. Pozri obrázky v riešení úlohy 3 (veľký obrázok je v mierke 1 : 4, ostatné sú kvôli úspore miesta v mierke 1 : 8). Žiakov obrázok by mal byť v súlade s jeho riešením úlohy 2.

## Cesta

*Po vyriešení úlohy 4 a pred riešením ďalších úloh navrhujeme usporiadať v triede (ako domácu aktivitu) súťaž o návrh najlacnejšej cesty.*

*Najnižšiu možnú cenu cesty nájdeme v úlohe 6.*

*Po skončení alebo v priebehu riešenia tejto témy možno so žiakmi diskutovať o tom, nakoľko presné výsledky sú ešte reálne: či má zmysel počítať napríklad dĺžku cesty na centimetre a na základe toho zisťovať cenu s presnosťou na koruny. Cena za 1 kilometer cesty sa spravidla určuje ako priemer vypočítaný z celkovej ceny dlhšieho úseku, tá* *zahŕňa napríklad aj privezenie ťažkých stavebných mechanizmov. Nemá preto zmysel na základe takejto ceny uvažovať, koľko by stálo 100 metrov, 1 meter alebo 10 centimetrov novej cesty.*

1. **približne 82 miliónov Sk**

$$(12{,}1+2{,}8)\cdot 5\,500\,000 = 81\,950\,000 \approx 82\,000\,000$$

2. **približne 82 miliónov Sk**

   Priamu vzdialenosť Abrahámovo ($A$) – Bezinka ($B$) určíme pomocou Pytagorovej vety:

$$|AB| = \sqrt{12{,}1^2 + 2{,}8^2} = \sqrt{154{,}25} = 12{,}419\,742\,348\ldots\ \text{km}.$$

   Cesta tejto dĺžky by stála

$$6\,600\,000 \cdot 12{,}419\,742\,348\ldots = 81\,970\,299{,}499\ldots \approx 82\,000\,000\ \text{(Sk)}.$$

   *Poznámka*: *Rovnaký výsledok dostaneme, ak vzdialenosť $|AB|$ zaokrúhlime na desatiny kilometra:*

$$12{,}4 \cdot 6\,600\,000 = 81\,840000 \approx 82\,000\,000\,.$$

   *Pri zaokrúhlení na celé kilometre by sme dostali výsledok*

$$12 \cdot 6\,600\,000 = 79\,200\,000 \approx 79\,000\,000\,,$$

   *ten už v tejto úlohe nepokladáme za správny.*

3. **približne 80 miliónov Sk**

   Označme bod odklonu $C$. Pomocou Pytagorovej vety vypočítame dĺžku úsečky $CB$:

$$|CB| = \sqrt{9{,}5^2 + 2{,}8^2} = \sqrt{98{,}09} = 9{,}904\ldots\ \text{km}.$$

   Keďže časť cesty povedie po poľnej ceste a časť mimo poľnej cesty, celkovú cenu dostaneme ako súčet týchto dvoch cien:

$$2{,}6 \cdot 5\,500\,000 + 9{,}904\ldots \cdot 6\,600\,000 = 79\,666\,661{,}2\ldots \approx 80\,000\,000\ \text{Sk}\,.$$

   *Poznámka. Opäť pozor na zaokrúhľovanie vzdialeností na celé kilometre.*

4. Predpokladáme, že žiaci si budú voliť miesto odklonu a pre každý zvolený prípad vypočítajú príslušnú cenu. Pri kontrole žiackych riešení si učiteľ môže pomôcť grafom funkcie $C$ z úlohy 6.

5. Cena $C = (12{,}1 - x)\cdot 5\,500\,000 + \sqrt{x^2 + 2{,}8^2}\cdot 6\,600\,000 =$

$$= 66\,550\,000 - 5\,500\,000x + 6\,600\,000\sqrt{x^2 + 7{,}84}\,, \qquad x \text{ je z intervalu } (0;12{,}1\rangle\,.$$

   *Poznámka. Dosadením $x = 0$ do tohto predpisu by sme dostali cenu cesty, ktorá by viedla po trase pôvodnej poľnej cesty, pričom 1 km úseku od Abrahámova po osamelý dom by stál 5 500 000 korún a cena 1 km úseku od osamelého domu po Bezinku by bola 6 600 000 korún. Preto sa hodnota $C(0)$ nezhoduje s výsledkom úlohy 1 (vidno to aj na grafe funkcie C v zadaní úlohy 6). V nej bola cena 1 km cesty na obidvoch úsekoch stále 5 500 000 korún. Z tohto dôvodu sme z definičného oboru funkcie C vylúčili hodnotu* 0.

6. Funkcia nadobúda minimum v hodnote $x \approx$ **4,2**.

   Cena najlacnejšej cesty je približne **77 miliónov**.

   Hodnotu $x \approx 4{,}2$ možno odčítať z grafu (jeden dielik na vodorovnej osi predstavuje vzdialenosť 0,4 km). Rovnako tak možno z grafu odčítať aj približnú hodnotu 77 miliónov. V zadaní sa však požaduje, aby žiak túto hodnotu vypočítal. Dosadením $x = 4{,}2$ do predpisu funkcie $C$ z riešenia úlohy 5 dostaneme

$$C(4{,}2) = (12{,}1 - 4{,}2)\cdot 5\,500\,000 + \sqrt{4{,}2^2 + 2{,}8^2}\cdot 6\,600\,000 = 76\,765\,293{,}78\ldots \approx 77\,000\,000\ \text{(Sk)}.$$

   *Poznámka. Presnú hodnotu minima funkcie*

$$C = 66\,550\,000 - 5\,500\,000x + 6\,600\,000\sqrt{x^2 + 7{,}84}$$

*možno vypočítať pomocou derivácie (zistíme, pre ktoré* $x$ *sa derivácia funkcie C rovná nule a vypočítame hodnotu* $C(x)$ *v tomto bode). Derivácia funkcie C je*

$$C'(x) = -5\,500\,000 + 6\,600\,000\frac{x}{\sqrt{x^2 + 7{,}84}}.$$

*Riešením rovnice* $C'(x) = 0$ *postupne dostaneme*

$$5\,500\,000 = 6\,600\,000\frac{x}{\sqrt{x^2 + 7{,}84}}, \quad 55\sqrt{x^2 + 7{,}84} = 66x, \quad 5\sqrt{x^2 + 7{,}84} = 6x,$$

$$25(x^2 + 7{,}84) = 36x^2, \quad 25 \cdot 7{,}84 = 11x^2,$$

*odtiaľ*

$$x^2 = \frac{196}{11}, \quad x = 4{,}221...$$

*Pre* $x = 4{,}221...$ *nadobúda funkcia C hodnotu*

$$C = 76\,765\,204{,}35...\ (Sk).$$

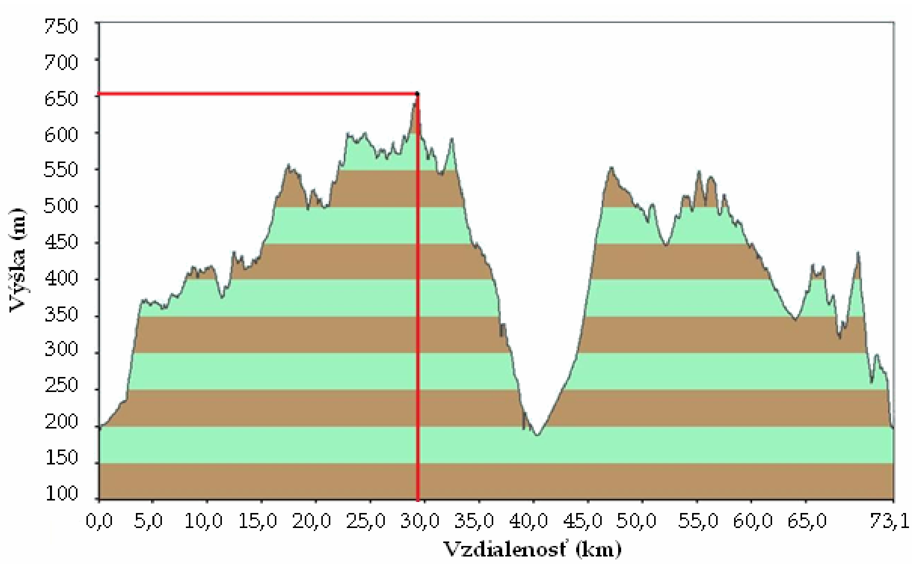
## CYKLOMARATÓN

*Tolerovanú mieru nepresnosti odpovedí pri odčítaní dĺžok z grafu nechávame na učiteľa.*
*Úlohu 8 možno riešiť samostatne, s ostatnými úlohami ju tematicky spája použitie pojmu výškový profil.*

1. Dĺžka cyklomaratónu je **73,1** km.

   Dĺžka cyklomaratónu je vyznačená na vodorovnej osi.

2. **Štart je približne rovnako vysoko položený ako cieľ.**
3. Najvyššie položený bod sa nachádza v nadmorskej výške asi **650 – 655** m a je približne na **30.** kilometri trate. Pozri obr. 5.

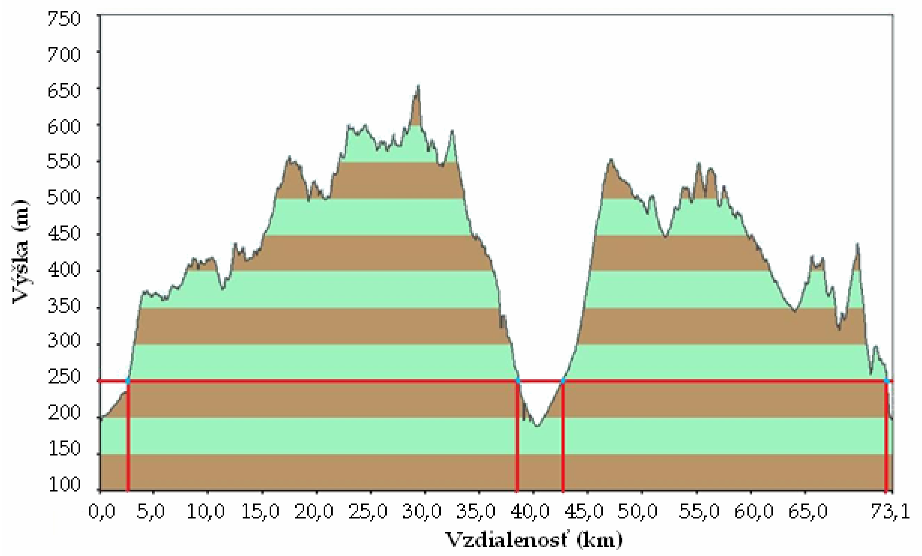



*obr. 5*

4. Výškový rozdiel medzi najvyššie a najnižšie položeným bodom na trati je približne **470 – 475** m.

   Najnižšie položený bod je vo výške približne 180 m n. m, preto výškový rozdiel je približne $650 - 180 = 470$ metrov.

5. Trať dosahuje nadmorskú výšku 250 m v týchto vzdialenostiach od štartu: **3, 38, 43, 73.** Pozri obr. 6.



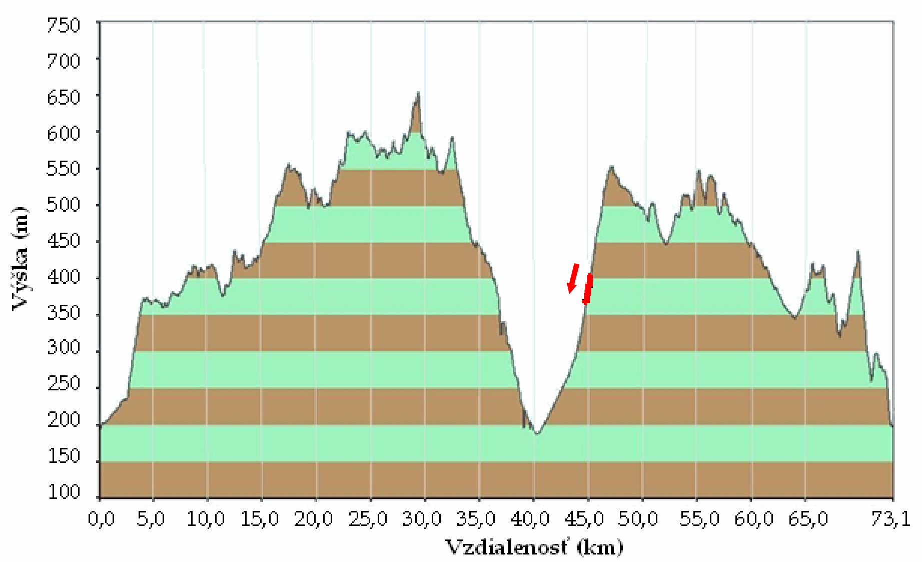

*obr. 6*

6. **Oba úseky sú päťkilometrové, teda rovnako dlhé.**

   Časť žiakov pravdepodobne uvedie, že dlhší je druhý (pravý) úsek. Táto odpoveď je nesprávna: podľa úvodného textu na vodorovnej osi je vzdialenosť miesta na trati od štartu. (Výškový profil trate teda nie je totožný s „rezom“ traťou.)

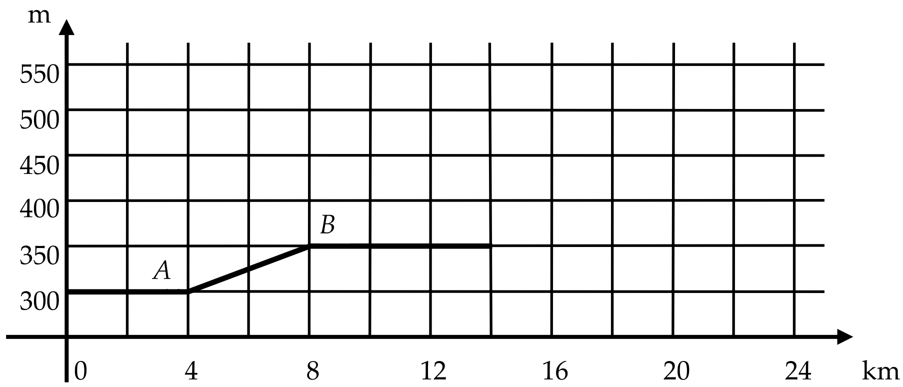
7. Riešenie je na obr. 7. Paľo pôjde **dole kopcom**.

   Tam a naspäť prejde Paľo približne 146 km. Preto po prejdení 101 km mu bude chýbať približne 45 km, aby sa vrátil na miesto štartu. Bude teda približne na 45. km od štartu. Pôjde však v opačnom smere, teda pôjde dole kopcom.




*obr. 7*

8. Riešenie je na obr. 8.




*obr. 8*

Csta od začiatku znázorneného úseku po miesto *A*, resp. od miesta *B* po koniec znázorneného úseku, ostáva nezmenená. Preto týmto častiam v novom výškovom profile prislúchajú rovnaké úseky ako na obr. 3 (teda prvej časti 4 km, druhej 6 km). Po vybudovaní tunela bude vzdialenosť bodov *A* a *B* 4 km, preto bod *B* sa bude nachádzať na ôsmom kilometri trate. Nadmorská výška bodu *B* ostáva nezmenená: 350 m.

## Časové pásma

1. a) O 5 hodín menej je 12:00 – 5:00 = **7:00.**

   b) Potrebujeme posunúť hodinky o 5 hodín dozadu: keď sa od 4:30 vrátime o 4½ hodiny, bude polnoc. Zostáva ešte 30 minút, preto výsledný čas je pol hodiny pred polnocou, t.j. **23:30** (je možné, že žiaci objavia aj formálny výpočet: 4:30 – 5:00 + 24:00 = 23:30).

   c) 5 hodín pred 0:15 je to isté ako 4¾ hodiny pred polnocou, výsledok je **19:15** (aj tu možno použiť výpočet 0:15 – 5:00 + 24:00 = 19:15). Iná možnosť je najprv zistiť, koľko je 5 hodín pred 0:00 (to je 19:00) a tento čas potom posunúť o 15 minút na výsledných 19:15.

2. V hľadanom časovom pásme je o 7 hodín menej, preto jeho označenie je **UTC–7**. Je možné, že žiaci navrhnú odpoveď UTC+17 (pretože 6:15 + 17:00 = 23:15). Také časové pásmo však neexistuje. Treba ich nechať skontrolovať to v zdrojoch, ktoré si sami vyhľadajú.

3. Bratislava je v časovom pásme UTC+1, Peru v UTC–5, preto v Peru je vždy o 6 hodín menej ako je v UTC+1.

   a) 13:20 – 6:00 = **7:20**

   b) 6 hodín pred 4:35 je **22:35** („6 hodín pred 4:00 plus 35 minút“).

   c) Letný čas je o 1 hodinu posunutý, preto 14:15 LČ je v 13:15 v čase pásma UTC+1, o 6 hodín menej je **7:15**.

   d) 3:20 LČ je v čase pásma UTC+1 čas 2:20, o 6 hodín menej je **20:20.**

4. O **5.** hodine popoludní (tj. o **17-tej** hodine) miestneho času.

   K času 22:00 treba prirátať 41 (t.j. 24 +17) hodín a výsledok posunúť ešte o 2 hodiny (v pásme UTC+3 je o 2 hodiny viac ako v UTC+1). Po 24 hodinách bude opäť 22:00. Ďalších 17 hodín môžeme rozdeliť na 2+15: po 2 hodinách bude 24:00, po prirátaní zvyšných 15 hodín bude 15:00, v Moskve je ale o 2 hodiny viac, preto výsledok je 17:00.

5. **24. júna o 9:07 hod**. 148 h 47 min = 6 × 24 h + 4 h 47 min. Keď uplynie 6 × 24 h od 21:20 dňa 17. júna, tak v Moskve bude 23. júna, 21:20. O ďalšie 4 hod 47 min bude 24. júna, 2:07. Vo Vladivostoku je o 7 hodín viac ako v Moskve, preto vo Vladivostoku bude vtedy 9:07.

6. **45 hodín 52 minúti**. V Novosibirsku je o 3 hodiny viac ako v Moskve, v čase príchodu vlaku teda v Moskve bolo 22. júna 21:45. Teraz stačí zistiť, koľko hodín uplynie od 20. júna 23:53 do 22. júna

21:45. Do 22. júna 23:53 by to boli celé dva dni, t.j. 48 hodín. Od tohto času treba odrátať 2 h 8 min (to je čas medzi 21:45 a 23:53, ktorý sme predtým zarátali navyše), preto výsledok je 45 hodín 52 minút.

## Červené krvinky

*Úloha je zameraná najmä na čítanie s porozumením. Preto je v úvodnom texte sústredené pomerne veľké množstvo informácií. Žiak z nich musí vyberať tie, ktoré potrebuje pri riešení jednotlivých úloh.*

*Zisteniu celkového povrchu tela, o ktorom sa píše pred úlohou 1, je venovaná téma Nomogram, ďalšie súvisiace námety sú napr. v téme Zlato.*

*Úloha 3 je skôr námetom na diskusiu, do ktorej odporúčame zapojiť aj učiteľa biológie alebo prírodopisu.*

1. **približne 3 200 m²**

   Celková plocha červených krviniek je podľa článku asi 2 000-krát väčšia, ako je povrch ľudského tela. Pre povrch Petrovho tela 1,6 m² je preto povrch jeho krviniek približne

$$2\,000 \cdot 1{,}6 = 3\,200 \text{ m}^2.$$

2. **nie**

   Alena váži 54 kg, podľa článku by mala mať asi 14-krát menej krvi, to je asi

$$\frac{54}{14} \approx 3{,}9 \text{ litra krvi.}$$

   Má 480 g hemoglobínu, to je asi

$$\frac{480}{3{,}9} \approx 123 \text{ g hemoglobínu na 1 liter krvi.}$$

   Hraničná hodnota pre ženy je 120 g hemoglobínu na liter.

   *Poznámka. Ak číslo* 480 *vydelíme presnou hodnotou podielu* $\frac{54}{14} = 3{,}857\ldots$ , *dostaneme výsledok*

$$\frac{480}{3{,}857\ldots} = 124{,}444\ldots \approx 124\,.$$

   *Hoci tento výsledok sme získali pomocou zdanlivo presnejšej hodnoty* 3,857..., *nemožno ho pokladať za presnejší ako výsledok* 123. *Je to spôsobené tým, že východisková informácia „asi* 14*-krát menej krvi“ je len približná. Nemožno preto očakávať, že objem krvi vypočítaný na jej základe bude presné číslo.*

3. Objem krvinky je menší ako objem gule s rovnakým priemerom. Ak si mala príroda vybrať pri rovnakom povrchu, vybrala si menší objem, aby krvinky „zaberali“ menej miesta.

   *V literatúre sa uvádza, že uvedený tvar umožňuje červeným krvinkám rýchlejšie prijímať kyslík, pretože je pri ňom skrátená cesta medzi bunkovou membránou a vnútrom bunky.*

## Dedičské konanie

*Pri citlivejších deťoch je vzhľadom na tému potrebné s úlohami pracovať opatrne. Je vhodné, aby sa vyučujúci poradil s triednym učiteľom o vhodnosti resp. nevhodnosti tejto témy.*

*Úloha je zameraná na čítanie s porozumením.*

*Pred riešením je potrebné so žiakmi ujasniť si podmienky (dedilo sa zo zákona, nebol zanechaný závet, dediči neuzavreli dohodu o rozdelení dedičstva) a význam niektorých pojmov:*

- *Je potrebné uistiť sa, či je všetkým zrejmý pojem* poručiteľ.
- *Manželom sa v citovanom texte § 473, ods. 1 myslí manžel alebo manželka. Z hľadiska jazyka je takéto použitie slova manžel nesprávne. Upresnenie významu (manžel = manžel alebo manželka) je uvedené vo výklade zákona. Na tomto príklade môžeme upozorniť na dôležitosť presného vyjadrovania v zákonoch a nielen v nich. Učiteľ môže žiakov na tento problém a jeho objasnenie naviesť nasledujúcou úlohou, ktorú zadá ešte pred úlohou 1:*

  Sused Karol si myslí, že v prípade smrti pána Jána Donovala by jeho manželka Mária Donovalová nič nezdedila, lebo v zákone sa žiadna manželka nespomína. Má sused Karol pravdu?
- *Treba rozlišovať medzi hodnotou majetku a hodnotou dedičstva. V prípade úmrtia jedného z manželov sa predmetom dedičstva stáva len časť ich spoločného majetku. Majetok, ktorí manželia nadobudli počas*

*manželstva, patrí do bezpodielového spoluvlastníctva manželov (BSM). Keď jeden z manželov zomrie, musí sa na začiatku dedičského konania urobiť vysporiadanie BSM. Dediči sa dohodnú s pozostalým z manželov, čo patrí do dedičstva po poručiteľovi a čo pozostalému manželovi. Keď sa má za to, že obaja manželia sa rovnakým dielom pričinili o nadobudnutí majetku patriaceho do BSM, tak je vysporiadanie nasledujúce: polovica sa stáva predmetom dedičstva, polovica zostáva pozostalému manželovi. V úlohách 1 a 2 predpokladáme, že nastala práve táto situácia, teda dedičstvo je polovica z majetku. V úlohách 3 a 4 je dedičstvom celý majetok.*

- *V prvej skupine (§ 473) sa o dedičstvo delia rovnakým dielom manžel poručiteľa a deti. Manžel môže zdediť v tejto skupine najviac jednu polovicu. V druhej skupine (§ 474) dedí manžel poručiteľa najmenej polovicu dedičstva. Ak teda okrem manžela neexistuje iný dedič v tejto skupine, manžel dedí celé dedičstvo. Ak existujú iní dedičia, manžel dedí polovicu dedičstva a zvyšok sa delí rovnakým dielom medzi zvyšných dedičov.*

*Poznamenajme ešte, že pri výpočte čistej hodnoty dedičstva sa odpočítavajú aj náklady na pohreb. Pre zjednodušenie to v našich úlohách nebudeme brať do úvahy.*

*V praxi sa dáva prednosť dohode dedičov o rozdelení dedičstva. Keď dediči takúto dohodu neuzavrú (a neexistuje závet), pristúpi sa k určeniu podielov podľa zákona.*

*Ak žiakov téma zaujme, je možné zadať nasledovnú úlohu:* Vymyslite detektívnu zápletku na tému dedičstvo zo zákona.

1. Mária Donovalová: **10 500** €, dcéra Eva: **10 500** €, syn Martin **10 500** €, vnučka Kristína: **0** €.

   Hodnota spoločného majetku je 63 000 €. Pozostalému manželovi (v tomto prípade manželke) z bezpodielového vlastníctva patrí polovica spoločného majetku, teda 31 500 €. Dedí sa druhá polovica majetku, teda dedičstvo je 31 500 €. Každý z pozostalých dedí tretinu majetku, nakoľko dedia manželka a dve deti. Vnučka nededí žiadnu časť. Preto jedna časť dedičstva má hodnotu 31 500/3 = 10 500 €.

2. Kamila: **7 875** €, Kamilina matka: **0** €.

   Kamila zdedí štvrtinu majetku určeného na dedenie, pretože sa dedičstvo 31 500 € bude deliť medzi manželku Máriu Donovalovú a tri deti (Eva, Martin, Kamila). Tým sa samozrejme zmení aj veľkosť dedičských podielov ostatných dedičov z riešenia úlohy 1 Kamilina matka nezdedí nič, nakoľko už nebola v manželskom vzťahu s Jánom Donovalom.

3. Na dedenie zo zákona majú nárok **jeho družka Gabriela Modrá**, **brat Dušan Sojka a sestra Miroslava Sojková**, a to podľa **paragrafu 475** Občianskeho zákonníka. Martin Sojka nemal manželku a jeho rodičia nededia, pretože nežijú. Žijú však jeho súrodenci. Preto sa na túto situáciu vzťahuje paragraf 475.

4. Pani Modrá zdedila **21 600** €.

   Pani Modrá má nárok na rovnako veľkú časť dedičstva ako Martinova sestra Miroslava a Martinov brat Dušan.

5.

| | áno/nie | vysvetlenie |
|---|---|---|
| Mária Chovancová | **áno** | podľa § 473 dedí v prvej skupine aj manželka poručiteľa |
| Marek Kokavec | **nie** | podľa § 473 dedia iba poručiteľove deti a manželka poručiteľa |
| Anna Kokavcová | **áno** | podľa § 473 dedia poručiteľove deti a manželka poručiteľa |
| Jozef Kokavec | **nie** | dedil by, iba ak by nededila jeho matka Anna |
| Adriana Kokavcová | **nie** | dedila by, iba ak by nededila jej matka Anna |
| Milan Kokavec | **nie** | dedil by, iba ak by nededila jeho matka Anna |
| Irena Chovancová | **nie** | podľa § 473 dedia iba poručiteľove deti a manželka poručiteľa |
| Lucia Chovancová | **áno** | podľa § 473, ods. 2 Ak nededí niektoré dieťa, nadobúdajú jeho dedičský podiel rovnakým dielom jeho deti. Keďže Ondrej nededí, dedia jeho deti. |
| Eduard Chovanec | **áno** | podľa § 473, ods. 2 Ak nededí niektoré dieťa, nadobúdajú jeho dedičský podiel rovnakým dielom jeho deti. Keďže Ondrej nededí, dedia jeho deti. |

6.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mária Chovancová | **5 955 €** | Jozef Kokavec | **0** € | Irena Chovancová | **0** € |
| Marek Kokavec | **0** € | Adriana Kokavcová | **0** € | Lucia Chovancová | **2 977,50 €** |
| Anna Kokavcová | **5 955 €** | Milan Kokavec | **0** € | Eduard Chovanec | **2 977,50 €** |

Celková hodnota majetku je

$$26\,000 + 6\,500 + 3\,230 = 35\,730 \text{ €}.$$

Pozostalej manželke z bezpodielového vlastníctva patrí polovica spoločného majetku, teda 17 865 €.

Druhá polovica majetku v hodnote 17 865 € bude predmetom dedičského konania. Táto časť sa podľa § 473, ods. (1) rozdelí na tri rovnaké diely:

$$17\,865 : 3 = 5\,955 \text{ €}.$$

Jeden diel zdedí manželka Mária, druhý dcéra Anna a tretí diel si podľa § 473, ods. (2) rozdelia na rovnaké časti vnúčatá Lucia a Eduard.

## DLAŽDICE

1. **143 dlaždíc**

$445 : 33 \approx 13{,}5$ a $365 : 33 \approx 11{,}1$, preto na dlhšiu stranu obdĺžnika sa zmestí 13 celých dlaždíc a na jeho kratšiu stranu 11 celých dlaždíc. Hľadaný počet celých dlaždíc je teda $13 \cdot 11 = 143$.

2. $\mathbf{16\,cm \times 33\,cm}$, $\mathbf{2\,cm \times 33\,cm}$, $\mathbf{16\,cm \times 2\,cm}$

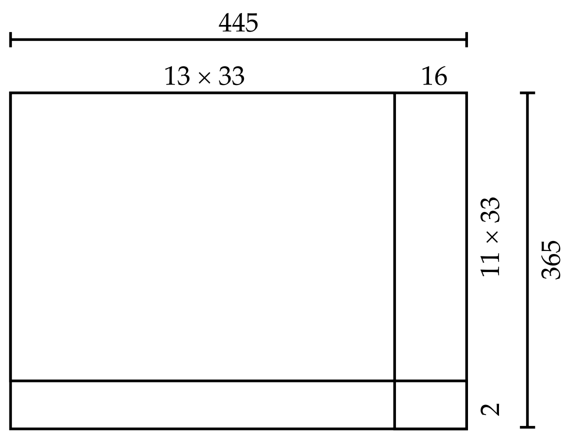
Keďže

$$445 : 33 = 13, \quad \text{zvyšok } 16,$$

potrebujeme dlaždice rozmerov $16\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$, pozri schému na obr. 3. Podobne z výpočtu

$$365 : 33 = 11 \quad \text{zvyšok } 2$$

vyplýva, že potrebujeme dlaždice rozmerov $2\,\text{cm} \times 33\,\text{cm}$. V rohu, ktorý je uhlopriečne oproti rohu, v ktorom sme s kachličkovaním začali, bude dlaždica s rozmermi $16\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$.




*obr. 3*

3.

| rozmery dlaždice | $\mathbf{16\,cm \times 33\,cm}$ | $\mathbf{2\,cm \times 33\,cm}$ | $\mathbf{16\,cm \times 2\,cm}$ |
|---|---|---|---|
| počet dlaždíc | **11** | **13** | **1** |

Odpoveď vyplýva napr. zo schémy na obr. 3.

4. $\mathbf{33\,cm \times 11{,}5\,cm}$, $\mathbf{33\,cm \times 31{,}4\,cm}$, $\mathbf{11{,}5\,cm \times 31{,}4\,cm}$

   Na dlhšej strane bude 13 celých dlaždíc a jedna užšia, teda 14 kusov. Na ne potrebujeme 15 medzier. Zvýši nám

   $$445 - 13 \cdot 33 - 15 \cdot 0{,}3 = 11{,}5\ \text{cm},$$

   preto potrebujeme dlaždice rozmerov $33\ \text{cm} \times 11{,}5\ \text{cm}$.

   Na kratšej strane by malo byť 11 celých dlaždíc a jedna užšia, teda 12 kusov. Na ne potrebujeme 13 medzier. Výsledok výpočtu

   $$365 - 11 \cdot 33 - 13 \cdot 0{,}3 = -1{,}9$$

   je ale záporné číslo. Preto na kratšej strane bude len 10 celých dlaždíc a jedna užšia, teda 11 kusov. Na ne potrebujeme 12 medzier.

   $$365 - 10 \cdot 33 - 12 \cdot 0{,}3 = 31{,}4\,,$$

   preto potrebujeme dlaždice rozmerov $33\ \text{cm} \times 31{,}4\ \text{cm}$. Napokon – podobne ako v riešení úlohy 2 – potrebujeme ešte jednu dlaždicu s rozmermi $11{,}5\ \text{cm} \times 31{,}4\ \text{cm}$.

5. Na vyrezanie dostatočného počtu malých dlaždíc potrebujeme najmenej **19** dlaždíc. Celkom potrebujeme najmenej **149** dlaždíc.

   a) Podľa riešenia úlohy 4 potrebujeme

   - 13 dlaždíc $33 \times 31{,}4$, na ich vyrezanie potrebujeme 13 celých dlaždíc, zvyšky sa nedajú využiť,
   - 10 dlaždíc $33 \times 11{,}5$, na ich vyrezanie potrebujeme 5 dlaždíc, lebo z jednej celej dlaždice sa dajú vyrezať 2 kusy,
   - 1 dlaždicu $31{,}4 \times 11{,}5$, na jej vyrezanie potrebujeme ďalšiu dlaždicu, lebo zvyšok z predchádzajúcich dlaždíc má rozmery $33 \times 10$ ($33 - 2 \cdot 11{,}5 = 10$), čo je málo.

   Na vyrezanie menších dlaždíc teda potrebujeme $13 + 5 + 1 = 19$ veľkých dlaždíc.

   b) Na podlahu môžeme položiť $13 \cdot 10 = 130$ celých dlaždíc (čísla 13 a 10 sme našli pri riešení pred chádzajúcej úlohy). K nim treba ešte prirátať 19 dlaždíc z časti a) tejto úlohy.

6. **18 škatúľ** alebo **najmenej 18 škatúľ**

   Podľa riešenia úlohy 5 potrebujeme 149 dlaždíc. 5 % z tohto počtu je

   $$0{,}05 \cdot 149 = 7{,}45\,,$$

   teda nakúpiť chceme $149 + 8 = 157$ dlaždíc.

   To je $$157 : 9 = 17{,}4\ \text{balení},$$

   preto musíme kúpiť (najmenej) 18 škatúľ.

## DOPRAVNÉ NEHODY

1. **16** (kolónka *okres Nitra, usmrtení, r. 2004*)
2. **12**

   V roku 2004 bolo v komárňanskom okrese usmrtených 13 ľudí (kolónka *Komárno, usmrtení, r. 2004*), bolo to o 1 človeka viac ako v roku 2003 (kolónka *Komárno, usmrtení,* +/–).
3. Najmenej dopravných nehôd v roku 2004 bolo v okrese **Šaľa**.
4. Najviac usmrtených v roku 2003 bolo v okrese **Nové Zámky**.

   Treba vypočítať rozdiel čísla v stĺpci *usmrtení r. 2004* a čísla vo vedľajšom stĺpci *usmrtení* +/–, hľadáme najväčší z týchto rozdielov.

5. **265 ľudí** (treba zrátať čísla v stĺpci *ťažko zranení r. 2004*)

6. **1 135 ľudí**

   V roku 2004 sa ľahko zranilo

$$292 + 146 + 174 + 241 + 69 + 146 + 77 = 1\,145 \text{ osôb,}$$

to je o

$$15 - 5 - 2 + 36 - 26 + 8 - 16 = 10$$

viac ako v roku 2003. Časť žiakov pravdepodobne najprv vypočíta pre každý okres rozdiel čísel v stĺpcoch *ľahko zranení r. 2004* a *ľahko zranení* +/– a tieto rozdiely sčíta. Učiteľ by v takom prípade mal podnietiť diskusiu o rôznych možnostiach výpočtu a ich rýchlosti.

**Tvrdenie č. 1.** **nevyplýva**

Ak nesprávne pochopíme význam čísel v stĺpcoch *usmrtení r. 2004* a *usmrtení* +/– a hodnoty v tom istom riadku sčítame, tak pre topoľčiansky okres dostaneme najväčší súčet $15 + 9 = 24$ (tento omyl mohol byť príčinou chyby v reportáži). Ak s uvedenými číslami pracujeme správne, zistíme, že v topoľčianskom okrese bolo usmrtených 15 osôb v roku 2004 a o 9 menej, t.j. $15 - 9 = 6$ v roku 2003. Spolu za dva roky 24 osôb. Napr. v okrese Nitra bolo usmrtených 16 osôb v roku 2004 a $16 + 5 = 21$ v roku 2003, teda spolu 37 osôb. To je viac ako v topoľčianskom okrese.

**Tvrdenie č. 2.** **vyplýva**

V roku 2004 bolo 13 usmrtených, v roku 2003 to boli $13 - 9 = 4$ usmrtenia. Počet percent nárastu môžeme vypočítať

1. porovnaním hodnôt 13 a 4: 13 je $\frac{13}{4} \cdot 100 = 325$ % zo 4, preto nárast zo 4 na 13 usmrtených je nárast o $325 - 100 = 225$ %,
2. porovnaním veľkosti nárastu ($13 - 4 = 9$) a počtu usmrtených v r. 2003 (ten bol 4): $\frac{9}{4} \cdot 100 = 225$ %.

**Tvrdenie č. 3.** **vyplýva**

V roku 2004 bolo usmrtených 15 osôb, v roku 2003 to bolo $15 - 9 = 6$ osôb, pritom $15 : 6 = 2{,}5$.

**Tvrdenie č. 4.** **nevyplýva**

Súčet čísel v stĺpci *usmrtení* +/– je $-5 + 1 + 9 - 6 + 8 + 9 - 6 = 10$. To znamená, že v r. 2004 bolo o 10 usmrtených viac.

**Tvrdenie č. 5.** **nevyplýva**

Počet nehôd so smrteľnými následkami sa nedá jednoznačne určiť z počtu usmrtených pri týchto nehodách. Pri jednej dopravnej nehode mohlo dôjsť k usmrteniu viacerých osôb.

## ENERGIA VETRA

*V celom texte hovoríme o veterných elektrárňach s horizontálnou osou (tie sú aj na ilustračných obrázkoch). Existujú aj veterné elektrárne s vertikálnou osou.*

*Vzťah pre energiu vetra, ktorý prechádza po čas t rýchlosťou v kolmo na plochu tvaru kruhu s polomerom r, je*

$$E = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot \rho \cdot v^3 \cdot t,$$

*kde $\rho$ je hustota vzduchu. (Je to kinetická energia, ktorej veľkosť je $\frac{1}{2} m v^2$, kde m je hmotnosť vzduchu. V našom prípade hmotnosť vypočítame ako objem V krát hustota $\rho$, pričom objem je objem valca s podstavou $\pi r^2$ a výškou $v \cdot t$.) Z tejto energie veterná elektráreň využije len časť. Veľkosť tejto časti vyjadruje súčiniteľ účinnosti, ten je približne* 0,4 *až* 0,5*. Pre súčiniteľ účinnosti* 0,4 *a hustotu $\rho = 1{,}225\,kg/m^3$ má vzorec pre výkon veternej elektrárne tvar*

$$P = 0{,}4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot \rho \cdot v^3 = 0{,}4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \rho \cdot v^3 = \left(0{,}4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1{,}225\right) \cdot D^2 v^3 =$$
$$= 0{,}192\,422 \ldots \cdot D^2 v^3 \cong 0{,}2 \cdot D^2 v^3 .$$

*V texte vyjadrujeme množstvo energie v kWh (kilowatthodinách). Žiaci sa už pravdepodobne stretli s jednotkou joule (J), ktorá je v rámci sústavy SI odvodenou jednotkou. Medzi joulom a kilowatthodinou platí vzťah*

*1 kWh = 3 600 000 J.*

*Tému možno rozdeliť na tri časti:*

- *Úlohy 1 a 2 overujú, či žiak pochopil pojmy výkon a množstvo energie.*
- *Úlohy 3 – 5 sa sústreďujú na vzorec* $P = 0{,}2 \cdot v^3 \cdot D^2$ *na výpočet výkonu veternej elektrárne.*
- *Úlohy 6 a 7 simulujú (veľmi zjednodušený) postup rozhodovania o ekonomickej výhodnosti budovania veternej elektrárne. Úloha 6 je komplexná, odporúčame najprv v skupinách alebo spoločne s celou triedou prediskutovať postup riešenia. Výpočty sú pomerne zdĺhavé, žiaci by mali použiť vhodný softvér, napr. EXCEL. Úlohu 7 možno modifikovať, ak do úvah zahrnieme aj odhadované ročné náklady na prevádzku veternej elektrárne. Učiteľ môže buď po diskusii so žiakmi dohodnúť nejakú ročnú sumu (nie je podstatné, či je reálna), alebo nechať žiakov, aby sa pokúsili v dostupných zdrojoch takýto údaj zistiť (druhá možnosť je podľa našich skúseností dosť náročná). Podľa informácií ZSE sa investičné náklady na výstavbu veternej elektrárne odhadujú na 914 €/kW. Prevádzkové náklady počas doby životnosti turbíny sa odhadujú na 1,2 centu €/kWh.*

1. **1 kWh** (1 000 Wh)

   40 minút je $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ hodiny. Pri výkone 1 500 W sa za $\frac{2}{3}$ hodiny spotrebuje $1\,500 \cdot \frac{2}{3} = 1\,000$ Wh = = 1 kWh elektrickej energie.

   *Poznámka. Skúsenejšie gazdinky (a možno aj gazdovia) možno upozornia na to, že pred pečením treba sporák predhriať na určenú teplotu, čím sa tiež spotrebuje elektrická energia. V otázke sa pýtame len na množstvo energie spotrebované pri samotnom pečení.*

2. **545 Wh**

   $3{,}5 \cdot 95 + 2{,}5 \cdot 85 = 545$ Wh

3. **106 kW**

   $P = 0{,}2 \cdot 5^3 \cdot 65^2 = 0{,}2 \cdot 125 \cdot 4\,225 = 105\,625 \text{ W} = 105{,}625 \text{ kW} \approx 106 \text{ kW}$

4. **pri rýchlosti 11 m/s**

   Riešením rovnice $1\,000\,000 = 0{,}2 \cdot v^3 \cdot 65^2$ dostaneme $v^3 = \frac{1\,000\,000}{0{,}2 \cdot 65^2} = 1\,183{,}43\ldots$, odtiaľ

   $$v = 10{,}577\ldots \cong 11 \text{ m/s}.$$

5. **približne o 73 %**

   Uvedieme dve riešenia:

   1. Ak do vzorca $P = 0{,}2 \cdot v^3 \cdot D^2$ namiesto pôvodnej hodnoty rýchlosti v dosadíme hodnotu o 20 % väčšiu, teda číslo $1{,}2v$, dostaneme nový výkon

      $$P_n = 0{,}2 \cdot (1{,}2v)^3 \cdot D^2 = 0{,}2 \cdot \left(1{,}728 \cdot v^3\right) \cdot D^2 = 1{,}728 \cdot \left(0{,}2 \cdot v^3 \cdot D^2\right) = 1{,}728 \cdot P .$$

      Z rovnosti $P_n = 1{,}728 \cdot P$ vyplýva, že číslo $P_n$ je 172,8 % z čísla $P$, teda je o $72{,}8 \approx 73$ % väčšie.

   2. Z formulácie otázky vyplýva, že odpoveď by nemala závisieť od konkrétnej rýchlosti vetra ani priemeru turbíny, len od pomeru medzi novou a pôvodnou rýchlosťou vetra. Stačí preto vypočítať výkon pre nejakú konkrétnu rýchlosť vetra (napr. 5 m/s) a rýchlosť o 20 % vyššiu (t.j. 6 m/s) pri rovnakej veľkosti priemeru turbíny (napr. 10 m). Ak do vzorca

$$P = 0{,}2 \cdot v^3 \cdot D^2$$

dosadíme najprv $v = 5$, $D = 10$, a potom $v = 6$, $D = 10$, dostaneme

$$P(5{,}10) = 2\,500\,, \qquad P(6{,}10) = 4\,320\,.$$

Z výsledku delenia

$$\frac{4\,320}{2\,500} = 1{,}728$$

vyplýva, že číslo 4 320 je 172,8 % z čísla 2 500, je teda o $72{,}8 \approx 73$ % väčšie.

6. **približne 699 MWh**

   Pre každú z rýchlostí $v = 3, 4, ..., 14$ m/s treba vypočítať výkon $P = 0{,}2 \cdot v^3 \cdot 50^2$. Tento výkon sa vynásobí počtom hodín, ktorý na jednotlivé rýchlosti vetra pripadá za rok, teda $8\,760 \cdot \frac{h_v}{100}$, kde $h_v$ je hodnota, ktorá v grafe rozdelenia rýchlostí vetra prislúcha rýchlosti *v*. Získané výsledky sa potom sčítajú. Presná hodnota súčtu je $699\,026\,100$ Wh. Odporúčame na tieto výpočty použiť vhodný softvér, napr. EXCEL.

7. **približne 19 rokov**

   Pri ročnej výrobe 699 MWh (výsledok úlohy 6) a odhadovanej cene 2,65 Sk/kWh (teda 2 650 Sk/MWh) elektráreň vyrobí za 1 rok elektrickú energiu v cene $699 \cdot 2\,650 = 1\,852\,350$ Sk. Pre hľadaný počet rokov *x* má platiť

$$1\,852\,350 \cdot x = 35\,000\,000\,, \quad \text{odtiaľ} \quad x = \frac{35\,000\,000}{1\,852\,350} = 18{,}89... \approx 19\,.$$

*Poznámka. Vstupné údaje boli len orientačné, preto aj výsledok tohto výpočtu treba pokladať za orientačný.*

## FIRMA KOCKA

*Hoci úloha 1 má jediné riešenie, v zadaní požadujeme, aby žiaci našli všetky riešenia. Je to najmä kvôli tomu, aby žiaci, ktorí náhodne objavia jedno z možných rozložení čísel na stenách kocky, boli nútení presvedčiť sa, že úloha nemá viacero riešení.*

*Pred riešením úlohy 2 by žiaci mali vedieť, že tretí súčet v úlohe 1 je 10.*

*V úlohách 1, 3 a 4 nepožadujeme od žiakov zápis postupu ich riešenia, stačí nám len výsledok. Zápis postupu v týchto úlohách je podľa nášho názoru pre väčšinu žiakov veľmi ťažký, preto by ho učiteľ mal požadovať – ak to uzná za vhodné – len od lepších žiakov.*

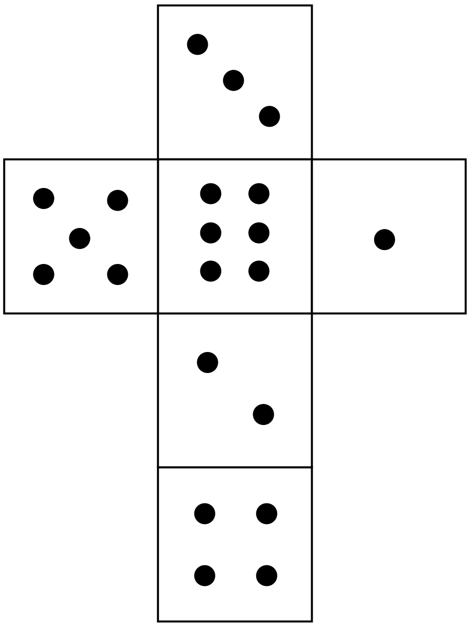
1. **10**

   Očakávame dva možné prístupy k riešeniu:

   1. Súčet všetkých bodiek je $1+2+3+4+5+6=21$. Preto na tretej dvojici stien musí byť súčet $21-5-6=10$.
   2. Žiaci budú uvažovať o tom, ako sú čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6 na kocke rozložené, teda ktoré dvojice čísel sú na protiľahlých stenách kocky. Môžu to robiť
      - *úvahou*: súčet 5 môžeme získať dvoma spôsobmi: $4+1$ a $3+2$. Súčet 6 môžeme získať tiež dvoma spôsobmi: $5+1$ a $4+2$. Zo 4 možných kombinácií ($4+1$ a $5+1$, $4+1$ a $4+2$, $3+2$ a $5+1$, $3+2$ a $4+2$) je reálna len možnosť $3+2$ a $5+1$. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5 a 6 sme teda použili 1, 2, 3 a 5. Zostali 6 a 4, ich súčet je 10.
      - *experimentovaním*, teda náhodnými pokusmi. Predpokladáme, že žiaci prestanú experimentovať, akonáhle objavia jedno z možných rozložení čísel na kocke. Text zadania, ktorý upozorňuje na možnosť viacerých riešení, by ich mal viesť k tomu, aby sa presvedčili, že okrem čísla 10, ktoré pri svojich pokusoch našli, už úloha nemá žiadne ďalšie riešenie.

*Poznámka. Prednosťou 2. postupu je, že žiak súčasne skontroluje reálnosť údajov v zadaní. Keby sme v zadaní úlohy 1 čísla 5 a 6 nahradili napr. súčtami 3 a 12, vedie bezmyšlienkovité zopakovanie prvého postupu k výsledku 6, hoci kocka, na ktorej súčty počtov bodiek na protiľahlých stenách sú 3, 6 a 12, nemôže existovať.*

2. Riešení je viac, uvádzame jedno z nich. Všetky správne riešenia musia mať oproti stene so 6 bodkami stenu so 4 bodkami (súčet 10), oproti stene s 1 bodkou stenu s 5 bodkami (súčet 6) a oproti stene s 3 bodkami stenu s 2 bodkami (súčet 5).



3. Oproti stene s 1 bodkou je stena s **5 bodkami**.
   Oproti stene s 2 bodkami je stena so **6 bodkami**.
   Oproti stene so 4 bodkami je stena s **3 bodkami**.

   Riešenie možno nájsť touto úvahou: Súčet 6 môžeme dostať dvomi spôsobmi: $6 = 5 + 1$ alebo $6 = 4 + 2$. Druhá z uvedených možností v našom prípade nemôže nastať, lebo na zobrazenej kocke čísla 4 a 2 ležia na susedných stenách. Zostáva preto len možnosť

   $$6 = 5 + 1 .$$

   Súčet 8 môžeme dostať tiež dvomi spôsobmi: $8 = 5 + 3$ alebo $8 = 6 + 2$. Prvá z týchto možností nemôže nastať, pretože číslo 5 sme už použili pri súčte 6 ($= 5 + 1$). Preto zostáva len možnosť

   $$8 = 6 + 2 .$$

   Z čísel 1 až 6 nám zostali čísla 3 a 4, tie ležia na zvyšnej dvojici protiľahlých stien.

4. Oproti stene s 1 bodkou je stena so **6 bodkami**.
   Oproti stene s 2 bodkami je stena so **4 bodkami**.

5. Súčtami sú čísla **4, 8, 9**.

## FUTBALOVÉ IHRISKO

1. Stredová zástavka **nie je** v hracej ploche.

   Stredová zástavka je umiestnená 1 meter za postrannou čiarou ohraničujúcou hraciu plochu.

2. Lopta na značke pokutového kopu je vo vzdialenosti **5,5** m od bránkového územia (myslí sa najkratšia vzdialenosť).

3. Dlhšia strana **18,32** m, kratšia strana **5,5** m.

4. **nie**

Podľa pravidiel má byť dĺžka hracej pochy pre medzinárodne stretnutia najviac 110 m, čo nie je splnené.

5. **áno**

Uvedieme dve možné zdôvodnenia:

1. Žiak uvedie konkrétne rozmery ihriska, napr. 50 m × 96 m.
2. Ihrisko s minimálnymi rozmermi (45 m × 90 m) má plochu

$$45 \cdot 90 = 4\,050 \text{ m}^2 = 40{,}5 \text{ árov,}$$

ihrisko s maximálnymi rozmermi (90 m × 120 m) plochu

$$90 \cdot 120 = 10\,800 \text{ m}^2 = 108 \text{ árov.}$$

Číslo 48 leží medzi hodnotami 40,5 a 108, preto musí existovať ihrisko s plochou 48 árov, ktorého rozmery spĺňajú podmienky pravidiel futbalu.

*Poznámka. Uvedená úvaha zostane v platnosti, ak ihrisko s rozmermi 90 m × 120 m nahradíme ihriskom s rozmermi 45 m × 120 m.*

6. **nie**

Šírka je od 64 m do 75 m, dĺžka je od 100 m do 110 m. Pri maximálnych rozmeroch bude plocha

$$75 \cdot 110 = 8\,250 \text{ m}^2 = 82{,}5 \text{ árov,}$$

čo je menej ako 110 árov.

7. Najmenšie možné rozmery ihriska sú 45 m × 90 m, t.j. 4 500 cm × 9 000 cm. V mierke 1 : 500 bude mať kratšia strana obdĺžnika dĺžku

$$\frac{4\,500}{500} = 9 \text{ cm}$$

a dlhšia strana dĺžku

$$\frac{9\,000}{500} = 18 \text{ cm.}$$

Obrázok narysovaného ihriska kvôli úspore miesta neuvádzame.

## HOKEJOVÝ ŠTADIÓN

*V pravidlách Slovenského zväzu ľadového hokeja je hokej definovaný ako hra na bielej ľadovej ploche nazývanej ihrisko.*

*Rozmery ihriska sú:*

- *maximálne rozmery: dĺžka 61 m a šírka 30 m.*
- *minimálne rozmery: dĺžka 56 m a šírka 26 m.*

*Rohy musia byť zaoblené v tvare kružnice s polomerom 7 až 8,5 m.*

*Na podujatiach IIHF (International Ice Hockey Federation) sú rozmery stanovené takto: dĺžka 60 až 61 m, šírka 29 až 30 m.*

*Ihrisko musí byť ohraničené bielym plastovým alebo dreveným mantinelom. Od ľadovej plochy musí mať výšku najmenej 117 cm a najviac 122 cm. Na spodnej časti mantinelov musí byť pripevnená žltá odrazová lišta vysoká 15 až 25 cm.*

1. **1 738 m²**

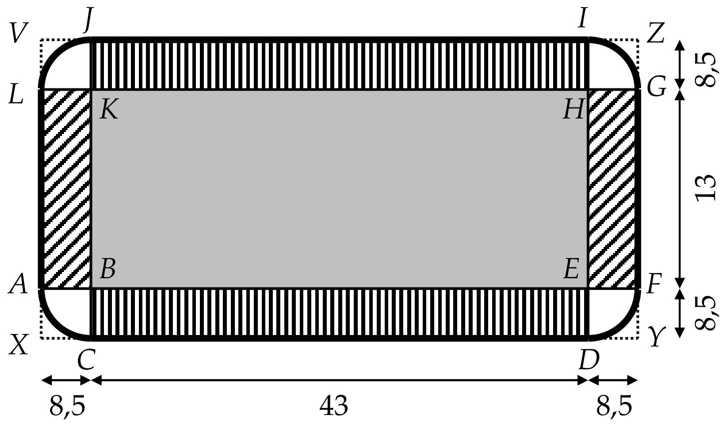
Daná plocha sa skladá z 12-uholníka *ABCDEFGHIJKL* a zo 4 rovnakých štvrťkruhov, ktoré spolu vytvoria kruh.

Obsah kruhu je $S_k = \pi \cdot 8{,}5^2 \approx 226{,}865 \text{ m}^2.$

Obsah 12-uholníka môžeme vypočítať

1. ako rozdiel obsahu obdĺžnika *XYZV* a štyroch rovnakých štvorcov *XCBA, DYFE, HGZI* a *LKJV*

$$S_{12} = 60 \cdot 30 - 4 \cdot 8{,}5^2 = 1\,511 \ \text{m}^2,$$




2. ako súčet obsahov obdĺžnikov *BEHK, ABKL, EFGH, BCDE* a *HIJK*

$$S_{12} = 43 \cdot 13 + 2 \cdot (8{,}5 \cdot 13) + 2 \cdot (8{,}5 \cdot 43) = 1\,511 \ \text{m}^2.$$

Plocha štadióna je približne $S = S_k + S_{12} \approx 1\,737{,}865 \approx 1\,738 \ \text{m}^2$.

2. **479 hektolitrov vody**

Pri výpočte žiaci môžu vychádzať z hodnoty $S \approx 1\,737{,}865\,\text{m}^2$ alebo z hodnoty $S \approx 1\,738\,\text{m}^2$, ktoré našli v riešení úlohy 1. Objem ľadu nájdu podľa vzorca

$$V_{ľad} = S \cdot h = S \cdot 0{,}03 \ \text{m}^3 = S \cdot 0{,}03 \cdot 1\,000 \ \text{dm}^3,$$

objem vody sa potom rovná

$$V_{voda} = \frac{V_{ľad}}{1{,}09} \ \text{dm}^3 = \frac{V_{ľad}}{1{,}09} : 100 \ \text{hl}.$$

Týmto postupom dostaneme

- pre $S \approx 1\,737{,}865$:

$$V_{ľad} \approx 1\,737{,}865 \cdot 0{,}03 = 52{,}135\,95 \ \text{m}^3 = 52\,135{,}95 \ \text{dm}^3 \ ,$$

$$V_{voda} = \frac{52\,135{,}95}{1{,}09} = 47\,831{,}146... \ \text{l} = 478{,}311\,46... \ \text{hl} \approx 479 \ \text{hl},$$

- pre $S \approx 1\,738$:

$$V_{ľad} \approx 1\,738 \cdot 0{,}03 = 52{,}14 \ \text{m}^3 = 52\,140 \ \text{dm}^3,$$

$$V_{voda} = \frac{52\,140}{1{,}09} = 47\,834{,}862... \ \text{l} = 478{,}348\,62... \ \text{hl} \approx 479 \ \text{hl}$$

(pripomeňme, že výsledok máme zaokrúhliť na celé hektolitre nahor).

Ak žiaci vyriešili nesprávne úlohu 1, dostanú v úlohe 2 iný výsledok. V takom prípade treba skontrolovať, či ich postup (hoci s nesprávnou vstupnou hodnotou *S*) bol správny.

*Poznámka. Keby sme namiesto približnej hodnoty* $\pi \approx 3{,}14$ *použili presnejšiu*

$$\pi = 3{,}141\,592\,653...,$$

*dostali by sme v úlohách 1 a 2 hodnoty*

$$S_k = \pi \cdot 8{,}5^2 \approx 226{,}980\,069... \ \text{m}^2, \ S = S_k + S_{12} \approx 1\,737{,}980\,069... \ \text{m}^2,$$

$$V_{ľad} \approx 1\,737{,}980\,069... \cdot 0{,}03 = 52{,}139\,402... \ \text{m}^3 = 52\,139{,}402... \ \text{dm}^3$$

$$V_{voda} = \frac{52\,139{,}402...}{1{,}09} = 47\,834{,}313... \ \text{l} = 478{,}343... \ \text{hl}.$$

*Ak s výsledkom* $V_{voda} = 478{,}343...$ *porovnáme predtým vypočítané hodnoty* $V_{voda} = 478{,}311\,46...$ *a* $V_{voda} \approx \dfrac{52\,140}{1{,}09} = 478{,}348\,62...$, *vidíme, že zdanlivo presnejšia vstupná hodnota* $S_1 = 1\,737{,}865$ *vedie k menej presnému výsledku než hodnota* $S_2 = 1\,738$. *Je to spôsobené tým, že číslo* 3,14 *je menšie ako* $\pi$, *preto hodnota* $S_1$ *získaná pomocou* 3,14 *je menšia ako presná hodnota S. Hodnota* $S_2$ *vznikla zaokrúhlením čísla* 1 737,865 *nahor, je preto väčšia ako* $S_1 = 1\,737{,}865$. *Preto sa mohla dostať bližšie k presnej hodnote* $S = 1\,737{,}980\,069...$ .

3. **56 kilogramových plechoviek farby**

   Oblé časti spolu tvoria kružnicu s obvodom $O_k \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}5 = 53{,}83$ m. Obvod rovných častí je $O_r = 112$ m (možno ho vypočítať viacerými spôsobmi, napr. od obvodu obdĺžnika *XYZV* odpočítať 8 úsekov dĺžky 8,5 m: $O_r = 2 \cdot (60 + 30) - 8 \cdot 8{,}5$ ). Preto obvod ihriska je

   $$O = O_k + O_r \approx 53{,}83 + 112 = 165{,}83 \text{ m.}$$

   Natiera sa len výška $v = 1{,}20 - 0{,}20 = 1$ m. Treba teda natrieť plochu veľkosti

   $$P = O \cdot v = 165{,}38 \cdot 1 = 165{,}38 \text{ m}^2.$$

   Natierame dvakrát, pričom 1 kg farby pokryje 6 m², preto potrebujeme

   $$2 \cdot \frac{165{,}38}{6} = 55{,}126\ldots \approx 56 \text{ plechoviek.}$$

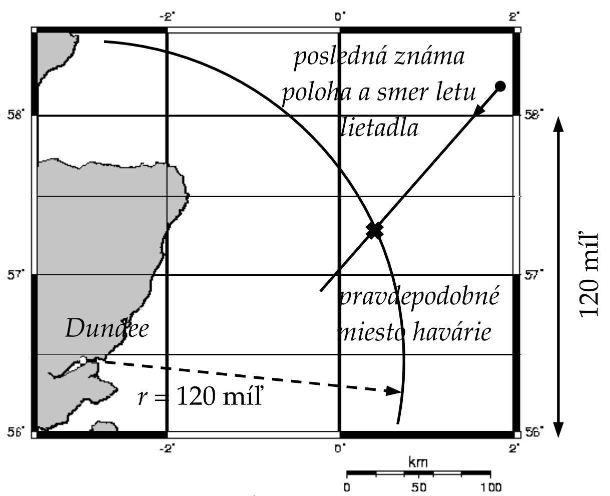
## Holubica Winkie

*V úlohe 2 sme údaje o poslednej známej polohe a smere letu pokladali za presné (nepresný bol len údaj o vzdialenosti, ktorú preletela Winkie). Ak táto téma žiakov zaujme, môžeme pokračovať v úvahách o presnosti ďalších údajov, teda riešiť úlohu 2 za predpokladu, že poslednú známu polohu poznáme len s presnosťou napr.* ± 10 *míľ, alebo smer letu poznáme len s presnosťou napr.* ± 5°.

1. Predpokladáme, že lietadlo pokračovalo v lete bez zmeny kurzu, preto dráha jeho letu je priamka, ktorú dostaneme predĺžením posledného známeho smeru letu.

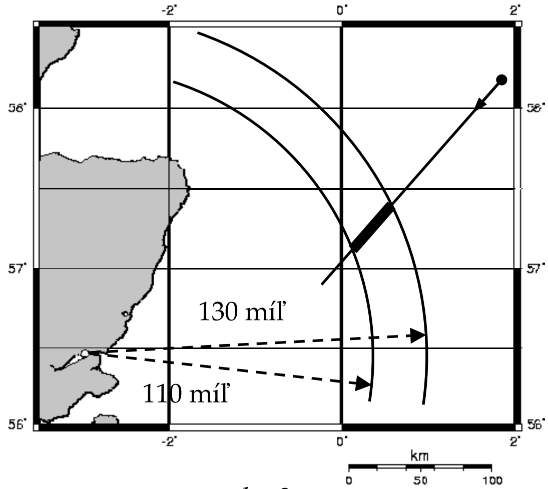
   Winkie preletela z miesta havárie do Dundee asi 120 míľ, teda miesto havárie je od Dundee vzdialené asi 120 míľ. Leží preto niekde na kružnici so stredom v Dundee a polomerom 120 míľ. Tento polomer sa rovná vzdialenosti medzi rovnobežkami zobrazujúcimi na mape 56° a 58° zemepisnej šírky.

   Pravdepodobné miesto havárie je priesečník tejto kružnice a priamky, ktorá predstavuje dráhu letu lietadla. Druhý z priesečníkov kružnice a priamky zrejme neprichádza do úvahy.



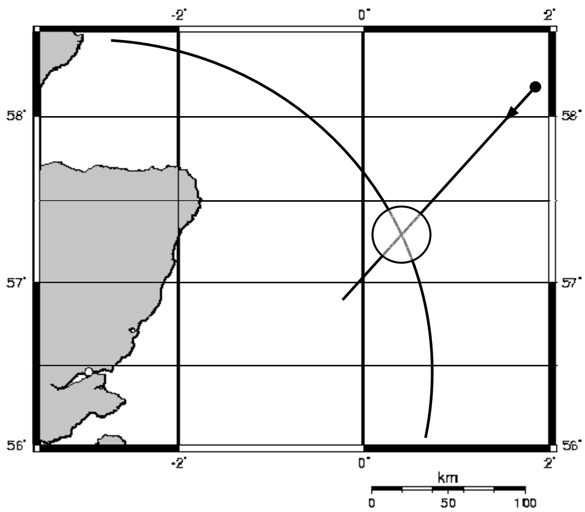

*obr. 1*

2. Pravdepodobné miesto havárie je tučne vyznačená úsečka na obr. 2.

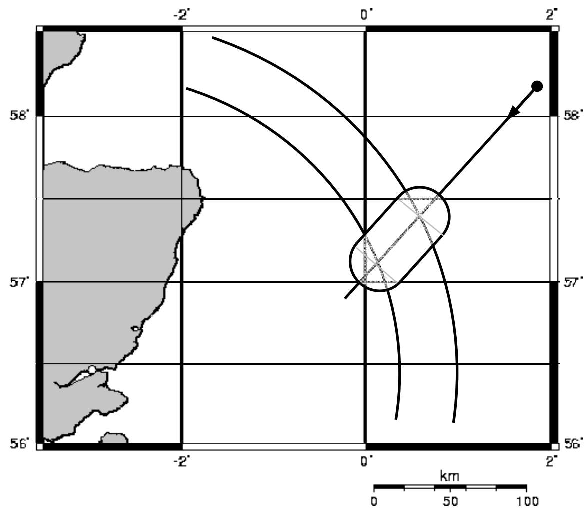



*obr. 2*

3. Záchranný čln sa mohol nachádzať v kruhu, ktorého stred je miesto havárie a polomer je 10 míľ, pozri obr. 3.




*obr. 3*




*obr. 4*

4. Stredom kruhu s polomerom 10 míľ, v ktorom sa mohol nachádzať záchranný čln, môže byť ktorýkoľvek bod úsečky vyznačenej na obr. 2. Zjednotením všetkých týchto kruhov dostaneme útvar vyznačený na obr. 4. Ten má tvar bežeckého štadiónu: je to zjednotenie obdĺžnika a dvoch polkruhov.

## HUDOBNÉ NÁSTROJE

1. **18 dievčat**

   Odpoveď nájdeme odčítaním z diagramu z posledného stĺpca vpravo.

   Môže sa vyskytnúť aj nesprávna odpoveď 19 dievčat. Dostaneme ju, ak sčítame počty dievčat hrajúcich na jednotlivé hudobné nástroje a počet dievčat, ktoré nehrajú na žiadny nástroj:

   $$2+3+1+13=19\ .$$

   Tento spôsob výpočtu nie je správny: v triede môžu byť dievčatá, ktoré hrajú na viac hudobných nástrojov.

2. **4 chlapci**

   Odpoveď nájdeme, ak od celkového počtu chlapcov odčítame počet chlapcov, ktorí nehrajú na žiadny nástroj: $12 - 8 = 4$.

   Podobne ako v úlohe 1, aj tu sa môže vyskytnúť nesprávna odpoveď 6 chlapcov. Dostaneme ju, ak sčítame počet chlapcov, ktorí hrajú na gitaru a na husle:

   $$4 + 2 = 6.$$

   Tento spôsob výpočtu (s ktorým sa ešte stretneme v zadaní úlohy 3) je nesprávny: neuvažuje o možnosti, že niektorý z chlapcov môže hrať na oba nástroje.

3. Darinin postup: **Sčítala počet chlapcov, ktorí hrajú na gitaru (4), počet chlapcov hrajúcich na klavír (0) a počet chlapcov hrajúcich na husle (2).**

   Kamilin postup: **Od celkového počtu chlapcov (12) odčítala počet chlapcov, ktorí nehrajú na žiadny nástroj (8).**

   Nesprávny výsledok má **Darina**. Zabudla na to, že niektorý z chlapcov môže hrať na oba nástroje.

4. **áno**

   Nik z chlapcov nehrá na klavír, teda môžu hrať nanajvýš na dva hudobné nástroje – gitaru a husle. Platí to ale len za predpokladu napísaného v úvode úlohy: „Janka od *všetkých* spolužiakov zistila *všetky* nástroje, na ktoré hrajú."

5. **áno**

   Podľa diagramu sú dve gitaristky, tri klaviristky a jedna huslistka. Ak by jedno z dievčat hralo na tri nástroje, tak na zvyšné štyri dievčatá ostane len jedna gitara a dvoje huslí, čo je málo.

6. Dvojčlenná gitarová skupina sa dá vytvoriť **15** spôsobmi.

   Očakávame, že žiaci budú úlohu riešiť vypisovaním možností. Napr.: Máme 6 gitaristov, označme ich A, B, C, D, E, F. Možné hudobné skupiny potom sú

   AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF.

7. **Možnosti sú tri, štyri alebo ich je päť. Bez ďalších informácií sa odpoveď nedá jednoznačne určiť.**

   Predovšetkým si musíme uvedomiť, že práve jedno z dievčat, nazvime ju Eva, hrá na dva nástroje (vyplýva to z riešenia úlohy 5). Podľa toho, na aké nástroje hrá, vzniknú 3 možnosti:

   - Eva hrá na gitaru a husle. Potom musí v skupine hrať na husle, inak by v skupine chýbala huslistka. Na doplnenie skupiny zostane jedna gitaristka a tri klaviristky. Takže môžeme si vyberať už len z klaviristiek. **Sú 3 možnosti** takéhoto výberu.
   - Eva hrá na klavír a husle. V takom prípade opäť musí v skupine hrať na husle. Na doplnenie skupiny zostanú dve gitaristky a dve klaviristky. **Máme 4** (= 2·2) **možnosti,** ako vybrať jednu z dvoch gitaristiek a jednu z dvoch klaviristiek.
   - Eva hrá na gitaru a klavír. Potom môže hrať v skupine na gitaru alebo na klavír alebo nemusí hrať v skupine vôbec.
     - Ak by hrala v skupine na gitaru, na doplnenie skupiny zostanú dve klaviristky a jedna huslistka. Vyberáme teda len z dvoch klaviristiek. Sú **2** možnosti takéhoto výberu.
     - Ak by hrala v skupine na klavír, na doplnenie skupiny zostane jedna gitaristka a jedna huslistka. Je len **1** možnosť (skupina je jednoznačne určená).
     - Ak nebude hrať v skupine, na zostavenie skupiny zostane jedna gitaristka, dve klaviristky a jedna huslistka. Vyberáme si len z dvoch klaviristiek. Sú **2** možnosti výberu.

   **Spolu je to 5 možností**.

## HUSTOTA OBYVATEĽSTVA

*Pri formulovaní úloh nebola naším cieľom práca s približnými číslami, preto s údajmi o počte obyvateľov a rozlohe počítame tak, ako by to boli presné čísla (hoci napr. rozlohy krajín sú v skutočnosti zaokrúhlené na celé kilometre; navyše sa rozlohy krajín a počty obyvateľov v rôznych zdrojoch líšia).*

*Tému možno rozdeliť na dve samostatné časti:*

- *V úlohách 1 – 3 sa sústreďujeme na definíciu pojmu hustota obyvateľstva.*
- *Úlohy 4 – 6 skúmajú vzťah medzi percentuálnymi zmenami počtu obyvateľov, rozlohy krajiny a hustoty obyvateľstva.*

1. V roku 2007 bola hustota obyvateľstva na Slovensku približne 111 obyv./km², v Česku približne 132 obyv./km².

$$\frac{5\,448\,000}{49\,035} = 111{,}1... \approx 111\,, \quad \frac{10\,381\,000}{78\,866} = 131{,}6... \approx 132$$

2. **približne 121 obyv./km²**

   V krajinách V4 žilo v roku 2007 spolu približne 64 400 000 obyvateľov na celkovej rozlohe 533 617 km², delením dostaneme $64\,400\,000 : 533\,617 = 120{,}68... \approx 121$ .

3. **nesprávny**

   Petrovým postupom dostaneme výsledok

$$\frac{111+132}{2} = 121{,}5 \approx 122 \text{ obyvateľov na km}^2.$$

   Správny výsledok dostaneme, ak celkový počet obyvateľov Česko-Slovenska vydelíme jeho celkovou rozlohou:

$$\frac{5\,448\,000 + 10\,381\,000}{49\,036 + 78\,866} = 123{,}75... \approx 124 \text{ obyvateľov na km}^2.$$

   Táto úloha môže byť podnetom na diskusiu o tom, kedy by bol Petrov výsledok správny. Nastane to len v dvoch prípadoch: ak majú obidve krajiny rovnakú hustotu obyvateľstva alebo ak majú rovnakú rozlohu. Na obidve tieto možnosti by mohli prísť žiaci sami.

4. **Hustota obyvateľstva sa zvýši o 7 %.**

   Označme počet obyvateľov *p*, rozlohu *r*. Potom hustota je $h = \frac{p}{r}$ . Po náraste počtu obyvateľstva o 7 % bude nový počet obyvateľov $1{,}07p$ . Preto nová hustota obyvateľstva bude

$$h_n = \frac{1{,}07p}{r} = 1{,}07 \cdot \frac{p}{r} = 1{,}07 \cdot h \ .$$

   To znamená, že $h_n$ je 107 % z čísla *h*, teda je o 7 % väčšie ako *h*.

   *Poznámka. V úlohe nie je potrebné poznať počet obyvateľov. Ak by žiakom úloha bez konkrétnych čísel spôsobovala problémy, je možné ju vyriešiť s konkrétnym počtom obyvateľov, a potom diskutovať o tom, či a prečo dostávame pre rôzne počty obyvateľov rovnaký výsledok.*

5. **Hustota obyvateľstva by sa zmenšila približne o 16 %.**

   Označme počet obyvateľov Nórska *p*, jeho rozlohu bez Špicbergov a ostrova Jan Mayen *r*. Potom hustota obyvateľstva je $h = \frac{p}{r}$ . Ak započítame aj rozlohu uvedených ostrovov, bude nová rozloha $r_n = 1{,}19 \cdot r$ , počet obyvateľstva sa nezmení. Nová hustota bude

$$h_n = \frac{p}{1{,}19 \cdot r} = \frac{1}{1{,}19} \cdot \frac{p}{r} = 0{,}840\,336\,... \cdot \frac{p}{r} \approx 0{,}84 \cdot h\,.$$

Číslo $h_n$ je približne 84 % z čísla $h$, je teda približne o 16 % menšie.

*Poznámka. Na vyriešenie úlohy žiaci nepotrebujú poznať počet obyvateľov Nórska ani jeho rozlohu. Ak sa im úloha bez týchto údajov zdá príliš náročná, môže učiteľ nechať žiakov zistiť príslušné údaje a využiť ich pri riešení (komplikácie môžu nastať pri zisťovaní rozlohy Nórska, pretože nie všetky zdroje uvádzajú, či v rozlohe sú alebo nie sú zarátané niektoré územia). V takom prípade by žiaci mali skontrolovať, či započítanie uvedených ostrovov skutočne zväčší rozlohu o 19 %. Nasledovať by mala diskusia o tom, či spomínané údaje sú skutočne potrebné na vyriešenie úlohy.*

6. **Celková hustota obyvateľstva sa zmenšila približne o 4 %.**

Označme pôvodný počet obyvateľov Rakúsko-Uhorska $p$ a jeho pôvodnú rozlohu $r$. Potom pôvodná hustota je $h = \frac{p}{r}$. Nový počet obyvateľov je $1{,}04p$, nová rozloha $1{,}08r$, preto nová hustota je

$$h_n = \frac{1{,}04p}{1{,}08r} = \frac{1{,}04}{1{,}08} \cdot \frac{p}{r} = 0{,}962\,962\,... \cdot h \approx 0{,}96 \cdot h\,.$$

To znamená, že nová hustota je približne o 4 % menšia ako pôvodná.

*Poznámka 1. Riešenia úloh 5 a 6 môžu byť východiskom diskusie o približných výpočtoch. Nechajte žiakov riešiť úlohu 6, v ktorej hodnoty 4 % a 8 % nahradíte kombináciou iných malých čísel. Potom nech sa zamyslia, či na získaných výsledkoch nie je niečo nápadné. Mali by (s vašou prípadnou pomocou) zistiť toto: Ak p zväčšíme o x % a r zväčšíme o y %, tak podiel* $\frac{p}{r}$ *sa*

- *zväčší približne o* $x - y$ *%, ak* $x > y$,
- *zmenší približne o* $y - x$ *%, ak* $x < y$.

*Ak zmenšenie budeme chápať ako „záporné zväčšenie“, môžeme toto pozorovanie sformulovať jednoduchšie: podiel* $\frac{p}{r}$ *sa zväčší o* $x - y$ *% (teda napr. pre* $x = 1$, $y = 3$ *dostaneme približné zväčšenie o* $1 - 3 = -2$ *%, t.j. zmenšenie približne o 2 %).*

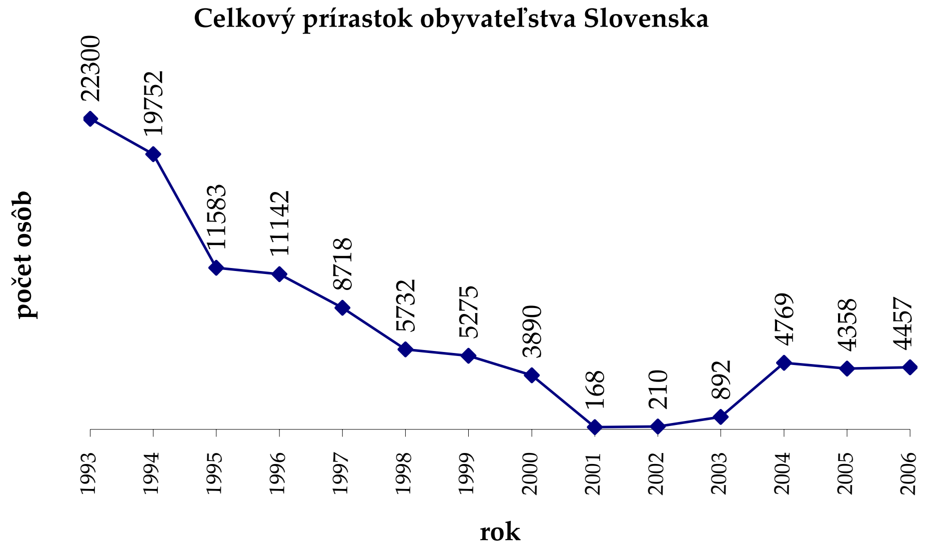
*Ďalším krokom by mala byť diskusia o tom, či toto pozorovanie platí všeobecne, alebo len pre malé hodnoty x a y. Tu možno využiť výsledok úlohy 5 (ideálne by bolo, keby na to prišli žiaci sami), v ktorom toto pozorovanie už neplatí. Počet obyvateľov sa zväčšil o 0 %, plocha o 19 %, ale podiel sa zmenšil len o 16 %. Ak tento príklad žiakov nepresvedčí (napr. kvôli zväčšeniu o 0 % v čitateli), môžu sami objaviť iný. Ak ich to zaujme, môžu skúsiť objaviť hranice, v ktorých sa musí pohybovať x a y, aby ešte približný odhad pomocou* $x - y$ *% bol správny. Pri riešení tejto úlohy odporúčame použiť tabuľkový procesor, napr. EXCEL.*

*Poznámka 2. Ďalším možným námetom je vzťah medzi prírastkom obyvateľstva a zmenou hustoty. Uvádzame príklad takejto úlohy.*

Hustota obyvateľstva Slovenska vypočítaná z počtu jeho obyvateľov k 31.12.1995 bola

$$h_{1995} = 109{,}468\,542... \approx 109 \text{ obyvateľov na km}^2.$$

Na nasledujúcom grafe je znázornený celkový prírastok obyvateľstva v rokoch 1993 – 2006. Napríklad celkový prírastok obyvateľstva v roku 1993 (číslo 22 300) je rozdiel medzi počtom obyvateľov k 31.12.1993 a ich počtom k 31.12.1992.




Vypočítajte hustotu obyvateľstva Slovenska na konci roka 1997 a na konci roka 1993. Výsledok zaokrúhlite na celé čísla.

*Uvedieme dva spôsoby riešenia:*

1. *Z hustoty* 109,468 542... *možno zistiť počet obyvateľov Slovenska k 31.12.1995, ten označíme* $p_{1995}$ *:*

$$\frac{p_{1995}}{49\,035} = 109{,}468\,542\,\ldots, \quad \textit{odtiaľ} \quad p_{1995} \approx 49\,035 \cdot 109{,}468\,542 = 5\,367\,789{,}956\,97\,,$$

*preto* $p_{1995} = 5\,367\,790\,.$

*(V zadaní sme vedome uviedli hustotu natoľko presne, aby sa z nej číslo* $p_{1995}$ *dalo určiť jednoznačne, pozri druhú odrážku za riešením tejto úlohy.)*

*Z hodnoty* $p_{1995}$ *a celkových prírastkov obyvateľstva vypočítame počet obyvateľov Slovenska k 31.12.2000 a k 31.12.1993:*

$$p_{1997} = p_{1995} + 11\,142 + 8\,718 = 5\,387\,650\,,$$
$$p_{1993} = p_{1995} - 11\,583 - 19\,752 = 5\,336\,455\,.$$

*Potom hľadané hustoty obyvateľstva sú*

$$h_{1997} = \frac{p_{1997}}{49\,035} = \frac{5\,387\,650}{49\,035} = 109{,}873\,\ldots \approx 110 \ \textit{obyv./km}^2\,,$$
$$h_{1993} = \frac{p_{1993}}{49\,035} = \frac{5\,336\,455}{49\,035} = 108{,}829\ldots \approx 109 \ \textit{obyv./km}^2\,.$$

2. *Výsledok vieme nájsť aj bez toho, aby sme počítali počet obyvateľov v rokoch 2000 a 1993. Ak sa počet obyvateľov zväčší o x, tak hustota sa zväčší o* $\frac{x}{49\,035}$ *obyv./km². Za roky 1996 a 1997 sa počet obyvateľov zväčšil o*

$$x = 11\,142 + 8\,718 = 19\,860\,.$$

*Hustota sa potom zväčšila o*

$$\frac{19\,860}{49\,035} = 0{,}405\,016\ \ldots, \qquad (*)$$

*preto na konci roka 1997 bola*

$$h_{1997} = h_{1995} + 0{,}405\,016\ldots \approx 109{,}873\,558 \approx 110 \ \textit{obyv./km}^2\,.$$

*Oproti stavu na konci roka 1995 bolo na Slovensku koncom roka 1993 o*

$$11\,583 + 19\,752 = 31\,335$$

*obyvateľov menej. Hustota bola preto menšia o*

$$\frac{31\,335}{49\,035} = 0{,}639\,033\ \ldots, \tag{**}$$

*teda mala hodnotu*

$$h_{1993} = h_{1995} - 0{,}639\,033\ldots \cong 108{,}829\,509 \approx 109\ \ obyv./km^2\ .$$

*Túto úlohu možno využiť na diskusiu o tom, ako zaokrúhľovanie medzivýsledkov môže ovplyvniť správnosť celkového výsledku:*

- *Keby sme v riešení 1. počítali číslo* $p_{1995}$ *nie z hodnoty* $h_{1995} = 109{,}468\,542\ldots$*, ale zo zaokrúhleného čísla* $h_{1995} \approx 109$*, dostali by sme*

  $$p_{1995} = 49\,035 \cdot 109 = 5\,344\,815\,,$$

  *odtiaľ*

  $$p_{1997} = p_{1995} + 19\,860 = 5\,364\,675\,, \qquad p_{1993} = p_{1995} - 31\,335 = 5\,313\,480\ .$$

  *Z týchto počtov obyvateľov by sme dostali hustoty obyvateľstva*

  $$h_{1997} = \frac{p_{1997}}{49\,035} = \frac{5\,364\,675}{49\,035} = 109{,}405\ldots \approx 109\,,\ h_{1993} = \frac{p_{1993}}{49\,035} = \frac{5\,313\,480}{49\,035} = 108{,}360\ldots \approx 108\ .$$

  *Ako vidíme, ani jeden z týchto výsledkov nie je správny.*

- *V predchádzajúcej odrážke sme videli, že zaokrúhlením hustoty obyvateľstva na celé čísla sme získali nesprávne výsledky. Prirodzená otázka potom je: odkiaľ sme si istí, že číslo* $p_{1995} = 5\,367\,790$*, ktoré sme vypočítali v riešení 1., je správny celkový počet obyvateľov?*
  *Číslo* $h_{1995} = 109{,}468\,542\ldots$ *leží medzi číslami* $109{,}468\,542$ *a* $109{,}468\,543$*, preto skutočný počet obyvateľov musí ležať medzi číslami*

  $$49\,035 \cdot 109{,}468\,542 = 5\,367\,789{,}956\,97 \quad a \quad 49\,035 \cdot 109{,}468\,543 = 5\,367\,790{,}006\,005\,.$$

  *Túto podmienku spĺňa jediné číslo:* 5 367 790.

  *Ak to učiteľ uzná za vhodné, môže nechať žiakov vyskúšať, ako presne by sme vedeli počet obyvateľov zistiť, keby sme hustotu* $h_{1995}$ *poznali na 5, 4, 3, … desatinné miesta.*

*Pre učiteľov, ktorí chcú graf celkových ročných prírastkov pred úlohou 7 použiť na ďalšie úlohy, ešte doplňujúca informácia: počet obyvateľov k 31.12.2001 sa nerovná súčtu počtu obyvateľov k 31.12.2000 a celkového prírastku v roku 2001. Údaj o celkovom počte obyvateľov k 31.12.2001 bol totiž opravený podľa výsledkov sčítania ľudu v roku 2001 a je* 5 378 951*. Údaje pre nasledujúce roky možno opäť vypočítať z tejto hodnoty a celkového prírastku.*

## CHRÍPKOVÉ PRÁZDNINY

1. **nie**

   Celkový počet žiakov školy je 239. V pondelok chýbalo 71 žiakov, v utorok 74 žiakov a v stredu 73 žiakov. V pondelok chýbalo menej ako 30 % žiakov školy ($71 : 239 = 0{,}297\ldots$), preto riaditeľ nemohol vyhlásiť chrípkové prázdniny.

2. **nie**

   Ak by v kvinte namiesto 11 žiakov chýbalo 12 žiakov, počet chýbajúcich v pondelok a v utorok by sa nezmenil, pretože 11 žiakov v kvinte chýbalo v stredu. V pondelok by teda chýbalo stále menej ako 30 % žiakov.

3. Úloha má viacero riešení. Ich spoločná podstata je, že počet chýbajúcich žiakov vo štvrtok vo všetkých triedach spolu musí byť **aspoň 72.**

## KALENDÁR

*Odpovede na viaceré otázky tejto témy sa dajú nájsť pomocou mobilného telefónu (napr. na aký deň pripadne konkrétny dátum). Ak má táto téma splniť svoju úlohu, treba žiakov požiadať, aby úlohy riešili bez použitia mobilného telefónu, ten možno použiť pri overovaní správnosti odpovedí.*

*Pred riešením úlohy 3 odporúčame so žiakmi diskutovať o možných spôsoboch riešenia úlohy 2. Z dvoch riešení úlohy 2, ktoré uvádzame, je totiž pre ďalší postup vhodnejšie riešenie 1.. Ak toto riešenie žiaci neobjavili, mal by ich k objavu priviesť v diskusii učiteľ.*

*S témou kalendár súvisí téma Priestupné roky.*

1. 1895 **1896** 1897 1898 1899 1900 1901 1902 1903 **1904**
   1995 **1996** 1997 1998 1999 **2000** 2001 2002 2003 **2004**

2. 1. január pripadol v roku 1988 na **piatok**, v roku 1989 na **nedeľu**.

   Uvádzame dva možné prístupy k riešeniu:

   1. Týždeň má 7 dní, pritom $365 : 7 = 52$, zvyšok 1. Preto po uplynutí 365 dní sa posunieme o 1 deň v týždni. Medzi 1.1.1987 a 1.1.1988 uplynulo 365 dní, medzi 1.1.1988 a 1.1.1989 uplynulo 366 dní (pretože rok 1988 je priestupný), preto sa 1.1. posunul najprv o 1 deň zo štvrtka na piatok, a potom o 2 dni z piatku na nedeľu.
   2. Od 1.1.1987 po 1.1.1988 uplynulo 365 dní, pritom $365 : 7 = 52$, zvyšok 1. Preto 1.1.1988 bol v týždni o jeden deň neskôr ako 1.1.1987, t.j. v piatok.

      Od 1.1.1987 po 1.1.1989 uplynulo $365 + 366 = 731$ dní, pritom $731 : 7 = 104$, zvyšok 3. Preto 1.1.1989 bol v týždni o 3 dni neskôr ako 1.1.1987, t.j. v nedeľu.

3. Prvýkrát to bolo v roku **1998.**

| rok | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| posun | | +1 | +2 | +1 | +1 | +1 | +2 | +1 | +1 | +1 | +2 | +1 |
| 1. január bol | štv | pi | ne | po | ut | str | pi | so | ne | po | str | štv |

4. V roku **2006**.

   Z tabuľky v riešení úlohy 3 vidno, že prvýkrát možno tento kalendár použiť v roku 1995, teda po 6 rokoch (tento rok pravdepodobne uvedie časť žiakov, ktorí si nevšimnú v texte údaj, že pán Jozef našiel starý kalendár až v roku 2004). Ak do tejto tabuľky doplníme ďalšie roky, zistíme, že ďalší rok, v ktorom možno kalendár z roku 1989 použiť, je rok 2006.

   Časť žiakov (ktorá si uvedomila, že rok 1995 nie je správna odpoveď) môže uviesť ako odpoveď rok 2007. Táto nesprávna odpoveď vychádza z chybnej úvahy, že po roku 1995 možno tento kalendár použiť znovu o 6, a potom o ďalších 6 rokov.

5. Kalendár z roku 1990 možno prvýkrát znova použiť v roku **2001**. Kalendár z roku 1988 možno prvýkrát znova použiť v roku **2016.**

   a) Prvýkrát po roku 1990 pripadol 1. január na pondelok v roku 1996 (pozri nasledujúcu tabuľku). Tento rok bol ale priestupný (zatiaľ čo rok 1990 priestupný nie je), preto to nie je hľadané riešenie. V poradí ďalší rok s 1. januárom v pondelok bol rok 2001.

| 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | +1 | +1 | +2 | +1 | +1 | +1 | +2 | +1 | +1 | +1 | +2 |
| **po** | ut | str | pi | so | ne | **po** | str | štv | pia | so | **po** |

b) Rok 1988 bol priestupný, zaujímajú nás teda len nasledujúce priestupné roky, inak by nám v kalendári chýbal 29. február. V nasledujúcom priestupnom roku bol 1. január posunutý o 5 dní, v ďalšom priestupnom roku to bolo o ďalších 5 dní, teda celkom o 10, atď. Ak má 1. január pripadnúť na rovnaký deň v týždni, musí byť tento posun násobkom čísla 7. Najmenšie také číslo je 35 ( $= 5 \cdot 7$ ), preto v poradí siedmy nasledujúci priestupný rok bude mať 1. január v tom istom dni týždňa ako rok 1988. To je rok $1988 + 7 \cdot 4 = 2016$ .

6. Starý kalendár z roku, ktorý je **druhý** po priestupnom, možno prvýkrát znova použiť o **11** rokov.

| priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | po priestupnom | | | | po priestupnom | | | | po priestupnom | | | | po priestupnom | | |
| | +2 | +1 | **+1** | **+1** | **+2** | **+1** | **+1** | **+1** | **+2** | **+1** | **+1** | **+1** | **+2** | +1 | +1 |

**+14**

Časť žiakov možno uvedie nesprávnu odpoveď o *6 rokov*. Z tabuľky vidno, že po šiestich rokoch od roku, ktorý je druhý po priestupnom, nasleduje priestupný rok. V ňom nemožno použiť kalendár z nepriestupného roku.

Starý kalendár z roku, ktorý je **tretí** po priestupnom, možno prvýkrát znova použiť o **11** rokov.

| priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok | priestupný rok | 1. rok | 2. rok | 3. rok |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | po priestupnom | | | | po priestupnom | | | | po priestupnom | | | | po priestupnom | | |
| | +2 | +1 | +1 | **+1** | **+2** | **+1** | **+1** | **+1** | **+2** | **+1** | **+1** | **+1** | **+2** | **+1** | +1 |

**+14**

7. **1999, 2010, 2021, 2027, 2038, 2049**

Použijeme pravidlá vyslovené v zadaní a riešení úlohy 6:

Rok 1993 bol prvý po priestupnom roku. Kalendár z takého roku možno použiť o 6 rokov. Dostaneme sa do 3. roku po priestupnom, preto znovu tento kalendár možno použiť o 11 rokov. Vtedy budeme v 2. roku po priestupnom. Preto ďalšia možnosť použitia nastane o 11 rokov, teda v roku, ktorý je prvý po priestupnom. Od tohto roku sa uvedený cyklus (opätovné použitie o 6, potom o ďalších 11, potom o ďalších 11 rokov) zopakuje.

8. Bez ohľadu na to, z ktorého roku je starý kalendár, opätovne ho možno použiť o **28** rokov.

   Kalendár z priestupného roku môžeme znovu použiť po 28 rokoch (to sme zistili pri riešení úlohy 5). Kalendár, ktorý je z prvého roku po priestupnom, môžeme opätovne použiť o 6, 17 a 28 rokov (to sme zistili v riešení úlohy 7). Podobne môžeme použitím pravidiel z úlohy 6 zistiť, že kalendár z druhého roku po priestupnom možno znova použiť o 11, 17 a 28 rokov a kalendár z 3. roku po priestupnom o 11, 22 a 28 rokov.

   *Poznámka. Tvrdenia a úvahy z úloh 6 až 8 platia len medzi rokmi 1901 a 2099. Roky 1900 a 2100 totiž v gregoriánskom kalendári nie sú priestupné. Tým sa zmení situácia znázornená v tabuľke z úlohy 6 (vznikne úsek 7 po sebe nasledujúcich nepriestupných rokov). Nechceli sme na to upozorňovať v zadaní úlohy, aby nevznikla síce precízna, ale pre žiakov odpudzujúca formulácia.*

9. **14** (7 kalendárov pre nepriestupné roky, v ktorých 1. január postupne pripadne na pondelok, utorok, …, nedeľu, a podobne 7 kalendárov pre priestupné roky)

   Táto úloha je do istej miery „chyták“, pretože na jej riešenie nie sú potrebné predchádzajúce úvahy (i keď ju samozrejme možno vyriešiť aj na ich základe, postup je však zdĺhavejší).

## KARÁTY

*Úlohy tejto témy sú navzájom pomerne nezávislé, nie je preto nevyhnutné riešiť ich v uvedenom poradí. Niektoré úlohy môže učiteľ podľa vlastného uváženia vypustiť. Táto téma súvisí s témou Zlato.*

*V zadaní úlohy 4 vedome <u>neuvádzame</u> všetky údaje potrebné na jej riešenie. Aj v reálnom živote sa žiaci stretnú s otázkami, na ktoré bude možné odpovedať až po získaní niektorých chýbajúcich údajov. Preto odporúčame úlohu 4 riešiť v dvoch krokoch:*

1. *Zadať úlohu žiakom bez upozornenia, že niektoré údaje potrebné na jej riešenie v nej nie sú uvedené. Žiaci by mali sami objaviť, že bez doplňujúcich informácií nie je možné úlohu riešiť. Mali by tiež navrhnúť, ktoré informácie potrebujú.*
2. *Po doplnení potrebných údajov (môžu ich vyhľadať žiaci sami, alebo ich prezradí učiteľ) pristúpiť k vlastnému výpočtu.*

1. približne **4,1 g**

   $$\frac{14}{24}\cdot 7 = 4{,}083... \cong 4{,}1$$

2. približne **0,917**

   $$\frac{22}{24} = 0{,}916\,6... \cong 0{,}917$$

3. približne **714 g**

   1 000 g rýdzeho zlata je 14 hmotnostných dielov, meď je 10 hmotnostných dielov, preto potrebujeme $\frac{1\,000}{14}\cdot 10 = 714{,}285\,7... \cong 714$ g medi.

   Ak to učiteľ uzná za vhodné, môže so žiakmi preveriť, či zaokrúhlenie výsledku na celé gramy nebolo príliš hrubé. Odporúčame tento postup: zistiť, akú rýdzosť v tisícinách má zlato, ktoré vznikne zmiešaním 1 000 g rýdzeho zlata a 714 g medi, a získaný výsledok porovnať s rýdzosťou 14-karátového zlata vyjadrenou v tisícinách.

4. približne **0,683**

   Žiaci si musia uvedomiť, ktoré ďalšie informácie potrebujú na riešenie úlohy: sú to hustota zlata (19,30 g/cm$^3$) a hustota medi (8,96 g/cm$^3$). Uvedieme dve riešenia:

1. Stačí zistiť rýdzosť zlata, ktoré vznikne zmiešaním rovnakého objemu rýdzeho zlata a medi. Ak zmiešame napr. 100 cm³ rýdzeho zlata a 100 cm³ medi, bude v zmesi 1 930 g zlata a 896 g medi. Preto jej rýdzosť bude

$$\frac{1\,930}{1\,930+896} = 0{,}682\,944\ldots \approx 0{,}683\,. \qquad (*)$$

2. Zlatá tehlička s hmotnosťou 1 000 g má objem

$$\frac{1\,000}{19{,}3} = 51{,}813\ldots\ \text{cm}^3\,.$$

Medená tehlička s rovnakým objemom má hmotnosť

$$51{,}813\ldots \cdot 8{,}96 = 464{,}248\ldots\ \text{g}. \qquad (**)$$

Zmiešaním $1\,000$ g rýdzeho zlata a $464{,}248\ldots$ g medi dostaneme $1\,464{,}248\ldots$ g zliatiny. Jej rýdzosť je

$$\frac{1\,000}{1\,464{,}248\ldots} = 0{,}682\,944\ \ldots \cong 0{,}683\,. \qquad (***)$$

*Poznámka. Niektorí žiaci pravdepodobne uvedú nesprávny výsledok* 0,500. *Toto číslo určuje pomer objemu zlata k celkovému objemu zliatiny, teda súvisí s tzv. objemovými percentami. Rýdzosť zliatiny je však určená pomerom hmotnosti zlata k celkovej hmotnosti zliatiny, teda súvisí s hmotnostnými percentami (rýdzosť v tisícinách sú vlastne hmotnostné promile). Táto úloha tak môže byť východiskom k diskusii o rozdiele medzi hmotnostnými a objemovými percentami.*

5. približne **23 karátov a 8 grénov**

$24 \cdot 0{,}986 = 23{,}664$, preto rýdzosť 0,986 je 23,664 karátu. Potrebujeme ešte zistiť, koľko dvanástin je 0,664:

$$0{,}664 \cdot 12 = 7{,}968 \cong 8\,,$$

preto 23,664 je približne $23\frac{8}{12}$ karátu, t.j. 23 karátov a 8 grénov.

*Poznámka. Je možné (hoci málo pravdepodobné), že niektorí žiaci uvedú odpoveď napr. v tvare „22 karátov a 20 grénov". Ak sa to stane, treba diskutovať o tom, či by pokladali za prirodzené uvádzať napr. údaje o hmotnosti v podobe „3 kilogramy a 115 dekagramov".*

6. Z 1 kg rýdzeho zlata možno vyrobiť **290** obyčajných dukátov. Z 1 kg rýdzeho zlata možno vyrobiť **289** kremnických dukátov.

a) $23\frac{2}{3}$ karátu = 23 karátov a 8 grénov = 284 grénov, preto 284 z 288 hmotnostných dielov je rýdze zlato. Obyčajný dukát s hmotnosťou 3,49 g teda obsahuje

$$\frac{284}{288} \cdot 3{,}49 = 3{,}441\,527\ldots\ \text{g zlata.}$$

Z výpočtu $\frac{1\,000}{3{,}441\,527\ldots} = 290{,}56\ldots$ vyplýva, že z 1 000 g rýdzeho zlata možno vyrobiť 290 obyčajných dukátov.

b) 23 karátov a 9 grénov = 285 grénov, preto rýdze zlato je $\frac{285}{288}$ hmotnosti zliatiny. Kremnický du kát teda obsahuje

$$\frac{285}{288} \cdot 3{,}49 = 3{,}453\,645\ \ldots\ \text{g zlata.}$$

$\frac{1\,000}{3{,}453\,645\ldots} = 289{,}54\ldots$, preto z 1 000 g rýdzeho zlata možno vyrobiť 289 kremických dukátov.

7. 1 louisdor obsahuje $\frac{22}{24} \cdot 6{,}7 = 6{,}14166...$ g rýdzeho zlata, v porovnaní s 1 kremnickým dukátom je to

$$\frac{6{,}141\,66...}{3{,}453645...} = 1{,}778\,31... \approx 1{,}78 \text{-krát viacej rýdzeho zlata,}$$

preto

**1 louisdor ≅ 1,78 kremnického dukátu**.

8 escudo obsahuje 24,81 g rýdzeho zlata. Na 1 escudo pripadá $\frac{24{,}81}{8} = 3{,}10\,125$ g rýdzeho zlata, preto

$$\textbf{1 escudo} = \frac{3{,}10\,125}{3{,}453\,645...} = 0{,}897\,964\,... \approx \textbf{0,90 kremnického dukátu}.$$

1 guinea obsahuje $0{,}913 \cdot 8{,}3 = 7{,}577\,9$ g rýdzeho zlata, preto

$$\textbf{1 guinea} = \frac{7{,}577\,9}{3{,}453\,645\,...} = 2{,}194\,174\,... \approx \textbf{2,19 kremnického dukátu}.$$

## KOĽKO NÁS BUDE?

1. Zo sledovaných rokov malo Slovensko naposledy prirodzený úbytok v **roku 2003**. Jeho hodnota bola **517**.

   Ak niektorí žiaci namiesto 517 uvedú číslo –517, odporúčame túto hodnotu považovať za správny výsledok. V takom prípade je však potrebné so žiakmi diskutovať o tom, čo v skutočnosti vyjadruje informácia „prirodzený úbytok bol –517 osôb“.

2. **798**

   Uvádzame dva postupy riešenia:

   1. sčítame ročné prirodzené prírastky

      $(51\,136 - 51\,980) + (50\,841 - 51\,532) + (51\,713 - 52\,230) + (53\,747 - 51\,852) + (54\,430 - 53\,475) =$

      $= (-844) + (-691) + (-517) + 1\,895 + 955 = 798,$

   2. vypočítame rozdiel medzi súčtom živonarodených detí a súčtom počtov zomretých osôb:

      $$261\,867 - 261\,069 = 798.$$

3. **159,6**

   $798 : 5 = 159{,}6$

   Výsledok závisí od hodnoty, ktorú žiak dostal v riešení úlohy 2. Preto žiakovu odpoveď odporúčame uznať za správnu, ak ju získal vydelením výsledku úlohy 2 číslom 5.

4. **nie**

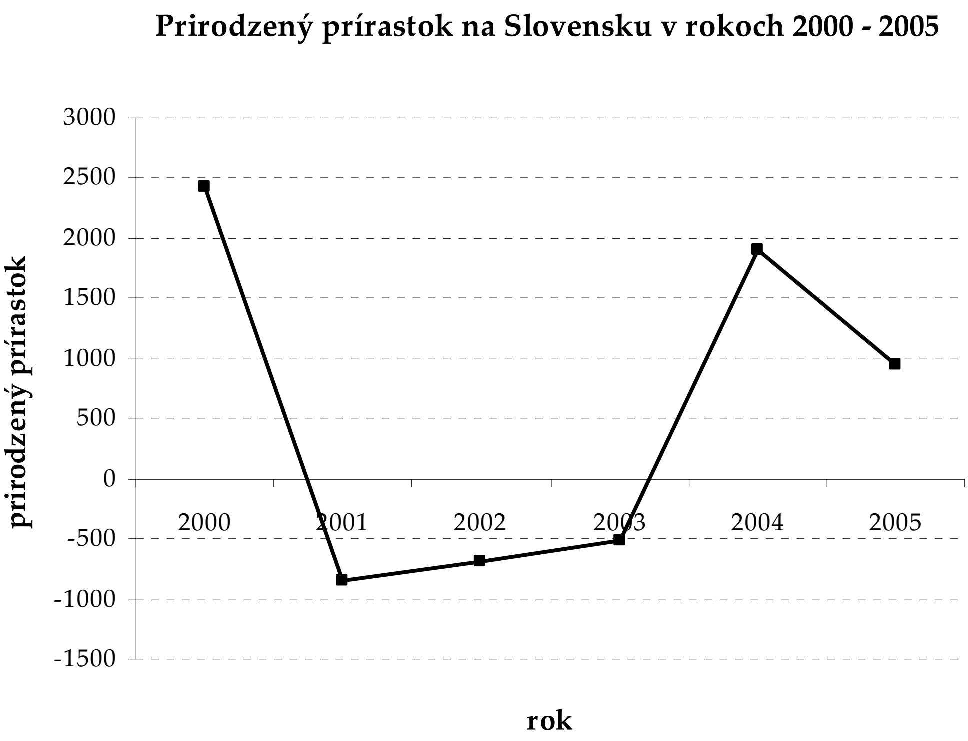
   Uvedené číslo je prirodzený prírastok v roku 2004:

   $$53\,747 - 51\,852 = 1\,895.$$

   Novinár neuvažoval správne, pretože zmenu počtu obyvateľov ovplyvňuje nielen prirodzený prírastok, ale napr. aj odsťahovanie a prisťahovanie.

   *Poznámka. Zmena počtu obyvateľov sa nazýva celkový prírastok obyvateľstva. V roku 2004 bol celkový prírastok obyvateľstva (teda rozdiel medzi počtom obyvateľov k 31.12.2004 a ich počtom k 31.12.2003) 4 769 osôb. Pozri tiež poznámky k téme Hustota obyvateľstva.*

5.




Prirodzené prírastky v jednotlivých rokoch sú v nasledujúcej tabuľke

| rok | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 |
|---|---|---|---|---|---|
| prirodzený prírastok | – 844 | – 691 | – 517 | 1 895 | 955 |

6. Za správnu odpoveď považujeme **každé prirodzené číslo alebo množinu prirodzených čísel spomedzi čísel 52 701, 52 702, ..., 52 751**.

   Z grafu je potrebné odhadnúť prirodzený prírastok a dopočítať počet zomretých osôb. Odhad z grafu: číslo medzi 2 400 a 2 450. Potom počet zomretých bude číslo medzi $55\,151 - 2\,400$ a $55\,151 - 2\,450$, teda medzi 52 701 a 52 751.

   *Poznámka: Skutočný počet zomretých v roku 2000 bol 52 724.*

## Kontrola v Pivárskom raji

1. Priemerný objem vzorky čapovaného veľkého piva je **0,48** litra.

$$\frac{0{,}48+0{,}48+0{,}51+0{,}47+0{,}46}{5}=\frac{2{,}4}{5}=0{,}48$$

2. Priemerné malé pivo malo o **5** % menší objem, ako malo mať.

   Priemerný objem vzorky malého piva je

$$\frac{0{,}28+0{,}3+0{,}27+0{,}31+0{,}27+0{,}28}{6}=\frac{1{,}71}{6}=0{,}285 \text{ litra.}$$

   Treba zistiť, koľko percent z 0,3 je 0,3 – 0,285 = 0,015. To je

$$\frac{0{,}015}{0{,}3}\cdot 100=5\ \%.$$

3. Výčapník takto ušetril **6 litrov** piva.

$$240 \cdot (0{,}5-0{,}48)+80\cdot(0{,}3-0{,}285) = 6 \text{ litrov.}$$

4. Keď dostane **malé** pivo s objemom **0,28** litra.

   Očakávame argumenty typu „pri menšom množstve piva ide o rovnaké poškodzovanie 0,02 litra", „pri menšom je to o viac percent menej ako pri väčšom", doplnené príslušnými výpočtami, napríklad: pri veľkom pive ide o poškodenie $0{,}02:0{,}5\cdot 100\,\% = 4\,\%$ a pri malom pive ide o poškodenie $0{,}02:0{,}3\cdot 100\,\% = 6{,}\overline{6}\,\%$.

5. Väčšia miera poškodzovania bola pri **malom** pive.

   Žiak môže využiť výsledky predchádzajúcich výpočtov:

   - v úlohe 2 zistil, že miera poškodzovania je pri malom pive 5%,
   - mieru poškodzovania pri veľkom pive zistí z odpovede na úlohu 1:

   $$(0{,}5-0{,}48) : 0{,}5 \cdot 100\,\% = 4\,\%.$$

*Námet na diskusiu v triede*

*V úlohe 3 naviac zistite, koľko korún takto krčmár neoprávnene získa, ak veľké pivo predáva po 0,65 € a malé po 0,48 €.*

*Keďže 1 deciliter piva má v tomto prípade inú cenu pri veľkom a inú pri malom pive, možno túto úlohu interpretovať viacerými spôsobmi, ktoré vedú k rôznym výsledkom, napr.:*

- *Vypočítať krčmárov neoprávnený zisk z 240 veľkých pív s priemerným objemom 0,48 l (pričom cena 1 dl je 0,15 €) a 80 malých pív s priemerným objemom 0,285 l (pričom cena 1 dl je 0,16 €).*
- *Vypočítať cenu pív, ktoré možno načapovať z ušetrených 6 litrov piva (toto množstvo sme vypočítali pri riešení úlohy 3). V tomto prípade výsledok závisí od pomeru počtu načapovaných veľkých a malých pív.*

## KRVNÉ SKUPINY

*V rôznych zdrojoch môžeme nájsť mierne odlišné zastúpenie krvných skupín v rámci Slovenska. Ak žiakov téma zaujme, je možné v spolupráci s učiteľom biológie otvoriť diskusiu o Rh faktore, darovaní krvi a podobne.*

1. Náhodne vybraný obyvateľ Slovenska bude mať krvnú skupinu B s pravdepodobnosťou **0,13**.

   Za správne považujeme aj výsledky 13 %, $\frac{13}{100}$.

2. **15** %

3. S pravdepodobnosťou **0,85**.

   Za správne považujeme aj výsledky 85 %, $\frac{85}{100}$. Pravdepodobnosť, že spomedzi obyvateľov Slovenska s krvnou skupinou AB vyberieme Rh pozitívneho človeka, je rovnaká ako pravdepodobnosť, že Rh pozitívneho obyvateľa vyberieme spomedzi všetkých obyvateľov Slovenska. Tento fakt vyplýva z toho, že podľa zadania je Rh faktor nezávislý od krvnej skupine.

4. **6,3** %

   Rh faktor je nezávislý od krvnej skupine, preto 42 % všetkých Rh negatívnych obyvateľov Slovenska má krvnú skupinu A (alebo naopak, zo všetkých obyvateľov Slovenska, ktorí majú krvnú skupinu A, je Rh negatívnych 15 %).

   Žiaci môžu pri výpočte použiť percentá alebo pravdepodobnosť, pričom môžu vychádzať z konkrétneho alebo všeobecného počtu obyvateľov, prípadne môžu počítať so symbolickým množstvom 1.

   Ukážky možných výpočtov:

   1. $0{,}15\cdot 0{,}42 = 0{,}063 = 6{,}3\,\%$.

2. Majme 1000 ľudí. Z nich je 15 %, teda 150, Rh pozitívnych. Z nich je $850 \cdot 0{,}42 = 63$ s krvnou skupinou A. Teda z 1000 ľudí je 63 Rh pozitívnych s krvnou skupinou A. To je

$$\frac{63}{1000} = 0{,}063 = 6{,}3\ \%.$$

3. Majme $x$ ľudí. Z nich $0{,}42x$ má krvnú skupinu A. 15% z $0{,}42x$ je

$$0{,}15 \cdot 0{,}42\, x = 0{,}063\, x\ .$$

$0{,}063x$ je 6,3 % z $x$.

5. **c)**

Z možností *A*, *C* je vzácnejšia *C*, pretože krvná skupina 0 je vzácnejšia ako krvná skupina A (pri tejto úvahe využívame fakt, že ľudia s faktorom Rh– sú zastúpení rovnako v obidvoch skupinách – medzi ľuďmi s krvnou skupinou 0 aj medzi ľuďmi s krvnou skupinou A). Z možností *B*, *D* je vzácnejšia možnosť *D*, pretože krvná skupina AB je vzácnejšia ako krvná skupina B (v tejto úvahe využívame fakt, že ľudia s faktorom Rh+ sú zastúpení rovnako v obidvoch uvažovaných skupinách). Zostáva porovnať možnosti *C* a *D*. Možnosť *C* nastane s pravdepodobnosťou

$$0{,}38 \cdot 0{,}15 = 0{,}057\ ,$$

možnosť *D* s pravdepodobnosťou

$$0{,}07 \cdot 0{,}85 = 0{,}0595\ .$$

Menej pravdepodobná – a teda vzácnejšia – je možnosť *C*.

6. Peter **nemá** pravdu.

Celoslovenská štatistika vznikla na základe dostatočne veľkej vzorky. Vzorka v triede je veľmi malá.

7. **áno**

Pravdepodobnosť tejto možnosti je

$$0{,}85 \cdot 0{,}15 = 0{,}1275 = 12{,}75\ \%\ .$$

Keďže

$$100\ \% : 12{,}75\ \% = 7{,}843\ 137...,$$

je veta, že ide o „každé 7. – 8. manželstvo“, pravdivá.

Inou možnosťou je overiť, že 0,1275 sa nachádza medzi $1:7 = 0{,}14285...$ a $1:8 = 0{,}125$

8. Oprava: Vymeniť označenie u stĺpcov A a 0, resp. zmeniť výšku týchto dvoch stĺpcov. Očakávame argumentáciu typu: Najviac zastúpená je krvná skupina A, mal by jej teda zodpovedať vyšší stĺpec.

## LATY

*Ako úvod k celej téme môže učiteľ použiť nasledujúci novinový článok:*

*„Aby pri rezaní nebol list píly zovretý drevom, vyhýbajú sa zuby píly striedavo na obidve strany - na píle sa robí rozvod. Býva rôzny - podľa druhu píly, obvykle je to 2-3 mm. Od rozvodu závisí šírka rezu (hantírkou nazývaná šrám).*

*Treba rátať s tým, že pri rezaní vďaka „šrámu" sa časť dosky nenávratne mení na piliny.*

*Pílu preto kladieme a rez vedieme na nemeranej strane dosky, aby sa nám meraná časť zachovala celá. Pri provizórnejších výrobkoch s úžitkovým účelom toto pravidlo nie je až také dôležité, ale ak vyrábame dekoratívny predmet, záleží na každom milimetri, niekedy aj na jeho desatinách.*

*Môže sa stať, že chceme ozdobnú lištu dlhú presne tri metre rozpíliť na 10 kusov, úplne rovnakých. Precízne ju rozmeriame po 30 cm a po narezaní s hrôzou zisťujeme, že požadovanej dĺžke zodpovedá ako-tak prvý kúsok. Tie ostatné sú kratšie, dokonca, ak sme pílu neviedli vždy po tej istej strane čiary, je každý kus iný. Na piliny sa zmenili takmer 3 cm (!) lišty a celá práca vyšla nazmar.*

*Na tento problém narazíme aj v prípade, ak chceme kus dosky rozpíliť na dva presne rovnaké kusy. Ak zabudneme, že píla robí „šrám", vždy bude jedna polovica kratšia práve o šírku rezu.*

*Týmto nepríjemnostiam sa dá predísť. Vráťme sa k nášmu príkladu s trojmetrovou lištou. Ak chceme desať kusov s rovnakou dĺžkou tridsať centimetrov, musí byť lišta o niečo dlhšia ako tri metre. Merať nebudeme naraz, ale priebežne meriame jednotlivé kusy a režeme „od čiary", teda pílu vedieme na nemeranej časti.*

*S doskou, ktorú potrebujeme rozpíliť na úplne rovnaké polovice, je to zložitejšie. Odporúčame na kuse nepotrebnej dosky urobiť kontrolný zárez, na ňom zistíme šírku rezu píly. Nameranú hodnotu odrátame od dĺžky dosky, zvyšok rozdelíme na polovicu a rez vedieme pri čiare na dlhšej časti dosky."*

*(Peter MUNKA: Nepodceňujte meranie, KORZÁR 26.1.2002)*

1. najviac **6 latiek**

   Uvádzame tri rôzne postupy (vo výpočtoch sú dĺžky v milimetroch):

   1. Najprv urobíme odhad, pri ktorom zanedbáme odpad pri pílení:

      $$3\,194 : 455 = 7{,}01\ldots,$$

      preto odrezaných latiek môže byť najviac 7. Ak by ich bolo 7, bolo by medzi nimi 6 medzier. Spolu s týmito medzerami by musela pôvodná lata merať aspoň

      $$7 \cdot 455 + 6 \cdot 3 = 3\,203 \text{ mm}.$$

      Toto číslo je väčšie ako dĺžka našej laty (3 194 mm). Preto z našej laty možno odrezať nanajvýš 6 latiek. Výpočtom tento výsledok overíme:

      $$6 \cdot 455 + 5 \cdot 3 = 2\,745 < 3\,194\ .$$

   2. Postupne na kalkulačke sčítavame

      $$455 + 3 + 455 + 3 + 455 + \ldots\ ,$$

      t.j.

      dĺžka prvej odrezanej latky + šírka rezu + dĺžka druhej odrezanej latky + ...,

      až kým neprekročíme 3 194 (teda dĺžku laty). Dostaneme tak čísla

      **455**, 458, **913**, 916, **1371**, 1374, **1829**, 1832, **2287**, 2290, **2745**, 2748, 3203,

      z nich posledné je už väčšie ako 3 194. Tučne vyznačené čísla predstavujú odrezané latky, týchto čísel je 6.

   3. Ak odrežeme $n$ latiek, potrebujeme aspoň $n-1$ rezov. Dĺžka odrezaných latiek spolu s rezmi je potom

      $$n \cdot 455 + (n-1) \cdot 3\ .$$

      Má platiť

      $$n \cdot 455 + (n-1) \cdot 3 \le 3\,194\ ,$$

      odtiaľ dostávame postupne

      $$458n - 3 \le 3\,194\ , \qquad 458n \le 3\,197\ , \qquad n \le 6{,}98\ldots\ ,$$

      preto latiek môže byť najviac šesť.

2. a) najviac **415 mm**, b) najviac **296 mm**

   Vo výpočtoch uvádzame dĺžky v milimetroch.

   1. Ak chceme 5 latiek, potrebujeme 4 rezy. Na latky nám ostane

      $$2085 - 4 \cdot 2 = 2\,077 \text{ mm}.$$

      Jedna latka môže merať

      $$2\,077 : 5 = 415{,}4 \text{ mm}.$$

      Teda latky budú mať dĺžku najviac 415 mm.

   2. Ak chceme 7 latiek, potrebujeme 6 rezov. Na latky nám ostane

      $$2\,085 - 6 \cdot 2 = 2\,073 \text{ mm}.$$

Jedna latka môže merať

$$2\,073 : 7 = 296{,}14\ldots \text{ mm} .$$

Teda latky budú mať dĺžku najviac 296 mm.

*Poznámka 1. V prípade b) zostane* $2085 - 6 \cdot 2 - 7\ 296 = 1$ *mm. Tento zvyšný* 1 *milimeter sa z poslednej latky odstráni hoblíkom alebo brúsením (šmirgľovaním).*

*Poznámka 2. Žiaci môžu zabúdať, že potrebujeme o jedno pílenie menej, ako je počet latiek. V úlohe a) dostanú aj na základe tejto nesprávnej úvahy správny výsledok:*

$$2\,085 - 5 \cdot 2 = 2\,075 , \qquad 2\,075 : 5 = 415$$

*(iný možný postup je rozdeliť dĺžku na* 5 *rovnakých častí a od každej časti odrátať šírku rezu:* $\frac{2\,085}{5} - 2 = 415$ *).*

*V úlohe b) tento postup vedie k nesprávnemu výsledku:*

$$2\,085 - 7 \cdot 2 = 2\,071 , \qquad 2\,071 : 7 = 295{,}85\ldots .$$

3. $\mathbf{\dfrac{2\,085 - 2(n-1)}{n} = \dfrac{2\,083 - 2n}{n} = \dfrac{2\,083}{n} - 2}$

Ide o zovšeobecnenie postupu z predchádzajúcej úlohy:

Ak máme *n* latiek, potrebujeme $n - 1$ rezov. Na *n* latiek nám ostane

$$2\,085 - 2(n-1) \text{ milimetrov,}$$

preto 1 latka bude mať dĺžku $\dfrac{2\,085 - 2(n-1)}{n}$ mm.

4. najviac **242 mm**

Úlohu možno riešiť postupným preberaním možností. Číslo 10 (počet latiek) rozdelíme na dve čísla: počet latiek odrezaných z dlhšej laty (146,3 cm) a počet latiek odrezaných z kratšej laty (108 cm), napr. 5 + 5. Vypočítame, aké dlhé by pri zvolených počtoch boli latky odrezané z dlhšej a kratšej laty. V prípade rozdelenia 5 + 5 dostaneme

$$\text{dlhšia lata:} \quad 1\,463 - 4 \cdot 2 = 1\,455 , \qquad 1\,455 : 5 = 291 \text{ mm}$$

$$\text{kratšia lata:} \quad 1\,080 - 4 \cdot 2 = 1\,072 , \qquad 1\,072 : 5 = 214{,}4 \text{ mm,}$$

zaokrúhlene na celé milimetre nadol je to 214 mm.

Menšie z týchto dvoch čísel – teda 214 mm – je najväčšia možná dĺžka 10 rovnako dlhých latiek, ktoré môžeme pri tomto rozdelení počtu 10 (= 5 + 5) získať.

Tento postup zopakujeme aj pre ďalšie rozdelenia čísla 10. Zrejme z dlhšej laty odrežeme aspoň toľko kusov ako z kratšej, preto má zmysel preverovať len tie rozdelenia čísla 10, v ktorých prvý sčítanec je väčší alebo rovný druhému, teda 5 + 5, 6 + 4, 7 + 3, atď. Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:

| rozdelenie | počet kusov | | dĺžka 1 kusu | | najväčšia možná dĺžka 10 rovnako dlhých latiek |
|---|---|---|---|---|---|
| | z dlhšej laty | z kratšej laty | z dlhšej laty | z kratšej laty | |
| 10 = 5 + 5 | 5 | 5 | 291 | 214 | 214 |
| 10 = 6 + 4 | 6 | 4 | 242 | 268 | 242 |
| 10 = 7 + 3 | 7 | 3 | 207 | 358 | 207 |

Čísla v stĺpci *dĺžka 1 kusu z dlhšej laty* sa postupne zmenšujú, naopak čísla v stĺpci *dĺžka 1 kusu z kratšej laty* sa zväčšujú. Preto nemá zmysel skúmať zvyšné rozdelenia $8 + 2$ , $9 + 1$ a $10 + 0$ . Číslo, ktoré by sme pri týchto rozdeleniach dostali v poslednom stĺpci, bude iste menšie ako 207 (t.j. výsledok pre rozdelenie $7 + 3$ ).

Z posledného stĺpca tabuľky vidno, že najväčšia možná dĺžka, ktorú môže mať 10 rovnako dlhých latiek, je 242 mm.

5. **120 mm**

Ak chceme získať 34 doštičiek, máme na výber z nasledujúcich možností rezania obdĺžnikovej dosky:

| kratšiu stranu (60,5 cm) rozrežeme na | dlhšiu stranu (95 cm) rozrežeme na |
|---|---|
| 2 časti | 17 častí |
| 3 časti | 12 častí |
| 4 časti | 9 častí |
| 5 častí | 7 častí |
| 6 častí | 6 častí |

Ďalšie možnosti (7 častí × 5 častí, atď.) netreba skúmať. Keďže chceme dostať štvorcové doštičky, kratšiu stranu nemá zmysel deliť na väčší počet častí ako dlhšiu.

Pre každú z možností uvedených v tabuľke teraz zistíme, akú dĺžku bude mať po rozrezaní jedna časť na kratšej a jedna časť na dlhšej strane. Napr. pre posledné z uvedených rozdelení (6 častí × 6 častí) dostaneme (dĺžky uvádzame v mm)

kratšia strana: $605 - 5 = 600$, $600 : 6 = 100$ mm,

dlhšia strana: $950 - 5 = 945$, $945 : 6 = 157{,}5$, po zaokrúhlení nadol 157 mm.

Z týchto výpočtov vyplýva, že najväčšia dĺžka strany, ktorú by pri rozdelení 6 × 6 mohlo mať 34 štvorcových doštičiek, je 100 mm (to je menšie z čísel 100 a 157, ktoré sme našli uvedeným výpočtom).

Tento postup zopakujeme aj pre ďalšie rozdelenia uvedené v prvej tabuľke. Výsledky uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

| rozdelenie dosky | dĺžka 1 časti na kratšej strane | dĺžka 1 časti na dlhšej strane | maximálna dĺžka strany štvorcovej doštičky |
|---|---|---|---|
| 6 × 6 | 100 | 157 | 100 |
| 5 × 7 | 120 | 134 | 120 |
| 4 × 9 | 150 | 104 | 104 |

Čísla v druhom stĺpci sa postupne zväčšujú, čísla v treťom stĺpci sa postupne zmenšujú. Preto netreba skúmať zvyšné rozdelenia (3 × 12 a 2 × 17): číslo, ktoré by sme dostali v poslednom stĺpci, by bolo menšie ako 104 (to je výsledok pre rozdelenie 4 × 9).

Z posledného stĺpca tabuľky vidno, že najväčšiu dĺžku strany 34 štvorcových doštičiek dosiahneme pri rozdelení 5 × 7. Táto dĺžka je 120 mm.

## LIEKY

*Úloha 1 slúži na zistenie, či žiaci rozumejú jednotke mg/kg.*

*Úloha 2 je jednoduchým prepočtom dennej, resp. trojdennej dávky.*

*V úlohe 3 vyjde pre žiakov druhého stupňa základnej školy pravdepodobne veľké číslo, čo znamená, že tablety 125 mg sú pre nich nepraktické. Lepšie sú tablety Paralen 500. V prípade záujmu žiakov o túto tému je možné riešiť podobné úlohy pre Paralen 500. Údaje z letáku Paralenu 500: Dospelým a mladistvým sa podáva 0,5 – 1 g paracetamolu podľa potreby v časovom odstupe najmenej 4 hodiny do maximálnej dennej dávky 4 g, najvyššia jednotlivá dávka je 1 g. Počas dlhodobej terapie (nad 10 dní) nemá denná dávka prekročiť 2,5 g. Deťom vo veku od 6 do 15 rokov sa podáva 250 - 500 mg paracetamolu v jednej dávke, t.j. ½ - 1 tableta, 3 razy denne. Jednotlivé dávky sa podávajú v časovom odstupe najmenej 6 hodín.*

1. Monika môže podať Jurkovi v jednej dávke najviac **1,5 tablety**.

   V letáku je uvedené, že na jednorazové podanie je určená dávka 10 – 15 mg/kg. Keďže Jurko váži 15 kg, vychádza jedna dávka 150 mg až 225 mg ($10 \cdot 15 = 150, 15 \cdot 15 = 225$). 150 mg je $\frac{150}{125} = 1{,}2$ tablety. 225 mg je $\frac{225}{125} = 1{,}8$ tablety. Ak uvažujeme o delení na polovice (informácia v letáku), dostávame najviac 1,5 tablety.

   *Poznámka: Keďže hľadáme maximálnu jednorazovú dávku, stačí pracovať s údajom 15 mg/kg.*

2. Za 24 hodín je to **6** tabliet Paralenu. Na tri dni bude Monika potrebovať **18** tabletiek.

   Na 24 hodín pripadajú 4 dávky, v každej 1,5 tablety, to je $4 \cdot 1{,}5 = 6$ tabliet. Na tri dni to je $3 \cdot 6 = 18$ tabletiek.

3. Odpoveď závisí od hmotnosti žiaka, pre hmotnosti medzi 30 kg a 55 kg je to od 42 tabliet do 78 tabliet.

   V závislosti od hmotnosti v kilogramoch (označíme ju $h$) môžeme počítať: maximálna jednorazová dávka je 15 mg/kg, pri hmotnosti $h$ je to $15 \cdot h$ miligramov. Jedna tableta obsahuje 125 mg, preto počet tabliet v jednorazovej dávke bude $\frac{15 \cdot h}{125}$. Toto číslo je však potrebné zaokrúhliť na polovice tabliet nadol. Dostaneme tak maximálnu jednorazovú dávku vyjadrenú v tabletách. Tento výsledok vynásobíme 12 (3 dni po 4 dávky) a dostávame výsledok.

## NOMOGRAM

*Úloha 1a) slúži na zistenie, či žiaci rozumejú opisu použitia nomogramu. Úloha 1b) má overiť, či žiaci vedia pracovať s číselnou osou, na ktorej nie sú vyznačené všetky dieliky (medzi 140 cm a 150 cm je len 5 dielikov).*

*Úloha 2 má simulovať použitie celkového povrchu tela pri dávkovaní liekov. Údaje v nej uvedené sú reálne. Túto úlohu je možné vynechať, ďalšie úlohy na ňu nenadväzujú.*

*V zadaní úlohy 3 sme vedome neuviedli dostatok údajov na to, aby existovalo jediné riešenie. Chceli sme, aby sa žiaci stretli aj s takýmito úlohami a diskutovali o nich.*

*Úloha 4 je zameraná na dôvodenie. Žiaci by si mali uvedomiť, že pri rovnakom povrchu tela sa so zvyšujúcou výškou zmenšuje hmotnosť a naopak.*

*Úloha 5 vyžaduje prácu s nomogramom a dvomi ďalšími grafmi. Pokladáme ju za pomerne náročnú.*

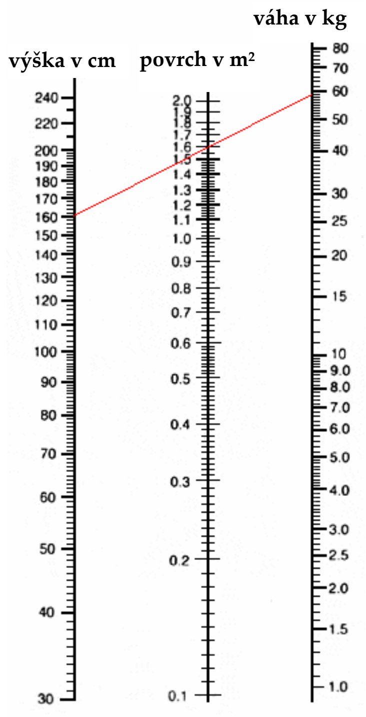
*Upozorňujeme, že nomogram pre deti a dospelých je odlišný.*

*Celkový povrch tela je potrebný napr. pri dávkovaní niektorých liekov na zmiernenie účinkov HIV, proti rakovine, pri roztrúsenej skleróze, liekov zabraňujúcich odlúčeniu transplantovaných orgánov. Učiteľ by mal citlivo uvážiť, či túto informáciu uvedie, alebo sa obmedzí len na všeobecnú formuláciu o „niektorých liekoch", ktorú sme použili v úvode tejto témy. Celkový telesný povrch sa tiež používa napr. pri výpočte srdcového indexu (to je podiel množstva krvi, ktorú srdce vyšle do tela za 1 minútu, a celkového telesného povrchu).*

*Na výpočet celkového telesného povrchu (BSA – Body Surface Area) pre deti sa používa napr. Mostellerov vzorec*

$$BSA = \sqrt{\frac{hmotnosť\,[kg] \cdot výška\,[cm]}{3600}}$$

*Ďalšie úlohy súvisiace s celkovým telesným povrchom sú v témach Červené krvinky a Zlato.*




*obr. 1*

1. a) približne **1,6 m²**, pozri obrázok 1, plná čiara
   b) približne **1,38 m²**, pozri obrázok 1, prerušovaná čiara.

2. Odpoveď závisí od spôsobu zaokrúhlenia, dostávame tak dve možné odpovede:

1. 1 dávka = **4** ks tabliet 500 mg a **1 ks** tabliet 150 mg
   Celkovo bude pacient potrebovať **112** ks tabliet 500 mg a **28** ks tabliet 150 mg.

2. 1 dávka = **3** ks tabliet 500 mg a **4 ks** tabliet 150 mg
   Celkovo bude pacient potrebovať **84** ks tabliet 500 mg a **112** ks tabliet 150 mg.

Povrch tela pacienta je približne 1,7 m², preto jedna dávka je $1{,}7 \cdot 1\,250 = 2\,125$ mg. Túto dávku môžeme zaokrúhliť

1. na 2 150 mg, vtedy ju podáme v zložení 4 tablety 500 mg a 1 tableta 150 mg.
2. na 2100 mg, v tom prípade by sme ju podávali v zložení 3 tablety 500 mg a 4 tablety 150 mg.

Za 14 dní musí pacient užiť 28 dávok.

*Poznámka. V skutočnosti sa z uvedených dvoch možností použije prvé uvedené dávkovanie. Ak by sme chceli žiakov priviesť k tejto možnosti ako k jedinej správnej odpovedi, museli by sme do zadania úlohy doplniť ešte ďalšie predpokladaly, ktoré by ju zbytočne komplikovali.*

3. Očakávame dva možné typy odpovedí:

   1. žiaci uvedú niektorú konkrétnu kombináciu hmotnosti a výšky, ktorej na nomograme zodpovedá celková plocha 1,75 m², napr. 60 kg a 182 cm,
   2. žiaci napíšu, že úloha nemá riešenie, alebo že im chýbajú nejaké údaje (napr. Igorova výška alebo hmotnosť).

   Úloha by mala byť východiskom k diskusii o tom, že ak nezadáme dostatočný počet vstupných údajov, nemusí byť úloha jednoznačná. Počas diskusie môže učiteľ spolu so žiakmi navrhnúť rôzne možnosti doplnenia chýbajúcej informácie. Okrem „štandardných“ možností (doplní sa Igorova výška alebo jeho hmotnosť) odporúčame vyskúšať aj ďalšie, napr. „Igor je vyšší ako 172 cm“ a pod. Tiež je možné diskutovať so žiakmi o tom, ktoré z možných kombinácií výšky a hmotnosti sú reálne (plochu povrchu tela 1,75 m² dostaneme napr. aj pre kombináciu výšky 240 cm a hmotnosti 40 kg).

4. **áno**

   Jedna z možných odpovedí je, že Adam vyrástol o 10 cm, ale súčasne mohol schudnúť. Iným vysvetlením je, že povrch tela zistený pomocou nomogramu je len približný. Preto ak pri výške 172 cm a hmotnosti napríklad 63 kg je podľa nomogramu povrch tela približne 1,75 m² a pri výške 182 cm a 63 kg je tento povrch približne 1,8 m², v skutočnosti mohol byť povrch v oboch prípadoch napr. 1,77 m².

5. **vo veku 8,5 roka (alebo medzi vekom 8 a 9 rokov)**

   Podľa grafov v zadaní veku 8,5 roka zodpovedá priemerná hmotnosť 27 kg a priemerná výška 130 cm.

*Námet na úlohu súvisiacu s meraním. Na rýchly odhad veľkosti plochy časti tela (napr. pri popáleninách) sa niekedy používa veľkosť plochy dlane, ktorá je približne 1 % celkovej plochy povrchu tela. Žiaci môžu zistiť svoju celkovú plochu povrchu tela pomocou nomogramu, potom odmerať veľkosť plochy svojej dlane a získané údaje porovnať.*

## OBECNÉ VOĽBY

*Kontext obecných volieb je reálny, čísla vyjadrujúce počty hlasov a najmä percent však v skutočnosti nie sú také „pekné“ ako v našich úlohách (počty percent sú spravidla zaokrúhlené, preto z nich počty hlasov nemožno vypočítať úplne presne. Tomu sa venujeme napr. v téme Prezidentské voľby alebo v úlohe 5 témy Miera nezamestnanosti). Naším cieľom v tomto prípade nebola práca s nepresnými (zaokrúhlenými) hodnotami, preto sme zvolili „pekné“ čísla, aby sme sa mohli sústrediť na iné ciele.*

*Téma sa skladá z dvoch častí:*

*Prvú časť tvoria úlohy 1 až 5. Prvé dve sú zamerané na čítanie s porozumením, t.j. testujú, do akej miery žiaci rozumejú daným diagramom. Úlohy 3 až 5 testujú prácu žiakov s percentami.*

*Úloha 6 má uľahčiť žiakom tipovanie (voľbu vhodných hodnôt) pri riešení úloh 7 a 8. Túto úlohu môže riešiť učiteľ spoločne so žiakmi, prípadne učiteľ predvedie žiakom jej riešenie. Dôležité je, aby si žiaci uvedomili, že čísla, ktoré budú navrhovať pri riešení úloh 7 a 8, musia byť násobkami 20 (pričom každé z nich musí byť väčšie ako 50).*

*Úlohu 7 odporúčame riešiť v skupinách alebo spoločne. Nasledovať by mala diskusia o možných prístupoch k jej riešeniu.*

*Úlohu 8 by mali riešiť žiaci samostatne (na základe skúseností z diskusie o riešení úlohy 7), je možné zadať ju aj s istým časovým odstupom po riešení úlohy 7.*

1. **V Hornom konci**.
2. **30 %**
3. **80 hlasov**
4. **O 20 hlasov**.

   Existujú dva možné postupy:

   1. zistíme počet hlasov odovzdaných Eve (40 % z 200 je 80) a Stanislavovi (30 % z 200 je 60) a odčítame,
   2. odčítame percentuálne zisky Evy a Stanislava ( $40\,\% - 30\,\% = 10\,\%$ ) a určíme 10 % z 200 hlasov.

   *Poznámka. V prípade „pekných" čísel (o ktorých hovoríme pred riešením úlohy 1) sú výsledky získané uvedenými postupmi rovnaké. V prípade "nepekných" čísel to tak nemusí byť, zaokrúhľovanie počtu percent získaných hlasov by mohlo spôsobiť rozdiel medzi prvým a druhým výsledkom.*

5. **Voľby by vyhrala Eva.**

   Zisky jednotlivých kandidátov by boli:

   Stanislav: $40 + 5 + 60 = 105$, Rudolf: $30 + 10 + 30 = 70$,

   Karol: $20 + 15 + 30 = 65$, Eva: $10 + 20 + 80 = 110$.

6. $35\,\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ , $30\,\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$. Počty hlasov musia byť celé čísla, teda celkový počet hlasov v okrsku Dolný koniec musí byť také číslo $P$, aby $\frac{7}{20}$ aj $\frac{3}{10}$ z neho – teda $\frac{7}{20}P$ aj $\frac{3}{10}P$ – boli celé čísla. Preto $P$ musí byť násobok 20.

   (Z rovnakej úvahy vyplýva, že pre Centrum by to boli násobky 5, pre Horný koniec násobky 20. Keďže ale počet hlasov pre Centrum je $800 - P_{Hk} - P_{Dk}$, pričom číslo 800 aj počty hlasov $P_{Hk}$, $P_{Dk}$ v Hornom aj Dolnom konci sú násobky 20, tak počet hlasov pre Centrum musí byť tiež násobok 20.)

7. Predpokladáme, že žiaci budú riešiť úlohu tipovaním a že nebudú tipovať úplne nezmyselne. Napríklad si uvedomia, že

   - Karol porazil Stanislava iba v okrsku Dolný koniec, preto za celkový počet hlasov v tomto okrsku nemožno voliť malé číslo,
   - v okrsku Centrum získal Karol menej percent hlasov ako Eva aj ako Stanislav, preto tam treba dať málo z celkového počtu 800 hlasov.

   Karol vyhrá napríklad pri rozdelení hlasov: 100, 600, 100 (v takom prípade by celkové počty získaných hlasov boli: Stanislav 265, Karol 275 a Eva 260).

   Inou možnosťou je algebraický prístup. Ak označíme počty hlasov v jednotlivých okrskoch *A, B, C,* tak Stanislav získa $0{,}4A + 0{,}3B + 0{,}45C$ hlasov, Karol $0{,}2A + 0{,}35B + 0{,}45C$ hlasov a Eva $0{,}4A + 0{,}35B + 0{,}1C$ hlasov. Podľa zadania má platiť

   $$0{,}2A + 0{,}35B + 0{,}45C > 0{,}4A + 0{,}3B + 0{,}45C, \qquad \text{odtiaľ} \qquad B > 4A \qquad (*)$$

   a súčasne

$$0{,}2A+0{,}35B+0{,}45C>0{,}4A+0{,}35B+0{,}1C\,, \qquad \text{odtiaľ} \qquad 7C>4A \qquad (**)$$

Vhodné hodnoty *A, B, C* spĺňajúce nerovnosti (*) aj (**) môžeme nájsť skúšaním. Napr.: Zvolíme $A=60$ (to je najmenší násobok 20, ktorý je väčší ako 50, pozri text pred úlohou 6 a riešenie úlohy 7). Potom z (*) aj (**) dostaneme

$$B>240\,,\ 7C>240\,.$$

Zostáva zvoliť *B, C* tak, aby boli splnené tieto nerovnosti, súčet $B+C$ bol 740 a *B, C* boli násobky 20 (pozri riešenie úlohy 7). Také *B, C* sú napr. $B=280$, $C=460$.

*Poznámka: Podmienky (*), (**) možno použiť pri kontrole žiackych riešení: správne sú len tie riešenia úlohy 6, ktoré spĺňajú podmienky (*), (**) a navyše platí*

$$A+B+C=800\,,\quad A,B,C\geq 50 \qquad a \qquad A,\ B,\ C \text{ sú násobky } 20.$$

8. Eva by vyhrala napríklad pri rozdelení 300, 440, 60 (zisky by boli: Stanislav 279, Karol 241 a Eva 280). Pri tipovaní si treba uvedomiť, že v okrsku Horný koniec utrpela Eva porážku, preto tam treba dať málo z celkového počtu 800 hlasov. Najmenší možný počet je 60 (musí to byť číslo väčšie ako 50 a súčasne násobok 20).

   Zopakovaním algebraického prístupu z úlohy 7 dostaneme podmienky

$$0{,}4A+0{,}35B+0{,}1C>0{,}4A+0{,}3B+0{,}45C\,, \quad \text{odtiaľ} \quad B>7C\,, \qquad (+)$$

$$0{,}4A+0{,}35B+0{,}1C>0{,}2A+0{,}35B+0{,}45C\,, \quad \text{odtiaľ} \quad 4A>7C\,. \qquad (++)$$

   Správne sú preto tie riešenia, pre ktoré platí

$$B>7C\,,\ 4A>7C\,, \qquad A+B+C=800\,, \qquad A,B,C\geq 50 \quad \text{a} \quad A,\ B,\ C \text{ sú násobky } 20.$$

   Tieto podmienky sú splnené len pre $C=60$, pričom hodnota $A$ je niektoré z čísel 120, 140, ..., 300 a $B=740-A$.

   *Poznámka: Pre $C=80$ už riešenie neexistuje: Keby sme zvolili $C=80$, boli by najmenšie násobky 20 spĺňajúce podmienky (+) a (++) čísla $B=580$, $A=160$. Pre tieto hodnoty je však už súčet $A+B+C$ väčší ako 800.*

## PALACINKY

1. Martina by potrebovala **1,8 l** mlieka a **7** (alebo **8**) vajec.

   Martina si naplánovala upiecť $9\cdot 4=36$ palaciniek. Na 20 palaciniek potrebuje 1 liter mlieka, preto na 36 palaciniek potrebuje $36:20=1{,}8$ litra mlieka.

   Na 20 palaciniek potrebuje 4 vajcia, preto na 5 palaciniek potrebuje 1 vajce. Na 1 palacinku tak pripadá 1/5 vajca. Na 36 palaciniek by Martina teoreticky potrebovala 7 celých vajec a 1/5 ďalšieho vajca.

   *V skutočnosti je veľmi ťažko oddeliť pätinu vajca a ani sa to nerobí. Ak chýba málo, tak sa to väčšinou nechá tak (veď aj vajcia sú rôznej veľkosti), teda postačí 7 vajec. Ak chýba väčšie množstvo, tak sa pridá celé vajce a obyčajne sa pridá trochu múky, ale to len podľa hustoty cesta. Spôsob riešenia tejto situácie závisí od skúsenosti kuchára / kuchárky.*

2. **nebude** (chýbalo by jej 0,24 €)

   Nákup: $2\cdot 0{,}66+8\cdot 0{,}10+0{,}99+2\cdot 0{,}08+0{,}31+2\cdot 0{,}66+0{,}99+0{,}49+1{,}35=7{,}24$ €. Za nákup by mala Martina zaplatiť 7,24 €.

3. Martina piekla každú palacinku z väčšej dávky. To sa mohlo stať napr. tak, že ich robila hrubšie alebo na väčšej panvici, ako sa počítalo v recepte.

4. Osem „Martininých" palaciniek je štvrtina z 32, ktoré upiekla predtým. Tie robila z dvoch dávok z receptu, ktorý si pamätala. Treba teda napísať polovičné množstvá potravín uvedených v danom recepte.

| potravina | množstvo |
|---|---|
| mlieko | **0,5 litra** (alebo **5 dcl, 50 cl, 500 ml)** |
| vajcia | **2 kusy** |
| kryštálový cukor | **2 lyžice** |
| vanilkový cukor | ½ **balenia** |
| polohrubá múka | **25 dag** |

## PIRÁTI

1. **3 500** (= 5 250 : 1½) **pesiet**.

   Bocman dostal 1½ podielu. Máme zistiť hodnotu 1 podielu, ak 1½ podielu je 5 250, to možno urobiť napr. úvahou, trojčlenkou, priamou úmernosťou.

2. **5 040, 5 840, 5 680 alebo 6 480 pesiet**

   Odpoveď závisí od toho, či Jack a Edward boli alebo neboli zmrzačení. Podľa uvedených pravidiel tesár Jack mohol dostať

   - 1¼ podielu (ak nebol zmrzačený): ak 1¼ podielu je 7 100 pesiet, tak

     1 podiel = 7 100 : 1¼ = 5 680 pesiet

     Vtedy Edward mohol dostať

     - 1 podiel (ak nebol zranený), teda **5 680** pesiet,
     - 1 podiel + 800 pesiet (ak bol zmrzačený), to je 5 680 + 800 = **6 480** pesiet.

   - 1¼ podielu + 800 pesiet (ak bol zmrzačený), vtedy

     1 podiel = (7 100 – 800) : 1¼ = 5 040 pesiet

     Vtedy Edward mohol dostať

     - 1 podiel (ak nebol zranený), teda **5 040** pesiet,
     - 1 podiel + 800 pesiet (ak bol zmrzačený), to je 5 040 + 800 = **5 840** pesiet.

   Edward teda mohol dostať

   - 5 040 pesiet (ak Jack bol a Edward nebol zmrzačený),
   - 5 680 pesiet (ak Jack ani Edward neboli zmrzačení),
   - 5 840 pesiet (ak Jack aj Edward boli zmrzačení),
   - 6 480 pesiet (ak Edward bol zmrzačený a Jack nebol zmrzačený).

3. Očakávaná odpoveď je **2 058 pesiet** (prípadne **2 058,8** pesta, reálnosť tejto odpovede závisí od toho, na aké menšie časti sa delilo 1 peso, k tomu sa dostaneme o chvíľu). Pri hodnote podielu 2 059 pesiet alebo 2 058,9 peseta (tieto hodnoty vznikli zaokrúhlením výsledku (*), pozri ďalej), by niektorí piráti museli dostať menej, než im prislúcha.

   Z koristi odrátame najprv $17 \cdot 800 = 13\,600$ pesiet pre 17 zmrzačených, zvýši

   $$500\,000 - 13\,600 = 486\,400 \text{ pesiet.}$$

   Tie treba rozdeliť na

   $$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 5 \cdot 1\frac{1}{4} + 223 = 236\frac{1}{4} \text{ podielov}$$

   ($2 \cdot 2$ sú podiely kapitána a prvého dôstojníka, $2 \cdot 1\frac{1}{2}$ podiely hlavného delostrelca a bocmana, $5 \cdot 1\frac{1}{4}$ podiely tesára a ďalších 4 dôstojníkov). Na 1 podiel pripadá

$$486\,400 : 236\frac{1}{4} = 2\,058{,}835\ ...\ \text{pesiet}\,. \tag{*}$$

Učiteľ by mal o možných odpovediach rozprúdiť diskusiu, napr. prečo by sa hodnota podielu nemala zaokrúhľovať nahor alebo koľko koristi by zostalo nerozdelenej pri hodnote podielu 2 058 pesiet. Pri diskusii o odpovedi 2 058,8 pesta môže využiť doplňujúcu informáciu (tá je v texte pred úlohou 5) o delení pesa na časti: 1 peso = 8 reálov. Pestové mince sa kedysi skutočne rozrezávali na 4 alebo 8 častí, čím vznikali kúsky v hodnote 2 alebo 1 reál (mince bolo možné deliť, pretože ich hodnota bola určená množstvom striebra, ktoré obsahovali). Ak chceme korisť rozdeliť čo najpresnejšie, budeme rozdeľovať v reáloch, pritom najbližšie zdola k hodnote 0,835… pesta je $\frac{6}{8} = 0{,}75$ pesta (číslo $\frac{7}{8} = 0{,}875$ je už väčšie ako 0,835…), vtedy za hodnotu 1 podielu zvolíme 2 058 pesiet a 6 reálov. Iná možnosť je vyjadriť výsledok (*) v reáloch:

$$2\,058{,}835\ldots\ \text{pesa} = 16\,470{,}68\ldots\ \text{reálu},$$

preto jeden podiel bude 16 470 reálov, to je **2 058 pesiet a 6 reálov**.

*Poznámka. Suma 500 000 strieborných pesiet, o ktorej sa hovorí v texte, nie je nereálna. Hodnota zlata a striebra prevážaného španielskymi loďami bola skutočne obrovská. Napríklad hodnota zlata a striebra prevážaného 11 španielskymi loďami, ktoré sa potopili v r. 1715 pri pobreží Floridy (pozri text k obrázku zlatého escuda) bola skoro 56 miliónov reálov.*

4. Mohlo by sa to stať pri hodnote podielu **menšej ako 3 200 pesiet**.

   Zvýšenie zisku obyčajného vojaka môže spôsobiť zmrzačenie. Keby mal zmrzačený vojak mať väčší zisk ako nezranený dôstojník s 1¼ podielu, muselo by 800 pesiet za zmrzačenie byť viac ako ¼ podielu. Z nerovnosti

   ¼ podielu < 800 pesiet

   dostávame, že podiel musí byť menší ako 3 200 pesiet. Ak by sme namiesto dôstojníka s 1¼ podielu uvažovali dôstojníka s 1½ podielu, musel by podiel byť menší ako 1 600 pesiet, v prípade kapitána menší ako 800 pesiet. Z toho vyplýva: ak je podiel väčší ako 3 200 pesiet, tak každý dôstojník dôstane z koristi viac než ktorýkoľvek obyčajný vojak (bez ohľadu na to, či vojak bol alebo nebol zmrzačený).

5. **neoprávňuje**

   Zo vzťahov uvedených pred úlohou 5 vyplýva

   $$4\,£ = 1\ \text{dublón} = 8\ \text{escudo} = 8 \cdot 16\ \text{reálov} =$$
   $$= (8 \cdot 16) : 8\ \text{pesiet} = 16\ \text{pesiet},$$

   preto

   $$1\,£ = 4\ \text{pesetá}.$$

   Hodnota, ktorá sa uvádza v článku 9, je

   $$1\,000\,£ = 4\,000\ \text{pesiet},$$

   to je viac ako 3 500 pesiet.

   Iná možnosť je prepočítať 3 500 pesiet na libry. Dostaneme

   $$3500 : 4 = 875\ (£),$$

   čo je menej ako v článku 9 uvedená suma 1 000 £.

6. **približne 680 tisíc eur**

   Hodnotu 3 800 musíme

   - vydeliť 4 , dostaneme tak hodnotu vo vtedajších

*31.7.1715 potopil hurikán pri pobreží Floridy 11 španielskych lodí plných zlatých a strieborných mincí. V nasledujúcich rokoch Španieli veľkú časť nákladu zachránili z morského dna. Zvyšok sa podarilo objaviť až v 60. rokoch 20. storočia. Na obrázku zlatá minca v hodnote 2 escudá vylovená z vraku potopených lodí.*

librách,

- potom vynásobiť 550, dostaneme tak približnú hodnotu v dnešných librách,
- a napokon vynásobiť 1,3, dostaneme tak približnú hodnotu v eurách.

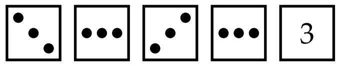
Vzhľadom na to, že čísla 550 a 1,3 sú len veľmi približné, nemá zmysel uvádzať výsledok s presnosťou na stovky či desiatky alebo nedajbože desatiny eura. Preto sme žiadali sumu

$$(3\,800 : 4) \cdot 550 \cdot 1{,}3 = 679\,250 \text{ (eur)} \qquad (**)$$

zaokrúhliť na desaťtisíce (napr. už pri zmene hodnoty 550 £ na hodnotu 548 £ by sme dostali výsledok 676 780 (eur), ktorý sa od (**) líši o vyše 2 000 eur).

## PREKLÁPANIE

*Poznámka. Nie je podstatné, ako žiak vyznačí v jednotlivých úlohách počet bodiek. Napríklad 3 bodky môže zaznačiť niektorým z nasledujúcich spôsobov:*




*Úlohy odporúčame riešiť aj s využitím hracích kociek. Ak žiaci získajú primerané skúsenosti, môžu úlohy riešiť bez modelov kociek, iba pomocou predstavy.*

1. Po 2. preklopení bude hore stena s **1 bodkou.**
   Po 8. preklopení bude hore stena so **6 bodkami**.

2. Po 100. preklopení bude vpredu stena s **5 bodkami**.
   Po 150. preklopení bude vpredu stena s **2 bodkami**.
   Po 999. preklopení bude vpredu stena s **1 bodkou**.

   Počet bodiek vpredu sa pravidelne opakuje po štyroch otočeniach:

   **5, 6, 2, 1**, 5, 6, 2, 1, 5, ....

   a) Cyklus 5, 6, 2, 1 sa zopakuje $100 : 4 = 25$-krát. Preto po 100 otočeniach bude kocka v rovnakej polohe ako na začiatku. Teda vpredu bude vidieť 5 bodiek.

   b) Keďže

   150 : 4 = 37, zvyšok 2,

   cyklus 5, 6, 2, 1 sa zopakuje 37-krát, a potom kocku ešte 2-krát preklopíme. Bude teda v rovnakej polohe ako po dvoch preklopeniach. Vpredu preto bude toľko bodiek, ako je oproti 5 bodkám:

   7 – 5 = 2 bodky.

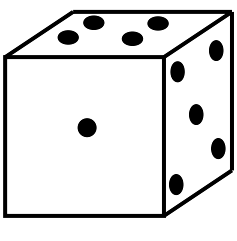
   c) Keďže

   999 : 4 = 249, zvyšok 3,

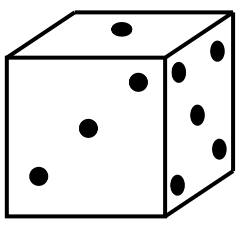
   cyklus 5, 6, 2, 1 sa zopakuje 249-krát, a potom kocku ešte 3-krát preklopíme. Bude teda v rovnakej polohe ako po troch preklopeniach. Vpredu tak bude toľko bodiek, ako je oproti 6 bodkám:

   7 - 6 = 1 bodka.

3. a)



b)

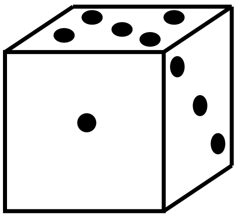


4. Prvýkrát po **6** preklopeniach.

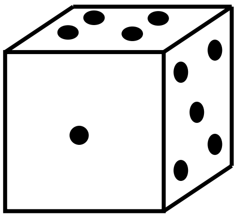
Správna odpoveď je každý násobok 6 preklopení. Iné odpovede ako 6 však pokladáme za málo pravdepodobné.

Kocka po jednotlivých preklopeniach vyzerá takto:

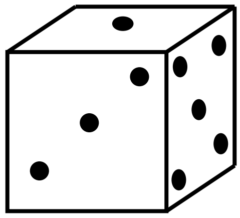
1. preklopenie:



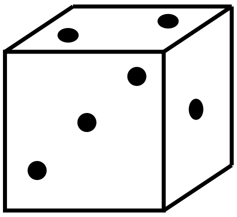
2. preklopenie:



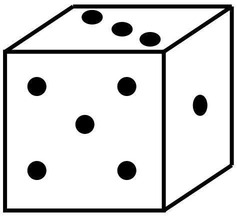
3. preklopenie:



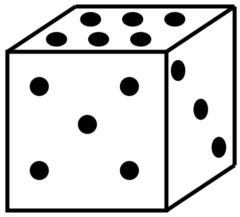
4. preklopenie:



5. preklopenie:



6. preklopenie:



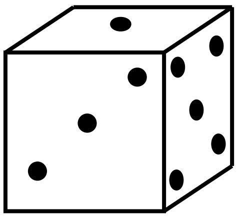
5. **nikdy**

   V predchádzajúcej úlohe sme zistili, že po 6 preklopeniach sa poloha kocky opakuje. V týchto šiestich polohách sa ani raz nevyskytujú vpredu 4 bodky (pozri obrázky v riešení úlohy 4).

6. V úlohe 4 sme zistili, že po každých šiestich preklopeniach sa situácia opakuje. Keďže

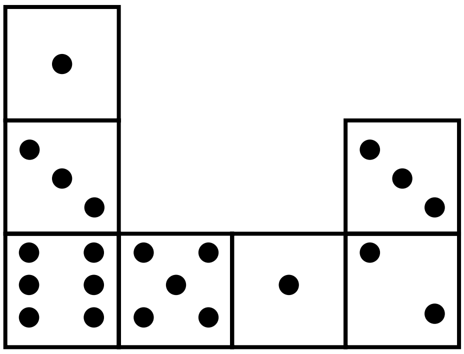
   $$99 : 6 = 16, \text{ zv. } 3,$$

   kocka po 99 preklopeniach bude v rovnakej polohe ako po 3 preklopeniach.



7. Druhýkrát sme preklápali smerom k **sebe**.
   Tretíkrát sme preklápali smerom **vpravo**.

8.



9. Výsledný súčet je vždy číslo 15 551.

10. Ak štyri štvorciferné čísla, o ktorých sa hovorí v zadaní, napíšeme pod seba, tak v každom stĺpci dostaneme dve dvojice počtov bodiek, ktoré sú oproti sebe. Napríklad

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{5} & 2 & \mathbf{3} & 2 \\ 6 & \mathbf{4} & 2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & 5 & \mathbf{4} & 5 \\ 1 & \mathbf{3} & 5 & \mathbf{3} \end{array}$$

Súčet takýchto dvojíc je vždy 7. Preto súčet uvedených 4 čísel je rovnaký ako súčet

$$7\,777 + 7\,777 = 15\,551$$

(alebo rovnaký ako súčet $14 + 140 + 1\,400 + 14\,000 = 15\,551$, ktorý dostaneme, ak najprv sčítame dve dvojice na miestach jednotiek, potom dve dvojice na miestach desiatok, atď.).

## PREZIDENTSKÉ VOĽBY

1. Očakávame, že väčšina žiakov bez veľkého rozmýšľania na základe výpočtu

$$\begin{array}{ll} 1\ \%\ \ldots\ldots\ldots & 42\,048{,}99 \\ 47{,}94\ \%\ldots\ldots\ldots & 47{,}94 \cdot 42\,048{,}99 = 2\,015\,828{,}5806 \approx 2\,015\,829 \end{array}$$

uvedie ako odpoveď **2 015 829** oprávnených voličov. Rovnaký výsledok dostanú aj tí žiaci, ktorí pri výpočte 47,94 % použijú namiesto hodnoty 42 048,99 zaokrúhlenú hodnotu 42 049.

Problém je v tom, že v uvedenom výpočte sa s hodnotou 47,94 ráta ako s presnou. V skutočnosti 47,94 vzniklo zaokrúhlením presnej hodnoty na 2 desatinné miesta.

Nasledujúce úlohy majú priviesť žiakov k tomu, aby si to uvedomili a prišli na to, nakoľko presnú informáciu o počte účastníkov volieb vieme z približnej hodnoty 47,94 % zistiť. Odporúčame riešenia úlohy 1 na hodine zatiaľ nerozoberať a pokračovať hneď riešením úlohy 2.

2. Vierin výsledok **je** správny.

Treba zistiť, koľko percent z 4 204 899 voličov je 2 015 624 voličov:

1 % je 4 204 8,99 2 015 624 : 4 204 8,99 = 47,935 134 7..., po zaokrúhlení 47,94 %.

Po overení správnosti Vierinho výsledku treba dosiahnuť, aby si žiaci uvedomili, že niečo nie je v poriadku (Viera totiž uviedla riešenie, ktoré je správne, ale žiaci ho pravdepodobne nedostali ako výsledok riešenia úlohy 1 – ten je 2 015 829). Preto sa v úlohe 3 spoločne pozrieme so žiakmi na ich riešenie úlohy 1 a urobíme skúšku správnosti pre hodnotu 2 015 829.

3. Skúškou preveríme, že číslo 2 015 829 je tiež (približne) 47,94 % z celkového počtu oprávnených voličov:

1 % je 4 204 8,99 2 015 829 : 4 204 8,99 = 47,940 009 9..., po zaokrúhlení 47,94 %.

Po tejto skúške správnosti by mala nasledovať diskusia. Ako je možné, že nám vyšiel iný počet voličov ako Viere? Urobili sme niekde chybu? Ak áno, tak kde a akú? Dôležité je, aby si žiaci všimli (prípadne ich na to môže upozorniť učiteľ), že výsledky skúšky v úlohách 2 a 3 nie sú presne 47,94 %. Keď si uvedomia, že obidve čísla (2 015 624 z úlohy 2 aj 2 015 829 z úloh 1 a 3) sú 47,94 % po zaokrúhlení na 2 desatinné miesta, môžeme pokračovať riešením úlohy 4. Túto úlohu odporúčame riešiť v malých skupinách.

4. Riešením úlohy 1 by mohli byť čísla **od 2 015 619 po 2 016 038**.

Daný počet percent 47,94 vznikol zaokrúhlením skutočného počtu percent na stotiny. Preto skutočný počet percent muselo byť niektoré číslo z intervalu $\langle 47{,}935\,;\,47{,}945)$. Každý počet oprávnených voličov, pre ktorý príslušný počet percent padne do tohto intervalu, je riešením 4. úlohy. Pre krajné čísla dostaneme:

z celkového počtu 4 204 899 voličov je

$$47{,}935\ \%: \quad 4\,204\,899 \cdot \frac{47{,}935}{100} = 2\,015\,618{,}335\,65\ldots\ ,$$

$$47{,}945\ \%: \qquad 4\,204\,899\cdot\frac{47{,}945}{100} = 2\,016\,038{,}825\,55...\ .$$

Hľadané počty voličov sú celé čísla, preto riešením úlohy 4 sú všetky počty voličov od 2 015 619 po 2 016 038 (žiaci by si mali rozmyslieť, prečo sme menšie číslo zaokrúhľovali nahor a väčšie nadol). Ak teda počet percent poznáme s presnosťou na 2 desatinné miesta, vieme, že hľadaný počet voličov je niektoré číslo medzi 2 015 619 a 2 016 038, čo je celkom 420 možností.

Ak chceme tento počet možností znížiť, museli by sme počet percent poznať s väčšou presnosťou (teda zaokrúhlený na väčší počet desatinných miest). Otázkou je, nakoľko presne musíme poznať počet percent, aby sme vedeli určiť počet zúčastnených voličov jednoznačne (teda aby výsledkom namiesto predchádzajúcich 420 možností bola len jediná možnosť).

*Poznámka: Podmieňovací spôsob* mohli byť *je tu na mieste. V skutočnosti existuje len jedno jediné riešenie úlohy, tým je skutočný počet voličov, ktorí sa zúčastnili prvého kola prezidentských volieb (prezradíme ho v zadaní úlohy 5). Ako vidno z riešenia našej série úloh, údaje uvedené v novinovom článku nám neumožňujú nájsť toto jediné riešenie. Vieme len zistiť, ktoré čísla by mohli byť týmto riešením, teda vieme nájsť riešenie s istou presnosťou (aká je táto presnosť, závisí od presnosti údajov uvedených v novinovom článku).*

5. Vypočítaný počet percent treba zaokrúhliť aspoň na **5** desatinných miest.

   Existuje niekoľko možných prístupov k riešeniu:

   1. Predpokladáme, že žiaci začnú experimentovať a postupne zaokrúhľovať na stále väčší počet desatinných miest, až riešenie (zaokrúhlenie na 5 desatinných miest) nájdu.
   2. Rýchlejšie sa k výsledku dopracujeme, ak zistíme, koľko percent z 4 204 899 predstavujú čísla 2 015 888,5 a 2 015 889,5 :

      2 015 888,5 : 42 048,99 = 47,941 424 990 231 632 198 537 943
      2 015 889,5 : 42 048,99 = 47,941 448 772 015 689 318 578 163

      Vidíme, že čísla určujúce počet percent pre hodnoty 2 015 889, 2 015 888,5 a 2 015 889,5 sa líšia na piatom desatinnom mieste. Riešením je preto zaokrúhlenie na 5 desatinných miest, teda 47,941 44 % (pozor, táto myšlienka nie je až taká jednoduchá, treba o nej so žiakmi chvíľu diskutovať).
   3. Ďalšou možnosťou je táto úvaha: Z čísla 4 204 899 je

| | |
|---|---|
| 1 % | 42 048,99 |
| 0,1 % | 4 204,899 |
| 0,01 % | 420,489 9 |
| 0,001 % | 42,048 99 |
| 0,0001 % | 4,204 899 |
| 0,000 01 % | 0,420 489 9 |

      Odtiaľ vidno: ak v počte percent zväčšíme o 1 napr. číslicu na mieste tisícin, zväčší sa počet voličov o niekoľko desiatok. Pri riešení úlohy 5 potrebujeme zistiť, pre ktoré desatinné miesto táto zmena bude predstavovať menej ako 1 voliča. Ako vidno, táto situácia nastane prvýkrát pri 5. desatinnom mieste. Preto počet percent treba udávať zaokrúhlený na 5 desatinných miest.

*Nasledujúce úlohy by mali preveriť, či a ako sa žiaci z riešenia úloh 1 – 5 poučili.*

6. Existuje viacero možných postupov riešenia, podrobnejšie sa im budeme venovať v komentári k úlohe 7.

   *Odporúčame jednu z dvoch možností:*

   - *Nechať úlohu 6 riešiť žiakov samostatne, ale riešenia – rovnako ako pri úlohe 1 – zatiaľ nekomentovať. Potom žiakov nechať diskutovať o úlohe 7 najprv v menších skupinách, a potom pokračovať v diskusii s celou triedou.*

- *Nechať úlohu 6 riešiť žiakov samostatne a na tabuľu napísať rôzne postupy, ktoré použili. Cieľom je získať všetky tri postupy uvedené v úlohe 7. Ak žiaci niektorý z týchto troch postupov neuvedú, uvedie ho učiteľ. Potom možno prejsť k diskusii o úlohe 7.*

7. **Správne riešenie majú Katarína a Juraj**.

Predovšetkým poznamenajme, že očakávame, že žiaci budú počet percent určovať s presnosťou na 2 desatinné miesta, keďže doteraz všetky údaje v citovanom novinovom článku boli s touto presnosťou. Diskusiou v triede by mali žiaci dospieť k týmto poznatkom:

- Katarínin a Jurajov postup sú obidva správne, líšia sa tým, že využívajú iné údaje z úryvku: Katarína využíva údaje o V. Mečiarovi, Juraj o počte všetkých platných hlasov. Rozdiel je v tom, že údaj o počte všetkých platných hlasov je presný, údaj o počte percent V. Mečiara len približný. Preto Juraj svojím postupom získa presný a Katarína len približný (teda v porovnaní s Jurajom menej presný) výsledok.
- Milan sa z prvých úloh nepoučil. Počítal totiž tak, akoby 32,74 % bol presný údaj. Ako sme videli v komentári k úlohe 1, výsledok získaný takýmto postupom je len približný, pričom nevieme odhadnúť, o koľko sa získané číslo odlišuje od skutočnej hodnoty. Pripomeňme, že Milanovým postupom dostaneme číslo 2 015 829, skutočný počet oprávnených voličov – ako vieme zo zadania úlohy 5 – je 2 015 889, teda o 60 väčší. Navyše Milan sa domnieva, že našiel presnú hodnotu, čo nie je pravda. Nie je teda vôbec isté, že Milanov výsledok udáva hľadaný počet percent s presnosťou na 2 desatinné miesta. Na tom nič nemení fakt, že Milan v tomto prípade zhodou okolností získal rovnaký výsledok ako Juraj.

*Táto časť diskusie bude pravdepodobne najťažším orieškom. Aby sme žiakov presvedčili, že Milanov postup skutočne nemusí viesť k správnej odpovedi, skúsme s nimi zopakovať výpočty pre prípad, že I. Gašparovič by získal napr.* 442 615 *hlasov. (Toto číslo je jedno z riešení úlohy, ktorú môže učiteľ nechať riešiť aj žiakov:* Aký počet hlasov by musel získať I. Gašparovič, aby Milanov výsledok bol 22,29 % a Jurajov 22,28 %? *Ak označíme x hľadaný počet hlasov, musí platiť*

$$32{,}74 \cdot \frac{x}{650\,242} \geq 22{,}285 > \frac{x}{19\,862{,}14},$$

*riešením sú čísla od* 442 598 *do* 442 627.*) Vtedy Jurajov – zaručene správny – výsledok je*

$$\frac{442\,615}{19\,862{,}14} = 22{,}284\,356\ldots \approx 22{,}28\,,$$

*ale Milan svojím postupom dostane*

$$32{,}74 \cdot \frac{442\,615}{650\,242} = 22{,}285\,879\ldots \approx 22{,}29\,.$$

*Katarína v tomto prípade dostane riešenie I. Gašparovič získal* 22,28 % *alebo* 22,29 %*. Žiakov možno bude trápiť, prečo Katarínin postup vyhlasujeme za správny, a Milanov za nesprávny, ak Katarína tiež uvádza hodnotu* 22,29*. Rozdiel medzi Kataríniným a Milanovým postupom je v tom, že Katarína nájde interval hodnôt, v ktorom hľadané riešenie iste leží, zatiaľ čo Milan uvedie len jednu hodnotu, ktorá v niektorých prípadoch je a v iných nie je správnym riešením. Pritom Milanov postup neumožňuje zistiť, kedy nastala prvá a kedy druhá možnosť. Ak ho teda použijeme, nevieme, či riešenie, ktoré sme našli, je alebo nie je správne.*

## PRIESTUPNÉ ROKY

*V tejto téme je vysvetlený rozdiel medzi juliánskym a gregoriánskym kalendárom na základe doby obehu Zeme okolo Slnka vrátane prechodu z juliánskeho na gregoriánsky kalendár, ktorý sa v Uhorsku uskutočnil v r. 1587.*

*Úloha 3 je trochu komplikovanejšou obdobou úlohy 2, preto odporúčame, aby ju po diskusii o riešení úlohy 2 riešili žiaci samostatne.*

*V úlohách tejto témy kvôli jednoduchosti predpokladáme, že doba obehu Zeme okolo Slnka je konštantná. V skutočnosti sa táto doba mení, pritom časť vplyvov pôsobiacich na túto zmenu je náhodná, vplyv iných faktorov sa dá vypočítať. Preto nie je možné spätne úplne presne určiť, kedy Zem prechádzala jarným bodom v rokoch 325 a 1587 (tomuto časovému intervalu sa venujú úlohy 4 – 6). Súčasne si treba uvedomiť obmedzenú presnosť astronomických meraní v minulosti. To je dôvod, prečo napr. v úlohe 5 uvádzame v odpovediach slovo „asi“.*

*Téma Pristupné roky súvisí s témou Kalendár.*

1. 365 dní a približne **6 hodín**

   Deň má 24 hodín, preto 0,2422 dňa je $24 \cdot 0{,}2422 = 5{,}8128 \approx 6$ hodín. Ak to učiteľ uzná za vhodné, môže nechať žiakov dobu obehu určiť aj s väčšou presnosťou:

   a) na minúty je to 365 dní 5 hodín a približne 49 minút:

      Hodina má 60 minút, preto 0,8128 hodiny je

      $$0{,}8128 \cdot 60 = 48{,}768 \approx 49 \text{ minút.}$$

      Iná možnosť: Deň má $24 \cdot 60 = 1\,440$ minút, preto 0,2422 dňa je

      $$1\,440 \cdot 0{,}2422 = 348{,}768 \approx 349 \text{ minút.}$$

      Po delení výsledku číslom 60 máme

      $$349 : 60 = 5 \text{, zvyšok 49,}$$

      preto 0,2422 dňa je 5 hodín a približne 49 minút.

   b) na sekundy je to 365 dní 5 hodín 48 minút a približne 46 sekúnd.

2. a) Vyznačené miesto by malo ležať medzi zimným slnovratom a jarným bodom, bližšie k jarnému bodu.

   b) V roku 2100 by jar začínala **17. apríla**.

   Medzi 21. marcom 2000 a 21. marcom 2100 by bolo 100 kalendárnych rokov po 365 dní, to je celkom

   $$100 \cdot 365 = 36\,500 \text{ dní.}$$

   Na 100 obehov okolo Slnka potrebuje Zem

   $$100 \cdot 365{,}2422 = 36\,524{,}2 \approx 36\,524 \text{ dní.}$$

   Teda na to, aby sa dostala do jarného bodu, potrebuje ešte približne 24 dní. Dostane sa tam asi 24 dní po 21. marci 2100, to je 17. apríla 2100.

   Každé ročné obdobie trvá približne 90 dní, preto medzi zimným slnovratom a jarným bodom je približne 90 dní. 24 dní je menej ako polovica z 90, preto 21. marca 2100 by mala byť Zem bližšie k jarnému bodu než k bodu zimného slnovratu.

   Za podstatné pokladáme objavenie faktu, že jar by začala asi 24 dní po 21. marci 2100. Je možné, že žiaci sa dopustia chýb pri výpočte dátumu 24 dní po 21. marci, tie pokladáme v porovnaní s objavením uvedeného faktu za nepodstatné.

3. a) Vyznačené miesto by malo ležať medzi jarným bodom a letným slnovratom, bližšie k letnému slnovratu.

   b) V roku 2100 by jar začínala **4. januára**.

Za 100 rokov by uplynulo $100 \cdot 366 = 36\,600$ dní, na 100 obehov treba $36\,524{,}22 \approx 36\,524$ dní. Rozdiel je $36\,600 - 36\,524 = 76$, preto 21. marca 2100 by uplynulo asi 76 dní od prechodu Zeme jarným bodom. 76 dní pred 21. marcom je 4. január.

Ak to žiakov zaujme, môžu skúsiť vyriešiť aj komplikovanejšiu úlohu: kedy by za uvedených predpokladov začínala jar napr. v roku 2110 (vtedy sa odčítaním 83 dní od 21. marca 2110 dostaneme do decembra roku 2109, preto začiatok jari v roku 2110 nastane až po ďalšom obehu Zeme okolo Slnka).

4. **315**

   Treba zistiť, koľko násobkov čísla 4 leží medzi 325 a 1587. Keďže

   $$325 : 4 = 81,\ \text{zvyšok } 1, \qquad 1587 : 4 = 396,\ \text{zvyšok } 3,$$

   sú to všetky násobky od 82-násobku (to je číslo 328) po 396.násobok (číslo 1584). Tých je $396 - 81 = 315$.

   Iný spôsob výpočtu: $(1587 - 325) : 4 = 315{,}5$, preto medzi rokmi 325 a 1587 je 315 celých 4-ročných úsekov, v každom je jeden priestupný rok.

5. **asi 10 dní pred 21. marcom**

   Medzi 21. marcom 325 a 21. marcom 1587 uplynulo 1 262 rokov, z nich 315 bolo priestupných, zvyšných $1262 - 315 = 947$ nepriestupných. Celkom je to

   $$947 \cdot 365 + 315 \cdot 366 = 460\,945 \text{ dní.} \qquad (*)$$

   Na 1 262 obehov potrebuje Zem $1262 \cdot 365{,}2422 = 460\,935{,}656\,4$ dní. To je asi o 10 dní menej ako je výsledok (*), preto 21. marca 1587 bolo asi 10 dní po prechode Zeme jarným bodom.

6. **1. november 1587**

   Správne malo byť o 10 dní neskôr, to je 1.11.1587.

7. **306**

   Juliánsky a gregoriánsky kalendár sa odlišujú len v priestupnosti rokov, ktoré sú násobkami 100. Medzi rokmi 325 a 1587 je 12 takých rokov (400, 500, … 1500), z nich 3 sú násobkami 400 (400, 800, 1200). V gregoriánskom kalendári sú z uvedených 12 rokov priestupné len tieto 3, teda medzi rokmi 325 a 1587 má gregoriánsky kalendár o $12 - 3 = 9$ priestupných rokov menej, to je $315 - 9 = 306$ priestupných rokov.

8. Zmení sa v roku **2100, v** tomto roku sa **zväčší na 14** dní.

   Zmení sa v roku, ktorý je násobok 100, ale nie je násobok 400. V tomto roku má juliánsky kalendár o 1 deň viacej, preto sa jeho omeškávanie za gregoriánskym zväčší o 1 deň. Prvý takýto rok po roku 2008 je rok 2100.

9. V gregoriánskom kalendári na každých 400 rokov pripadá **97** priestupných rokov. Preto priemerná dĺžka roka v juliánskom kalendári je **365,25** dňa, priemerná dĺžka roka v gregoriánskom kalendári je **365,2425** dňa.

   V juliánskom kalendári na 4 roky pripadá 1 deň naviac, to je priemerne $\frac{1}{4} = 0{,}25$ dňa na 1 rok. Preto priemerná dĺžka roka je 365,25 dňa. V gregoriánskom kalendári na 400 rokov pripadá 97 dní naviac, to je priemerne $\frac{97}{400} = 0{,}2425$ dňa na 1 rok. Preto priemerná dĺžka roka je 365,2425 dňa.

10. Vo väčšom súlade je **gregoriánsky kalendár,** pretože priemerná dĺžka jeho roka sa menej odlišuje od doby obehu Zeme okolo Slnka (asi o 0,0003 dňa, to je približne 26 sekúnd) ako v priemerná dĺžka roka v juliánskom kalendári (asi o 0,0078 dňa, to je približne 11 minút).

## QUINCUNX – GALTONOVA DOSKA

*Simuláciu Quincunxu nájdete napr. na stránke*
*http://www.mathsisfun.com/probability/quincunx.html.*

*Pre veľký počet chlievikov a veľký počet loptičiek sa výsledné rozdelenie loptičiek v chlievikoch podobá tzv. normálnemu rozdeleniu, reprezentovanému Gaussovou krivkou.*

1. $\frac{1}{2}$, resp. 50 % (1 z 2 rovnocenných možností)
2. $\frac{1}{4}$, resp. 25 % (1 zo 4 rovnocenných možností)
3. $\frac{1}{2}$, resp. 50 % (2 zo 4 rovnocenných možností)
4. $\frac{1}{4}$, resp 25 % (4 zo 16 rovnocenných možností)
5. **E**. Netreba výpočet, stačí si uvedomiť symetriu.
6. **A**, **B**, **E**, **F**. Výpočet nie je nevyhnutný, stačí vziať do úvahy symetriu a uvedomiť si nárast pravdepodobnosti smerom od krajov k stredu.

## RÝCHLOSŤ ZVIERAT

*Zadanie úlohy 2 je príležitosťou na diskusiu o tom, že pri riešení úloh z praxe je často potrebné reálnu situáciu zjednodušiť, teda nahradiť ju jednoduchším modelom, ktorý vieme riešiť. Preto treba niektoré skutočnosti (v našom prípade napr. rozbiehanie a „kľučkovanie“) zanedbať. Odporúčame najprv v diskusii sformulovať zjednodušený model, a až potom nechať žiakov riešiť úlohu samostatne.*

*Úlohy 3 a 4 sú zamerané na prevody medzi rýchlosťami vyjadrenými v rôznych jednotkách (km/h, cm/min). Tieto úlohy môžu byť východiskom k diskusii o voľbe vhodných jednotiek.*

*Je možné, že niektorí žiaci pochopia úlohu 5 príliš realisticky a začnú uvažovať o tom, ako dlho dokáže slimák liezť bez prestávky (a navyše ešte maximálnou rýchlosťou). Možno to využiť ako príležitosť na rozvíjanie schopnosti diskutovať a argumentovať.*

1. **za 6 sekúnd**

   Možno počítať niekoľkými spôsobmi:

   1. Ide o priamu úmeru medzi časom a vzdialenosťou. Za hodinu by gepard prebehol 120 km, to je (ak hodiny premeníme na sekundy a kilometre na metre) 120 000 metrov za 3 600 sekúnd. Preto 200 m prebehne za $\frac{120\,000}{200} = 600$-krát menší čas, teda za $3\,600 : 600 = 6$ sekúnd.
   2. Použijeme vzťah medzi vzdialenosťou $s$, rýchlosťou $v$ a časom $t$

      $$s = v \cdot t\,.$$

      Dosadíme $v = 120$ km/h, $s = 0{,}2$ km alebo $v = \frac{120\,000}{60 \cdot 60} = 33{,}333...$ m/s, $s = 200$ m a dostaneme

      - v prvom prípade $0{,}2 = 120 \cdot t$, odtiaľ

        $$t = \frac{0{,}2}{120} = 0{,}001\,666... \text{ hodín } = 0{,}001\,666... \cdot 60 \cdot 60 = 6 \text{ sekúnd},$$

      - v druhom prípade $200 = 33{,}333... \cdot t$, odtiaľ

        $$t = \frac{200}{33{,}333...} = 6 \text{ sekúnd.}$$

*Poznámka. Výpočet uvedený v druhej odrážke predpokladá použitie kalkulačky (pri ktorom žiaci nebudú zaokrúhľovať medzivýsledky, teda budú počítať s maximálnym počtom miest, ktorý kalkulačka umožňuje). Pri takomto spôsobe výpočtu je vhodné diskutovať so žiakmi o práci s periodickými číslami a o zaokruhľovaní medzivýsledkov (keby sme medzivýsledok 33,333… zaokrúhlili, nedostali by sme na konci správnu hodnotu 6 sekúnd).*

Inou možnosťou je použitie zlomkov a ich úprav:

$$120\text{ km/hod} = \frac{120\text{ km}}{1\text{ hod}} = \frac{120\,000\text{ m}}{60\cdot 60\text{ s}} = \frac{100\text{ m}}{3\text{ s}} = \frac{100}{3}\text{ m/s},$$

dosadením do vzťahu $s = v\cdot t$ potom dostaneme

$$200 = \frac{100}{3}\cdot t, \quad \text{odtiaľ} \quad t = 6 \text{ sekúnd.}$$

2. **približne 70 metrov**

Predpokladáme, že antilopa aj gepard okamžite vyrazia maximálnou rýchlosťou (teda zanedbávame „rozbiehanie“) a bežia po jednej priamke (teda zanedbávame napr. možné „kľučkovanie“ antilopy a s tým súvisiacu zmenu rýchlosti oboch zvierat). Uvedieme dve možné riešenia:

1. Za hodinu by sa vzdialenosť medzi antilopou a gepardom zmenšila o 40 km (to je rozdiel ich rýchlostí), preto za 1 sekundu sa zmenší 3 600-krát menej, t.j. o $\frac{40\,000}{3\,600} = 11{,}111\ldots$ metrov. Za 6 sekúnd to bude $6\cdot 11{,}111\ldots = 66{,}666\ldots \approx 70$ metrov.
2. Za 6 sekúnd prebehne
   - gepard rýchlosťou 120 km/h vzdialenosť 200 m (to vieme z riešenia úlohy 1),
   - antilopa rýchlosťou 80 km/h $= \frac{80\,000}{3\,600} = 22{,}222\ldots$ m/s vzdialenosť asi 133 m.

   Rozdiel prebehnutých vzdialeností je približne $200 - 133 = 67 \approx 70$ m.

3. správny odhad je **d) asi 40 cm,** výpočtom dostaneme výsledok **približne 42 cm**

Za hodinu prejde 0,05 km = 50 m, preto za 1 minútu prejde $\frac{50}{60} = 0{,}833...$ m a za pol minúty $\frac{0{,}833...}{2} = 0{,}416...$ m $= 41{,}666... \approx 42$ cm.

4. a) **50 cm/min** b) **0,03 km/h**

Pri preliezaní múrika prešiel slimák dráhu

$$25 + 20 + 25 = 70 \text{ cm} = 0{,}7 \text{ m}$$

za čas 1 minúta 24 sekúnd = 84 sekúnd.

a) Rýchlosť v cm/min môžeme nájsť viacerými spôsobmi, napr.:

1. vypočítame, koľko cm prejde slimák za 1 sekundu (teda zistíme rýchlosť v cm/s) a výsledok vynásobíme 60 (teda zistíme, koľko cm prejde za 60 sekúnd). Za 1 s prejde $\frac{70}{84} = 0{,}833...$ cm, za minútu to bude $0{,}833...\cdot 60 = 50$ cm.
2. čas vyjadríme v minútach v desiatkovom zápise:

$$24 \text{ sekúnd} = \frac{24}{60} = 0{,}4 \text{ minúty,}$$

preto 1 minúta 24 sekúnd = 1,4 minúty.

Rýchlosť v cm/min je potom podiel $\frac{70}{1,4} = 50$ cm/min.

b) Rýchlosť v km/h (teda dráhu, ktorú by prešiel za 1 hodinu) môžeme nájsť podobne, pričom môžeme vychádzať

1. z pôvodných údajov v zadaní: ak za 84 sekúnd prešiel 0,7 metra, tak za 3 600 sekúnd prejde $0,7 \cdot \frac{3\,600}{84} = 30$ metrov, to je 0,03 km.

2. z vypočítanej rýchlosti v cm/min: za 1 minútu prejde 0,5 m, preto za 60 minút prejde $60 \cdot 0,5 = 30$ metrov, to je 0,03 km.

5. **áno**

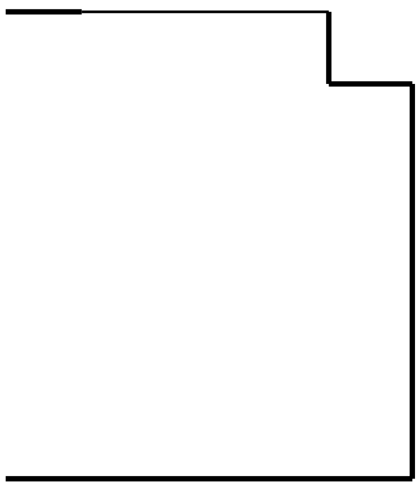
List bol na ceste od odosielateľa k prijímateľovi viac ako 13 dní (mohol byť odoslaný najneskôr 20.12. v noci a doručený najskôr 3.1. ráno), to je $13 \cdot 24 = 312$ hodín.

1. Za 312 hodín by slimák (lepšia by bola štafeta slimákov, to by umožnilo udržiavať vysokú rýchlosť po celú dobu) prešiel maximálnou rýchlosťou 0,05 km/h vzdialenosť $312 \cdot 0,05 = 15,6$ km. To je viac ako 11,1 km z textu úlohy. Preto by štafeta slimákov dorazila do cieľa skôr ako list.

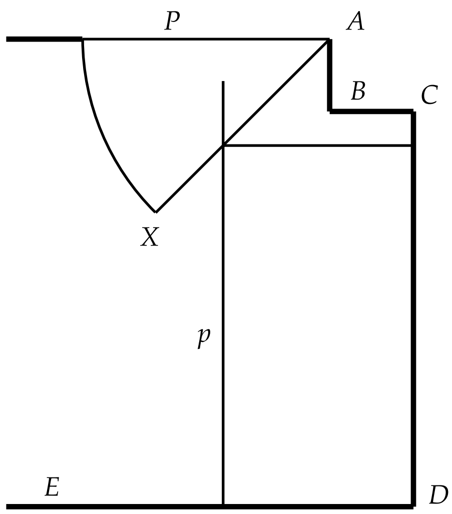
2. List potreboval na 11,1 km viac ako 312 hodín, preto jeho rýchlosť bola menšia ako $\frac{11,1}{312} = 0,035...$ km/h. Toto číslo je menšie ako maximálna rýchlosť slimáka.

## SKRIŇA ZA DVERAMI

1. Predpokladáme, že žiaci zvolia mierku 1:10. Náš plánik je (kvôli úspore miesta) v mierke 1:20, pozri obr. 3.



*obr. 3*




*obr. 4*

2. Pozri obrázok 4.

Postup konštrukcie:

1. Zostrojíme rovnobežku $p$ s úsečkou $CD$ vo vzdialenosti 5 cm od $CD$ (pri mierke 1:10).
2. Zostrojíme uhol $PAX$, ktorého veľkosť je 45°.
3. Priesečník priamky $p$ a polpriamky $AX$ bude jeden z rohov skrine.

*Poznámka. Odmeraná dĺžka narysovanej skrine by mala byť v súlade s výpočtom (úloha 3), teda 95 mm (pri mierke 1:10). Samozrejme, je možná odchýlka v závislosti od presnosti rysovania.*

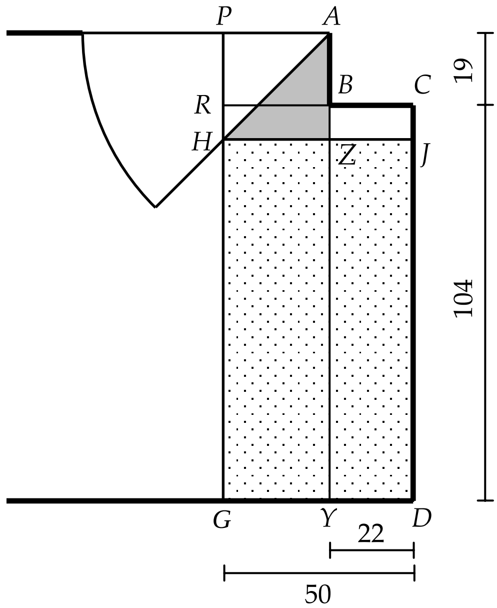
Skutočná dĺžka skrine je potom 95 cm.

3. **95 cm**

Na obr. 5 je skriňa vyznačená bodkovane. Čiary, ktoré na obrázku pribudli, sú predĺžením úsečiek z obrázku 4. Vznikne tak niekoľko obdĺžnikov, ktoré umožňujú výpočet dĺžok $|AY|$ a $|HZ|$:

$$|AY| = |AB| + |BY| = |AB| + |CD| = 19 + 104 = 123,$$

$$|HZ| = |HJ| - |ZJ| = |GD| - |BC| = 50 - 22 = 28.$$




*obr. 5*

Na zistenie dĺžky $|ZY|$ potrebujeme poznať veľkosť $|AZ|$. Využijeme trojuholník *AHZ*, ktorý sme vyznačili sivo. Ten je rovnoramenný (uhly pri vrcholoch *A* a *H* majú veľkosť 45°), preto

$$|AZ| = |HZ| = 28.$$

Potom

$$|ZY| = |AY| - |AZ| = |AY| = 123 - 28 = 95.$$

Skriňa môže mať maximálnu šírku 95 cm.

*Poznámka 1. Vo výpočtoch sme použili skutočné rozmery. Niektorí žiaci budú počítať s rysovanými veľkosťami, a potom výsledok prevedú pomocou nimi zvolenej mierky na skutočné.*

*Poznámka 2. V uvedenom postupe možno namiesto trojuholníka AHZ použiť trojuholník AHP.*

4. Výsledok získaný výpočtom je približne **74 cm,** výsledok získaný grafickou metódou bude ovplyvnený presnosťou merania.

Žiaci sa môžu rozhodnúť pre grafickú alebo výpočtovú metódu. Predpokladáme, že uprednostnia *grafickú*, teda zopakujú postup riešenia úlohy 2, v ktorom uhol 45° nahradia uhlom 60°.

V prípade *výpočtovej* metódy možno použiť obr. 5, treba si však uvedomiť, že trojuholník *AHZ* má teraz uhol 30° pri vrchole A a uhol 60° pri vrchole *H*. Rovnako ako predtým platí $|AY| = 123$, $|HZ| = 28$, treba nájsť veľkosť $|AZ|$. To možno urobiť viacerými (v podstate rovnocennými) spôsobmi:

1. Trojuholník *AHZ* je „polovica“ rovnostranného trojuholníka. Preto

$$|AH| = 2|HZ| = 56.$$

Veľkosť $|AZ|$ potom nájdeme napr. použitím Pytagorovej vety

$$|AZ| = \sqrt{|AH|^2 - |HZ|^2} = \sqrt{3\,136 - 784} = \sqrt{2\,352} = 48{,}497...$$

alebo použitím vzorca pre veľkosť výšky v rovnostrannom trojuholníku so stranou $a$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}a\ , \quad \text{preto} \quad |AZ| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AH| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 56 = 48{,}497...$$

2. V trojuholníku $AHZ$ platí

$$\frac{|AZ|}{|HZ|} = \operatorname{tg}(\angle AHZ)\ , \quad \text{t.j.} \quad \frac{|AZ|}{28} = \operatorname{tg}(60°)\ ,$$

odtiaľ

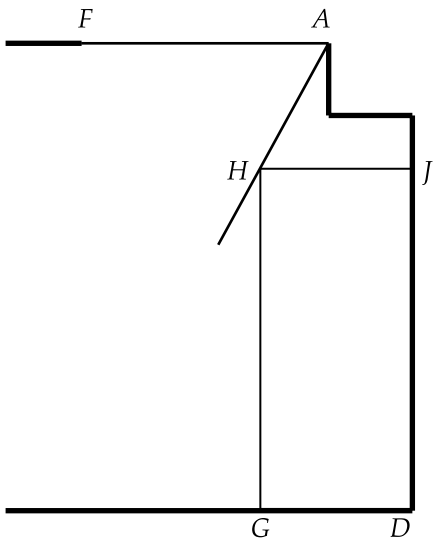
$$|AZ| = 28\cdot\operatorname{tg}(60°) = 48{,}497...\ .$$

Potom hľadaná veľkosť $|ZY|$ je

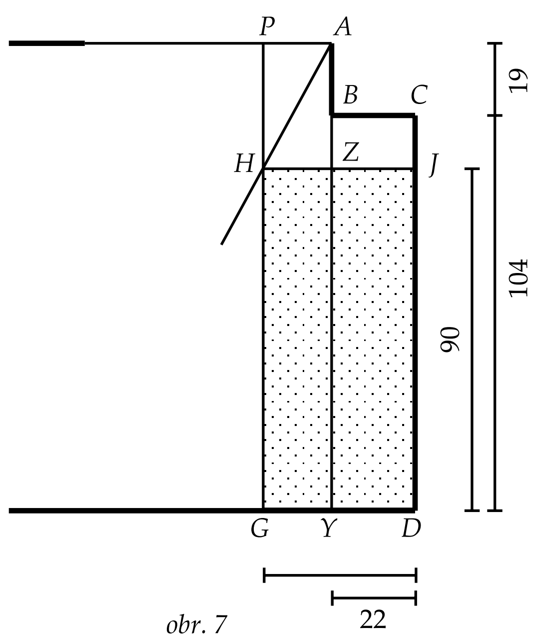
$$|ZY| = |AY| - |AZ| = |AY| - |ZH| = 123 - 48{,}497... \approx 74{,}5 \text{ cm.}$$

Skriňa môže mať šírku až 74,5 cm, po zaokrúhlení nadol 74 cm.

5. Očakávaný postup: Predpokladáme, že žiaci si zvolia mierku 1:10 (náš obrázok je opäť v mierke 1:20). Do plániku izby narysujeme obdĺžnik $GDJH$ (pozri obr. 6) tak, aby v príslušnej mierke mali jeho strany dĺžku $|GD| = 40$ cm, $|DJ| = 90$ cm. Vrchol $H$ spojíme s bodom $A$ a odmeriame veľkosť uhla $FAH$. Veľkosť zistená meraním by mala byť **približne 61°**.




*obr. 6*




*obr. 7*

6. približne **61°**

Pri výpočte môžeme vychádzať z trojuholníka $PAH$ alebo trojuholníka $AHZ$, ktorý je s ním zhodný (pozri obr. 7). V trojuholníku $AHZ$ môžeme vypočítať buď veľkosť uhla pri vrchole $A$ (hľadaný uhol otvorenia dverí je doplnok tohto uhla do 90°), alebo veľkosť uhla pri vrchole $H$ (ten má rovnakú veľkosť ako hľadaný uhol $PAH$). Postup je vo všetkých prípadoch prakticky rovnaký, preto uvádzame len výpočet uhla $ZHA$ pri vrchole $H$ v trojuholníku $AHZ$.

V trojuholníku $AHZ$ poznáme dĺžky strán $HZ$ a $AZ$:

$$|HZ| = |HJ| - |ZJ| = |GD| - |BC| = 40 - 22 = 18\ ,$$

$$|AZ| = |AB| + (|BY| - |ZY|) = 19 + (104 - 90) = 33 \,.$$

Potom

$$\mathrm{tg}\,(\angle ZHA) = \frac{|AZ|}{|HZ|} = \frac{33}{18}\,, \quad \text{odtiaľ} \quad |\angle ZHA| = 61{,}389\,... \cong 61^\circ \,.$$

## SPOLOČNÝ PRENÁJOM

*Po vyriešení úlohy 1 odporúčame diskutovať o tom, že v reálnom živote sa zvyčajne kupuje radšej viac farby ako menej. Ak farba ostane, dá sa použiť neskôr. Ak by sa kúpilo množstvo presne podľa výpočtu, mohlo by sa stať, že by farba chýbala a bolo by potrebné dokupovať ju.*

*Jedno z možných riešení úlohy 2 je na obrázku pred úlohou 4. Žiaci by preto tento obrázok nemali vidieť skôr, než vyriešia úlohu 2. Ak sa tomu nedá zabrániť, môže učiteľ vyzvať žiakov, aby skúsili nájsť iné riešenie, než je znázornené na obrázku pred úlohou 4.*

*Úloha 3 je vhodná na domácu aktivitu. Odporúčame vyhlásiť súťaž o najlepší návrh (teda rozdelenie s čo najväčšou plochou jednej pivnice spĺňajúce podmienky pred úlohou 2). Vyhráva každý, kto bude mať túto plochu maximálne o 5 % menšiu ako odovzdaný návrh s najväčšou plochou. Podmienku 5 % sme dali preto, aby súťaž mohla mať viac víťazov.*

*Úlohu 4 odporúčame riešiť až po vyriešení a prediskutovaní úlohy 2. Po vyriešení úlohy 4 odporúčame diskusiu o tom, nakoľko presne má zmysel počítať plochy jednotlivých miestností. Je totiž otázne, či pri stavebných úpravách v reálnom živote dokážeme jednotlivé priečky umiestniť s presnosťou na centimetre.*

1. Balenia, ktorých celková hmotnosť je **17,5 kg** (10 + 7,5 alebo 5 + 5 + 7,5) alebo **20 kg** (10 + 10 alebo 7,5 + 7,5 + 5 alebo 10 + 5 + 5 alebo 5 + 5 + 5 + 5)

   Celkovú plochu, ktorú treba vymaľovať, môžeme

   1. *vypočítať presne*: Plochu stien, ktorú treba maľovať, vypočítame ako obsah stien (vrátane okna a dverí, ten je $2 \cdot 3 \cdot (3{,}8 + 5{,}1) = 53{,}4$ m²) mínus obsah okna a dverí (ten je $0{,}5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 3$ m²):

      $$3 \cdot 2 \cdot (3{,}8 + 5{,}1) - 0{,}5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 50{,}4 \ \text{m}^2.$$

      Plocha stropu miestnosti je $3{,}8 \cdot 5{,}1 = 19{,}38$ m², preto celková plocha, ktorú treba vymaľovať, je

      $$50{,}4 + 19{,}38 = 69{,}78 \ \text{m}^2.$$

      Na jeden náter potrebujeme

      $$69{,}78 : 8 = 8{,}722\,5 \ \text{kg farby},$$

      teda na dva nátery to bude

      $$8{,}722\,5 \cdot 2 = 17{,}445 \ \text{kg farby}.$$

   2. *odhadnúť*: Na rozdiel od predchádzajúceho výpočtu neodrátame plochu okna a dverí. Plocha stien (vrátane okien a dverí) a stropu je 72,78 m². Na jeden náter treba $72{,}78 : 8 = 9{,}097\,5$ kg farby, na dva nátery $2 \cdot 9{,}097\,5 = 18{,}195$ kg farby.

      Prvý z uvedených výsledkov (17,445 kg farby) vedie k dvom možným odpovediam:

      a) *„matematická" odpoveď*: Kúpime celkom 17,5 kg farby (jedno 10 kg a jedno 7,5 kg balenie alebo dve 5 kg a jedno 7,5 kg balenie). V tomto prípade ale riskujeme, že nakúpené množstvo farby nebude stačiť a budeme nútení dokúpiť ďalších 5 kg (to je najmenšie balenie, ktoré majú v obchode).

      b) *odpoveď zohľadňujúca skúsenosti z reálneho života*: Nebudeme riskovať a kúpime celkom 20 kg farby (dve 10 kg balenia alebo jedno 10 kg a dve 5 kg balenia alebo dve 7,5 kg a jedno 5 kg balenie alebo štyri 5 kg balenia).

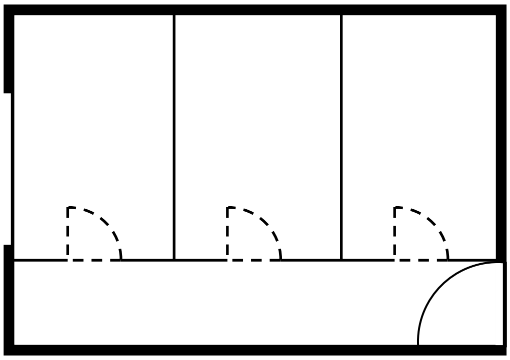
      Ak budeme vychádzať z druhého výsledku (18,195 kg farby), kúpime celkom 20 kg farby. Odpoveď v tomto prípade bude rovnaká ako odpoveď b) pre výsledok 17,445 kg farby.

2. Úloha má viac riešení. Predpokladáme, že najčastejšie žiaci uvedú niektoré z riešení, ktoré sú na obrázkoch *riešenie A, riešenie B, riešenie C a riešenie D.* Plocha jednej pivnice (zaokrúhlená na celé dm²) v uvedených riešeniach je postupne **476 dm², 519 dm², 556 dm² a 522 dm².**

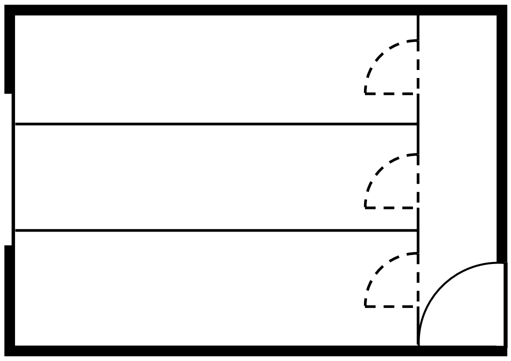
   Za najpravdepodobnejšie pokladáme riešenia A a B (predpokladáme totiž, že veľa žiakov bude hľadať len možnosti, v ktorých všetky pivnice majú rovnaký tvar).

   V riešeniach C a D majú jednotlivé pivnice rovnakú plochu, ale jedna z nich má iné rozmery ako zvyšné dve.

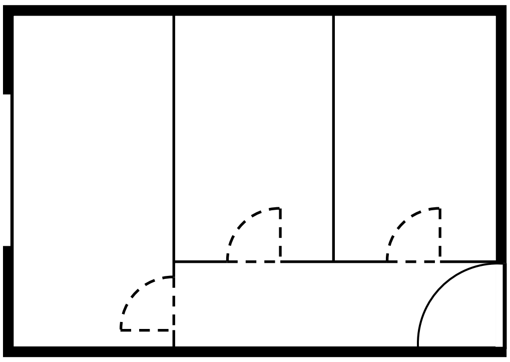
   Okrem uvedených štyroch možností existujú aj ďalšie riešenia (jedno z nich uvádzame v riešení úlohy 3).



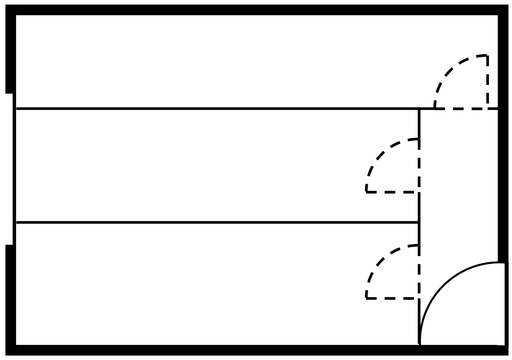
*riešenie A*



*riešenie B*



*riešenie C*



*riešenie D*

*Plochy jednej pivnice v riešeniach A a B*

- riešenie A:

$$\frac{5{,}1}{3}\cdot(3{,}8-1)=4{,}76\ \text{m}^2=476\ \text{dm}^2,$$

- riešenie B:

$$(5{,}1-1)\cdot\frac{3{,}8}{3}=5{,}193\,3\ldots\ \text{m}^2=519{,}33\ldots\ \text{dm}^2\approx 519\ \text{dm}^2.$$

Plochu jednej pivnice v riešeniach C a D možno vypočítať viacerými spôsobmi. Uvedieme tri, dva z nich budeme dokumentovať na výpočte plochy v riešení C, tretí na výpočte plochy v riešení D.

*Plocha jednej pivnice v riešení C*

1. Najdlhšia miestnosť má dĺžku 5,1 m, zvyšné dve 4,1 m. Kratšie miestnosti majú rovnakú šírku, označme ju $y$. Potom tretia miestnosť má šírku $3{,}8-2y$. Všetky miestnosti majú rovnakú plochu, preto

$$4{,}1\cdot y=5{,}1\cdot(3{,}8-2y).$$

   Riešením tejto rovnice postupne dostávame

$$4{,}1y=19{,}38-10{,}2y, \qquad 14{,}3y=19{,}38, \qquad y=\frac{19{,}38}{14{,}3}\ \text{m}.$$

Hľadaná plocha jednej pivnice (napríklad jednej z dvoch kratších) je potom

$$4{,}1 \cdot y = 4{,}1 \cdot \frac{19{,}38}{14{,}3} = 5{,}556\ldots\ \text{m}^2 \approx 556\ \text{dm}^2.$$

2. Ak označíme dĺžku chodby $x$, tak plocha miestností bude $4{,}1 \cdot \frac{x}{2}$, $4{,}1 \cdot \frac{x}{2}$ a $5{,}1 \cdot (3{,}8 - x)$. Všetky miestnosti majú rovnakú plochu, preto

$$4{,}1 \cdot \frac{x}{2} = 5{,}1 \cdot (3{,}8 - x).$$

Riešením tejto rovnice postupne dostávame

$$4{,}1 \cdot \frac{x}{2} = 19{,}38 - 5{,}1x, \qquad 4{,}1x = 38{,}76 - 10{,}2x, \qquad 14{,}3x = 38{,}76,$$

$$x = \frac{38{,}76}{14{,}3} = 2{,}710\,489\ldots\ \text{m}.$$

Plocha jednej pivnice (napríklad jednej z dvoch kratších) je potom

$$4{,}1 \cdot \frac{2{,}710\,489\ldots}{2} = 5{,}556\,503\ldots\ \text{dm}^2 = 555{,}650\,3\ldots\ \text{m}^2 \approx 556\ \text{m}^2.$$

*Plocha jednej pivnice v riešení D*

Najdlhšia miestnosť má dĺžku 3,8 m, zvyšné dve 2,8 m. Všetky majú mať rovnakú plochu, tú označíme $P$. Pomocou plochy $P$ a dĺžky miestnosti môžeme vyjadriť jej šírku. Šírky našich troch pivníc budú $\frac{P}{3{,}8}$, $\frac{P}{2{,}8}$ a $\frac{P}{2{,}8}$. Súčet uvedených šírok je 5,1 (pozri obrázok *riešenie D*):

$$\frac{P}{3{,}8} + \frac{P}{2{,}8} + \frac{P}{2{,}8} = 5{,}1.$$

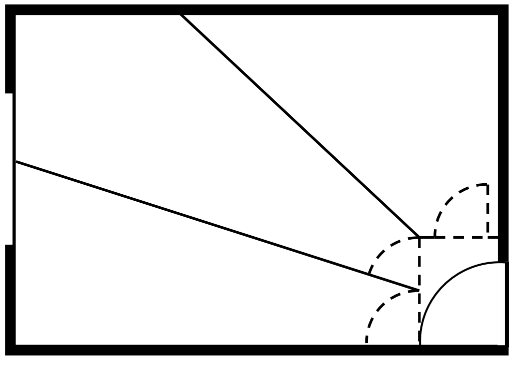
Riešením tejto rovnice postupne dostávame

$$P\left(\frac{1}{3{,}8} + \frac{2}{2{,}8}\right) = 5{,}1, \qquad P = \frac{5{,}1}{\frac{1}{3{,}8} + \frac{2}{2{,}8}} = 5{,}217\,6\ldots\ \text{m}^2 = 521{,}76\ldots\ \text{dm}^2 \approx 522\ \text{dm}^2.$$

3. najväčšia možná plocha jednej pivnice je **606 dm², ** jedno z možných riešení je na obrázku (rozmery chodbičky sú 1 m × 1,2 m)

Plocha jednotlivých častí bude najväčšia, ak bude plocha chodbičky najmenšia. Chodbička má podľa zadania tvar obdĺžnika, jeho najmenšie možné rozmery sú 1 m × 1,2 m (šírka 1 meter je daná v zadaní, v jednej zo stien chodbičky musia byť dvoje dvere šírky 60 cm, preto táto stena musí mať dĺžku aspoň 1,2 m). Teda plocha chodbičky je aspoň 120 dm². Celá miestnosť má plochu $51 \cdot 38 = 1\,938$ dm², preto na jednu pivnicu pripadne najviac

$$\frac{1\,938 - 120}{3} = 606\ \text{dm}^2.$$



4. Plocha jednej pivnice bude približne **536** dm².

   Uvádzame jeden z viacerých podobných postupov.

   Chodbička má šírku 10 decimetrov, jej dĺžku v decimetroch označíme *z*. Potom dĺžky jednotlivých pivníc budú

$$41-0{,}5=40{,}5 \text{ dm}, \qquad 40{,}5 \text{ dm} \qquad \text{a} \qquad 51 \text{ dm}.$$

   Ich šírky v decimetroch budú

$$\frac{z-0{,}5}{2}, \qquad \frac{z-0{,}5}{2} \qquad \text{a} \qquad 38-0{,}5-z=37{,}5-z\,.$$

   Pivnice majú rovnakú plochu, preto

$$40{,}5\cdot\frac{z-0{,}5}{2}=51\cdot(37{,}5-z)\,.$$

   Riešením tejto rovnice dostávame

$$40{,}5z-20{,}25=3\,825-102z\,, \qquad 142{,}5z=3\,845{,}25\,, \qquad z=\frac{3\,845{,}25}{142{,}5}=26{,}984\,210\ldots\,.$$

   Potom plocha jednej pivnice (napríklad tej najdlhšej) bude

$$51\cdot(37{,}5-z)=51\cdot10{,}515\,789\ldots=536{,}305\ldots\approx536 \text{ dm}^2.$$

   *Poznámka. K výsledku 536 dm² možno dospieť aj nasledujúcou úvahou:*

   *Keby sme zanedbali šírku priečok, boli by ich dĺžky* 51 *dm,* 41 *dm a približne* 27,1 *dm (pozri riešenie 2 časti* Plocha jednej pivnice v riešení C v *riešení úlohy 2). Ak každá z týchto priečok bude mať šírku* 5 *cm =* 0,5 *dm, tak plocha zabraná priečkami bude*

$$51\cdot0{,}5+41\cdot0{,}5+27{,}1\cdot0{,}5=59{,}55 \text{ dm}^2.$$

   *Celková plocha prenajatej miestnosti je* $51\cdot38=1\,938$ *dm², chodbička má plochu približne* $10\cdot27{,}1=271$ *dm². Na každú z troch pivníc tak zostáva približne*

$$\frac{1\,938-271-59{,}55}{3}=535{,}81\ldots\approx536 \text{ dm}^2.$$

   *V uvedenej podobe však táto úvaha nie je korektná, prinajmenšom z dvoch dôvodov:*

   - *Keby mala chodbička dĺžku približne* 27,1 *dm, tak najdlhšia pivnica by mala rozmery* $38-27{,}1-0{,}5$ *dm a* 51 *dm a jej plocha by bola*

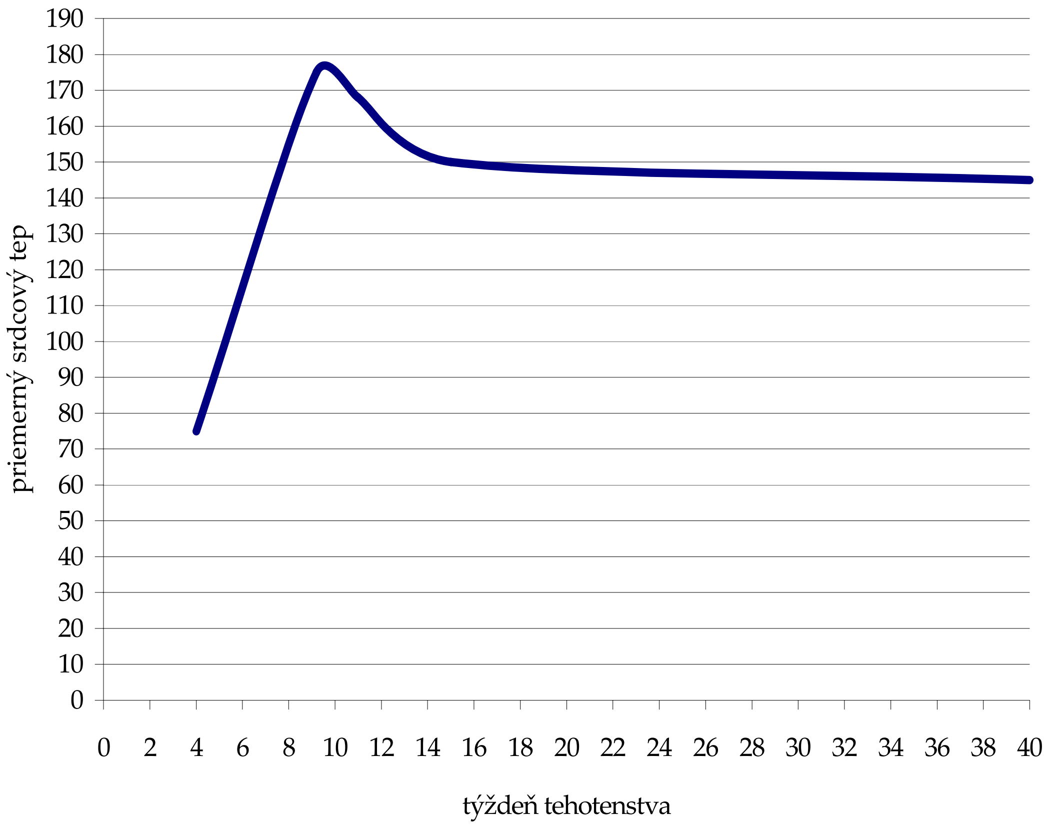
     $$(38-27{,}1-0{,}5)\cdot51=530{,}4\approx530 \text{ dm}^2,$$

     *čo je menej ako vypočítaných* 536 *dm².*

   - *V skutočnosti nemôže mať priečka oddeľujúca dve kratšie pivnice dĺžku* 41 *dm, ale len* 40,5 *dm (o* 0,5 *dm ju skráti šírka priečky, ktorá tvorí stenu chodbičky).*

## Srdiečko embrya

1.




## Šachovnicová kocka

1. **125** kociek, $5 \cdot 5 \cdot 5$

2. **63** kociek, napr. po vrstvách $13 + 12 + 13 + 12 + 13$

   13 kociek v hornej vrstve možno spočítať priamo na obrázku, v nasledujúcej vrstve sú modré tie kocky, ktoré boli v predchádzajúcej vrstve biele, tých je $25 - 13 = 12$.

3. **do vrcholov a hrán veľkej kocky**

   Na povrchu veľkej kocky sú tri modré štvorčeky (ak je malá kocku vo vrchole veľkej kocky), dva modré štvorčeky (ak je malá kocka na hrane) alebo jeden modrý štvorček (ak je kocka vo vnútri steny).

4. **115 modrých štvorčekov**

   Modré kocky musíme umiestniť do 8 vrcholov, lebo tam každá prispieva k celkovému povrchu až tromi štvorčekmi (to je spolu $8 \cdot 3$ štvorčekov), a do 12 hrán, lebo tam každá z troch nie rohových kociek prispieva k povrchu 2 štvorčekmi (spolu $(12 \cdot 3) \cdot 2$ štvorčekov). Zvyšné modré kocky (tých je $63 - 8 - 12 \cdot 3 = 19$) môžeme umiestniť kdekoľvek na povrch – každá prispieva po jednom štvorčeku. Celkový počet modrých štvorčekov na povrchu je

$$8 \cdot 3 + (12 \cdot 3) \cdot 2 + 19 \cdot 1 = 115 .$$

5. **1. možnosť: všetky tri biele steny majú jeden spoločný vrchol**
   **2. možnosť: dve zo stien sú protiľahlé, tretia stena je na ľubovoľnom mieste**
   (na poradí, v akom žiaci uvedú možnosti, samozrejme nezáleží)

Žiaci môžu použiť aj iný opis (napr. opis polohy bielych stien: 1. možnosť: predná, horná a bočná stena, 2. možnosť: predná, zadná a horná stena). Taktiež môžu vyznačiť trojicu stien na náčrtku kocky.

6. Prvá možnosť (tri biele steny majú jeden spoločný vrchol) **dá sa.**
   Druhá možnosť **nedá sa**.

   Poradie odpovedí môže byť v porovnaní s tu uvedeným zamenené v závislosti od toho, v akom poradí žiaci odpovedali na úlohu 5.

   Odpoveď áno alebo nie závisí len od počtu bielych kociek, ktoré sú na stavbu potrebné. Pripomeňme, že Martin má k dispozícii 62 bielych kociek. V prípade prvej možnosti Martin potrebuje 61 bielych kociek. V prípade druhej možnosti by potreboval 65 bielych kociek.

7. **4×4×4** (teda hranu veľkej kocky tvoria hrany štyroch malých kociek)

   Máme 62 bielych kociek. Na kocku 4×4×4 potrebujeme 56 bielych kociek. Toto číslo môžeme nájsť viacerými postupmi. Asi najrýchlejšie je zistiť počet kociek, ktoré tvoria povrch. Ten dostaneme tak, že od počtu všetkých kociek ($4 \cdot 4 \cdot 4$) odrátame počet kociek, ktoré sú vnútri veľkej kocky ($2 \cdot 2 \cdot 2$). Dostaneme tak $4 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 56$ kociek.

   Na kocku 5×5×5 by sme potrebovali až 98 bielych kociek ($5 \cdot 5 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 3$).

## Škatuľky

*Úlohu 4 môžeme zadať ako skupinovú prácu, pričom si žiaci v každej skupine rozdelia, s akými rozmermi odstrihnutých štvorčekov bude každý z nich počítať.*

*V zadaní úlohy 5 nie je uvedený predpoklad, že pri oblepovaní jednej steny nebudú chlapci kombinovať viacero menších ústrižkov ozdobného papiera. Očakávame, že žiaci to budú podvedome predpokladať. Ak to učiteľ uzná za potrebné, môže tento nevyslovený predpoklad ujasniť v diskusii.*

1. Ivova škatuľka má rozmery **20 cm × 6 cm × 4 cm.**
   Emilova škatuľka má rozmery **24 cm × 10 cm × 2 cm.**

2. Ivova škatuľka má objem **480** cm$^3$,
   Emilova škatuľka má objem tiež **480** cm$^3$.

3. **Pravdu nehovoril ani jeden z chlapcov**.

   Emilova škatuľka <u>nie je</u> vyššia ako Ivova.
   Ivova škatuľka <u>nemá</u> väčší objem ako Emilova.

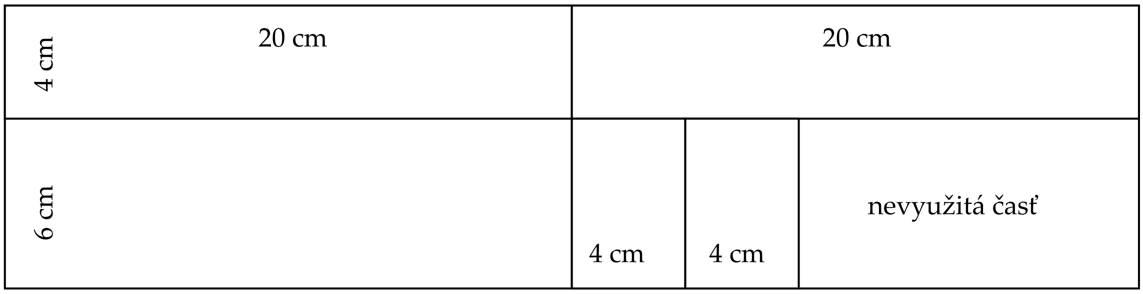
4. Škatuľka sa **dá** zhotoviť.

   Stačí z rohov vystrihnúť štvorce so stranou 3 cm alebo 2,5 cm alebo 3,5 cm. Žiaci môžu postupne počítať objem pre odstrihnuté štvorce so stranami 0,5 cm, 1 cm, 1,5 cm, 2,5 cm, 3 cm, 3,5 cm, 4,5 cm, 5 cm, 5,5 cm, 6 cm a 6,5 cm. Objemy vyjdú postupne 175,5 cm$^3$, 312 cm$^3$, 412,5 cm$^3$, 517,5 cm$^3$, 528 cm$^3$, 514,5 cm$^3$, 427,5 cm$^3$, 360 cm$^3$, 280,5 cm$^3$, 192 cm$^3$ a 97,5 cm$^3$. S počítaním objemov môžu žiaci skončiť v okamihu, keď nájdu objem väčší ako 500 cm$^3$.

5. Emilova škatuľka: ozdobný papier **nebude** stačiť. Ivova škatuľka: ozdobný papier **bude** stačiť.

   *Emilova škatuľka*: Hoci povrch škatuľky ($240 + 48 + 48 + 20 + 20 = 376$ cm$^2$) je menší ako obsah papiera (400 cm$^2$), z papiera sa nedá vystrihnúť päť obdĺžnikov s potrebnými rozmermi. Po odstrihnutí obdĺžnika s rozmermi 24 cm × 10 cm totiž zostane obdĺžnik 16 cm × 10 cm. Z neho nemožno vystrihnúť obdĺžnik, ktorého jeden rozmer je 24 cm (uhlopriečka obdĺžnika s rozmermi 16 cm × 10 cm je len približne 18,8 cm).

   Možné riešenie pre *Ivovu škatuľku* je na obrázku.




6. Objem škatule bude **1 944 cm**³.

Do uvedeného vzťahu dosadíme $a = 21$, $b = 45$, dostaneme dĺžku strany odstrihnutých štvorčekov:

$$\frac{21+45-\sqrt{21^2-21\cdot 45+45^2}}{6}=\frac{66-39}{6}=4{,}5\,.$$

Hľadaná škatuľa s maximálnym objemom má teda rozmery

$$21-2\cdot 4{,}5=12\ \text{cm},\qquad 45-2\cdot 4{,}5=36\ \text{cm}\qquad \text{a}\qquad 4{,}5\ \text{cm},$$

jej objem je

$$12\cdot 36\cdot 4{,}5=1\,944\ \text{cm}^3.$$

*Poznámka 1: Uvedený vzťah možno odvodiť pomocou diferenciálneho počtu. Označme veľkosť strany odstrihávaného štvorčeka x. Podľa zadania má kartón rozmery a × b (predpokladajme, že a je menší z nich). Potom škatuľa má rozmery* $a-2x, b-2x, x$ *a jej objem je*

$$V(x)=(a-2x)\cdot(b-2x)\cdot x=abx-2ax^2-2bx^2+4x^3\,.$$

*Hľadáme maximum tejto funkcie na intervale* $\left\langle 0,\frac{a}{2}\right\rangle$, *pritom* $V(0)=V\left(\frac{a}{2}\right)=0$. *Preto hodnota x, pre ktorú funkcia* $V(x)$ *hľadané maximum nadobúda, leží vnútri intervalu* $\left\langle 0,\frac{a}{2}\right\rangle$ *a* $V(x)$ *v nej má nulovú deriváciu. Derivovaním funkcie* $V(x)$ *dostaneme*

$$V'(x)=ab-4ax-4bx+12x^2=ab-4(a+b)x+12x^2\,.$$

*Rovnica* $V'(x)=0$ *má korene*

$$x_{1,2}=\frac{4a+4b\pm\sqrt{(-4a-4b)^2-4\cdot 12\cdot ab}}{24}=\frac{4a+4b\pm\sqrt{16a^2-16ab+16b^2}}{24}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6},$$

*z nich v intervale* $\left\langle 0,\frac{a}{2}\right\rangle$ *leží len* $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ *(nie je ťažké dokázať, že pre* $b\ge a>0$ *platí nerovnosť* $a^2-ab+b^2\ge a^2$, *z ktorej vyplýva, že koreň* $\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ *je väčší alebo rovný* $\frac{a}{2}$*). Preto na intervale* $\left\langle 0,\frac{a}{2}\right\rangle$ *nadobúda funkcia* $V(x)$ *svoje maximum pre* $x=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

*Poznámka 2: Riešme obdobu úlohy 5, tentoraz pre ozdobný papier s rozmermi 36 cm × 26 cm a pre dve škatuľky s rozmermi 12 cm × 36 cm × 4,5 cm (tú sme našli v riešení úlohy 6) a 33 cm × 9 cm × 6 cm (tá vznikne, ak z rohov kartónu odstrihneme štvorce 6 cm × 6 cm). Úloha je zaujímavá svojím výsledkom: prvú škatuľku možno obaliť, a druhú nie, hoci druhá škatuľa má menší povrch aj objem ako prvá.*

## TARIFY ELEKTRICKEJ ENERGIE

*Jednotka kWh (kilowatthodina), s ktorou sa žiaci v tejto téme stretnú, je vysvetlená v téme Energia vetra. Úlohy 1 a 2 sa venujú výpočtu ceny za spotrebovanú energiu.*

*Úloha 3 je príkladom jednoduchej optimalizácie: ak vieme približne odhadnúť spotrebu, môžeme porovnaním cien v obidvoch tarifách zistiť, ktorá je pre nás výhodnejšia.*

*V úlohe 4 postupujeme obrátene – z výslednej ceny počítame približnú spotrebu. Súčasne táto úloha sleduje aj ďalší cieľ: v zadaní nie sú uvedené všetky údaje potrebné na jednoznačnú odpoveď (to je situácia častá v bežnom živote). Preto treba rátať s tým, že žiaci budú o zadaní diskutovať.*

*Úloha 5 je prípravnou úlohou k úlohe 6.*

*Úlohy 6 a 7 sú príkladmi využitia rovníc, nerovníc a lineárnej funkcie v úlohách z reálneho života.*

1. **4 207,84 Sk**, po zaokrúhlení **4 208 Sk**

   Riešenie dostaneme výpočtom 7 (mesiacov) · 7,12 (Sk/mesiac) + 900 (kWh) · 4,62 (Sk/kWh).

2. **5 050 Sk**

   Riešenie dostaneme výpočtom $12 \cdot 145 + 1\,000 \cdot 3{,}31$.

3. **D2**

   Vypočítame cenu v tarife D1 aj v tarife D2:

   - pri tarife D1 by sme platili $12 \cdot 7{,}12 + 1\,300 \cdot 4{,}62 = 6\,091{,}44$ Sk.
   - pri tarife D2 by sme platili $12 \cdot 145 + 1\,300 \cdot 3{,}31 = 6\,043$ Sk.

4. **vyše 856 kWh pri tarife D1, vyše 945 kWh pri tarife D2** (žiaci by si mali uvedomiť, že odpoveď závisí od toho, ktorú tarifu Novákovci používali)

   Od sumy 4 000 Sk odčítame pevnú platbu za 6 mesiacov, výsledok vydelíme cenou za 1 kWh. Týmto postupom dostaneme

   - pre tarifu D1: pevná platba $= 6 \cdot 7{,}12 = 42{,}72$ Sk,

     $$4\,000 - 42{,}72 = 3\,957{,}28\,, \qquad 3\,957{,}28 : 4{,}62 = 856{,}554...\,,$$

     teda spotreba by bola vyše 856 kWh,
   - pre tarifu D2: pevná platba $= 6 \cdot 145 = 870$ Sk,

     $$4\,000 - 870 = 3\,130\,, \qquad 3\,130 : 3{,}31 = 945{,}619...\,,$$

     teda spotreba by bola vyše 945 kWh.

   Iné riešenie (pomocou nerovníc): Označme $x$ hľadanú spotrebu elektriny v kWh.

   - Pri tarife D1 má platiť $6 \cdot 7{,}12 + x \cdot 4{,}62 > 4000$, odtiaľ postupnými úpravami dostávame

     $$x \cdot 4{,}62 > 4000 - 6 \cdot 7{,}12\,, \qquad x \cdot 4{,}62 > 3957{,}28\,, \qquad x > 856{,}554...\ \text{(kWh)}.$$
   - Pri tarife D2 má platiť $6 \cdot 145 + x \cdot 3{,}31 > 4000$, odtiaľ postupnými úpravami

     $$x \cdot 3{,}31 > 4000 - 6 \cdot 145\,, \qquad x \cdot 3{,}31 > 2130\,, \qquad x > 945{,}619...\ \text{(kWh)}.$$

5. **cena = 3,31*x* + 1 740**

   Základný poplatok za 12 mesiacov je $12 \cdot 145 = 1\,740$ Sk. K tejto sume sa pripočíta platba za $x$ kWh, teda $x \cdot 3{,}31$ Sk.

6. **Grafom je tenšia z dvoch priamok na obrázku v riešení úlohy 7**.

   Z riešenia úlohy 5 vieme, že ide o lineárnu závislosť (len s inými koeficientami ako v úlohe 5, v našom prípade sa $C = 4{,}62x + 85{,}44$ ). Jej grafom je priamka alebo jej časť (závisí to od definičného oboru, v našom prípade to bude polpriamka, pretože $x$ nadobúda len kladné hodnoty). Stačí teda nájsť dva jej body. Zvolíme preto dve hodnoty $x$ a nájdeme zodpovedajúce hodnoty $C$, napr. pre $x = 10$ máme $C = 131{,}64$, pre $x = 1\,000$ sa $C = 4\,705{,}44$. Bodmi $[10\,;131{,}64]$ a $[1\,000\,;4\,705{,}44]$ preložíme polpriamku tak, aby jej krajný bod mal $x$-ovú súradnicu 0.

7. Tarifa D1 je výhodnejšia pri spotrebe do **1 263,0 kWh**. Tarifa D2 je výhodnejšia pri spotrebe **väčšej ako 1 263,0 kWh**.

   Existuje viacero možných postupov:

   1. *pomocou nerovnice*

      Označme $x$ ročnú spotrebu. Tarifa D1 je výhodnejšia, ak platí:

      $$12 \cdot 7{,}12 + 4{,}62x < 12 \cdot 145 + 3{,}31x.$$

      Postupnými úpravami tejto nerovnice dostávame

      $$85{,}44 + 4{,}62x < 1\,740 + 3{,}31x, \qquad 1{,}31x < 1\,654{,}56, \qquad x < 1\,263{,}022\,9\,.$$

   2. *pomocou rovnice a úvahy*

      Zistíme, pre aké množstvo spotrebovanej energie sú obe tarify rovnako výhodné:

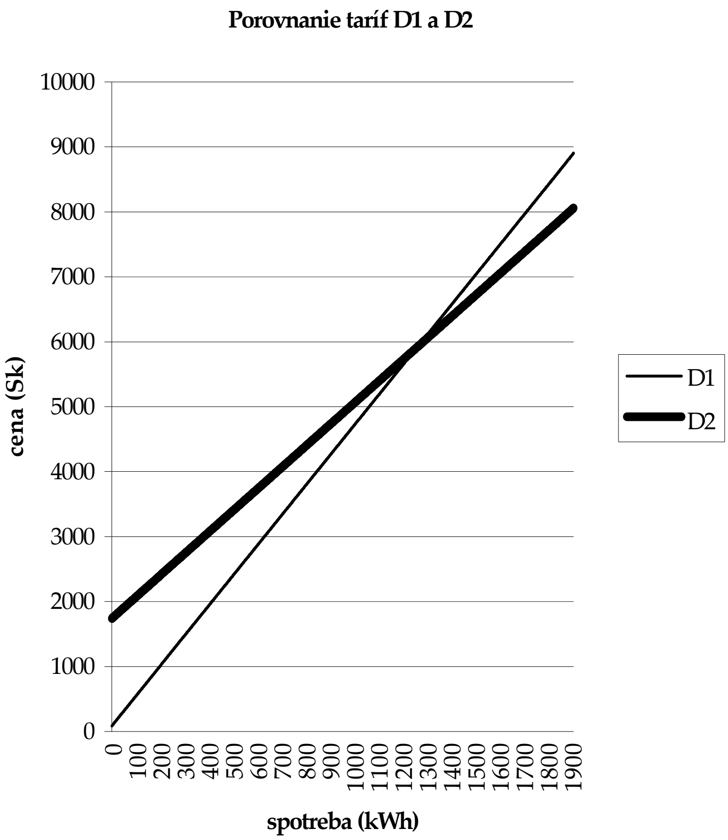
      $$12 \cdot 7{,}12 + 4.62x = 12 \cdot 145 + 3{,}31x \qquad (*)$$

      odtiaľ po úprave $x = 1\,263{,}022\,9$ .

      Teda pri množstve okolo 1 263 kWh sú obe tarify v podstate rovnocenné. Pre nižšie hodnoty je výhodnejšia tarifa D1, pre vyššie tarifa D2. Tento uzáver treba ešte odôvodniť, napr. poukazom na skutočnosť, že cena pri tarife D1 rastie rýchlejšie (rýchlosť rastu určuje v našom prípade cena za 1 kWh, tá je väčšia pre tarifu D1, rýchlosť rastu vidno tiež z grafického znázornenia obidvoch taríf).

   3. *pomocou grafov*

      Načrtneme do jedného obrázku grafy taríf D1 a D2 (graf D1 žiaci narysovali v úlohe 6, stačí teda dorysovať graf D2) a vidíme, kedy je ktorá tarifa výhodnejšia. Nevýhodou tohto postupu je, že neumožňuje určiť hľadané hodnoty s dostatočnou presnosťou. Preto hodnotu spotreby $x$, pre ktorú sú tarify D1 a D2 rovnaké, musíme nájsť riešením rovnice (*).



*Námet na domácu aktivitu: Spotreba elektrickej energie je v zimných mesiacoch spravidla oveľa väčšia ako v letných. Zistite, ako často a za akých podmienok sa dajú meniť tarify vo vašom regióne. Podľa toho navrhnite čo najvýhodnejší spôsob platenia.*

## TURISTIKA

1. Turistická vychádzka z Čingova na Lesnicu a späť trvá **20** minút.

   Časy vyznačené v turistickej mape sú uvedené v tvare „hodiny : minúty“, preto údaj „0:10“ znamená 10 minút.

2. Cesta z Bieleho potoka na Kláštorisko **môže byť** napríklad do **kopca**.

   Toto očakávané zdôvodnenie je v súlade s opisom trasy na stránke Asociácie horských sprievodcov, kde sa uvádza: „… pomerne namáhavý je výstup do Kláštoriska a následný zostup k Bielemu potoku“.

3. Turistická vychádzka by mala trvať aj s prestávkou približne 180 minút. Keďže údaje uvedené v zadaní nie sú presné, uvedieme všetky možné trasy, ktoré podľa mapy trvajú od 2 hodín do 3,5 hodiny. Uvádzame iba trasy, kde by sme po každej ceste šli najviac dvakrát (tam a späť):

| | |
|---|---|
| Č – Ď – TV – BP – TV – Ď – Č | 125 min |
| Č – Ď – ST – TV – BP – L – Č | 130 min |
| Č – Ď – ST – TV – Ď – Č | 130 min |
| Č – Ď – ST – TV – ST – Ď – Č | 160 min |
| Č – Ď – ST – TV – BP – TV – ST – Ď – Č | 180 min |
| Č – Ď – TV – LM – TV – Ď – Č | 195 min |
| Č – L – BP – TV – ST – TV – BP – L – Č | 160 min |
| Č – L – BP – TV – LM – TV – BP – L – Č | 180 min |
| Č – L – BP – K – BP – L – Č | 200 min |

4. Najkratšia trasa (trvá 275 minút): Č – L – BP – K – LM – TV – ST – Ď – Č
   Najdlhšia trasa (trvá 280 minút): Č – Ď – ST – TV – LM – K – BP – L – Č

   Pri riešení je potrebné si uvedomiť, že vzhľadom na uvedené podmienky nemôžeme prechádzať po trase BP – TV, ani TV – Ď. Potom nám vychádza jediná možnosť – ísť vonkajším okruhom. Môžeme ísť dvoma smermi a dostaneme hľadané riešenia.

## VÝMENA OKIEN

*Pred riešením tejto témy odporúčame porozprávať sa so žiakmi, ako sa postupuje pri výpočte ceny s DPH pri fakturovaní. Spravidla sa najprv uvedú ceny bez DPH, tie sa zrátajú a k výslednej sume sa priráta 19%-ná DPH. Môže sa však vyskytnúť aj postup, keď sa 19%-ná DPH vyráta samostatne pre každú z položiek a jednotlivé sumy DPH sa potom zrátajú. Ako uvidíme v riešení úlohy 3, výsledky týchto dvoch postupov nemusia byť rovnaké.*

*Niektorých žiakov môže zaujímať, ako je to so zarátavaním dňa odovzdávania, resp. preberania a dňa zaplatenia do 10-dňovej lehoty, o ktorej sa hovorí v platobných podmienkach. Pre riešenie našej úlohy je dôležité len to, že do tejto lehoty sa započítava iba jeden z uvedených dvoch dní. V praxi sa zarátava deň odovzdávania, resp. preberania.*

1. Pán Veselý by mal zaplatiť za okná **3 706,80** €, za parapetné dosky **419,00** € a za montážne práce **461,60** €.

   Suma za parapetné dosky je rovnaká ako suma uvedená v cenovej ponuke (nevzťahuje sa na ňu totiž ponúkaná zľava), sumy za okná a za montážne práce dostaneme výpočtom

$$6\,178 \cdot 0{,}6 = 3\,706{,}8 \text{ €}, \qquad 577 \cdot 0{,}8 = 461{,}6 \text{ €}$$

2. DPH je **995,98** €.

   Celková suma bez DPH, ktorú by mal podľa cenovej ponuky zaplatiť pán Veselý, je

$$6\,178\cdot 0{,}6+419+509{,}62+145+577\cdot 0{,}8=$$

$$=3\,706{,}8+419+509{,}62+145+461{,}6=5\,242{,}02\ \text{€}. \qquad (1)$$

   DPH je 19 % z tejto sumy, t.j.

$$5\,242{,}02\cdot 0{,}19=995{,}983\,8\approx 995{,}98\ \text{€}.$$

   *Poznámka. Rovnaký výsledok v tomto prípade dostaneme, ak najprv pre každý zo sčítancov v súčte (1) (teda pre sumy 3 706,80 €, 419 €, 509,62 €, 145 €, 461,6 €) vypočítame 19%-nú DPH, tú zaokrúhlime na stotiny eura a získané hodnoty sčítame. To, že výsledok získaný týmto odlišným postupom je rovnaký, je však len náhoda. V riešení úlohy 3 uvidíme, že uvedené dva postupy nemusia viesť vždy k rovnakým výsledkom.*

3. Keby firma neposkytla pánovi Veselému zľavu, bola by celková suma o **3 078,06** € alebo o **3 078,05** € väčšia.

   Výsledok závisí od spôsobu výpočtu. Uvedieme dva možné postupy:

   1. Bez uvedenej zľavy by suma bez DPH bola

$$6\,178+419+509{,}62+145+577=7\,828{,}62\ \text{€}.$$

      DPH z tejto sumy je

$$7\,828{,}62\cdot 0{,}19=1\,487{,}437\,8\approx 1\,487{,}44\ \text{€},$$

      preto celková cena s DPH by bola

$$7\,828{,}62+1\,487{,}44=9\,316{,}06\ \text{€}. \qquad (2)$$

      Pri uplatnení zľavy je celková cena

$$5\,242{,}02+995{,}98=6\,238{,}00\ \text{€} \qquad (3)$$

      (obidve hodnoty sme našli v riešení úlohy 2, prvý sčítanec je celková cena bez DPH, druhý je DPH).

      Hľadaná suma je rozdiel výsledkov (2) a (3):

$$9\,316{,}06-6\,238{,}00=3\,078{,}06\ \text{€}.$$

      *Poznámka. Čísla (1) a (2), teda ceny s DPH možno vypočítať z cien bez DPH aj nasledovne:*

$$7\,828{,}62\cdot 1{,}19=9\,316{,}057\,8\approx 9\,316{,}06\,, \qquad 5\,242{,}02\cdot 1{,}19=6\,238{,}003\,8\approx 6\,238{,}00\,.$$

   2. Rozdiel medzi celkovou cenou bez zľavy a cenou pri uplatnení zľavy vytvára zľava. Tá je 40 % z ceny okien a 20 % z ceny montážnych prác, teda spolu

$$6\,178\cdot 0{,}4+577\cdot 0{,}2=2\,471{,}20+115{,}40=2\,586{,}60\ \text{€}.$$

      Celkový rozdiel dostaneme, ak k tejto sume prirátame ešte 19%-nú DPH:

$$2586{,}60\cdot 1{,}19=3\,078{,}054\approx 3\,078{,}05\ \text{€}.$$

   *Poznámka: Výsledky uvedených postupov sa líšia o* 0,01 €. *Tento rozdiel je spôsobený zaokrúhľovaním (keby sme v prvom aj druhom riešení počítali presné sumy, boli by výsledky rovnaké). V prvom riešení sme ceny s DPH, teda čísla*

$$7\,828{,}62\cdot 1{,}19=9\,316{,}0578 \qquad a \qquad 5\,242{,}02\cdot 1{,}19=6\,238{,}0038$$

   *najprv zaokrúhlili, a až potom odčítali. V druhom riešení tieto čísla najprv odčítame (dostaneme tak hodnotu* 3 078,054 €*), a až potom výsledok zaokrúhlime.*

4. *Tabuľka č. 1*: Dátumy **nie sú** v súlade s platobnými podmienkami. Za omeškanie platby môže firma pánovi Veselému účtovať sumu **1,09** €.

*Tabuľka č. 2*: Dátumy **nie sú** v súlade s platobnými podmienkami. Za omeškanie platby môže firma pánovi Veselému účtovať sumu 7,81 €.

*Tabuľka č. 3*: Dátumy **sú** v súlade s platobnými podmienkami. Za omeškanie platby môže firma pánovi Veselému účtovať sumu 0 €.

V situácii opísanej *tabuľkou 1* sa pán Veselý pri poslednej platbe omeškal o 7 dní. Preto mu firma môže účtovať 7-krát 0,05 % z dlžnej sumy. Tá je 5 % zo 6 250 €, t.j.

$$\frac{5}{100}\cdot 6\,250 = 312{,}50 \text{ €},$$

preto úrok z omeškania platby by bol

$$7\cdot\frac{0{,}05}{100}\cdot 312{,}50 = 1{,}09375 \approx 1{,}09 \text{ €}.$$

V situácii opísanej *tabuľkou 2* sa pán Veselý pri predposlednej platbe omeškal o 10 dní. Preto mu firma môže účtovať 10-krát 0,05 % zo sumy

$$\frac{25}{100}\cdot 6\,250 = 1\,562{,}50 \text{ €},$$

to je

$$10\cdot\frac{0{,}05}{100}\cdot 1\,562{,}50 = 7{,}812\,5 \approx 7{,}81 \text{ €}.$$

## ZEMETRASENIA

*V tejto úlohe kvôli jednoduchosti formulácií nerozlišujeme medzi miestom, v ktorom zemetrasenie vzniklo (ohnisko zemetrasenia) a jeho priemetom na zemský povrch (epicentrum zemetrasenia). Vzdialenosť seizmickej stanice od ohniska zemetrasenia nie je totožná s jej vzdialenosťou od epicentra. Pri určovaní epicentra zemetrasenia sa však tieto vzdialenosti spravidla stotožňujú. Jedným z dôvodov je aj skutočnosť, že vzdialenosť od ohniska nevieme určiť úplne presne (pozri tiež poznámku v riešení úlohy 4).*

*Úlohy 1 a 2 obsahujúce návod na výpočet vzdialenosti od miesta zemetrasenia môžu byť pre niektorých žiakov náročné, preto odporúčame riešiť ich spoločne alebo v skupinách. Text pred úlohou 2 obsahuje časť odpovede na úlohu 1. Preto odporúčame žiakov nechať riešiť najprv úlohu 1, potom diskutovať o jej riešení a až potom prejsť k úlohe 2.*

*Postup navrhnutý v úlohe 2 predstavuje jeden z možných prístupov k zostavovaniu rovníc: najprv preveríme, či nejaké číslo (navrhnuté napr. učiteľom) je riešením danej úlohy – teda urobíme skúšku správnosti. Potom v tejto skúške dané číslo nahradíme neznámou.*

*Riešenie úlohy 3 možno využiť ako propedeutiku práce s výrazmi: trikrát opakovaný rovnaký postup (ktorý sme opísali v riešení úlohy 2) možno nahradiť dosadením do všeobecného vzorca* $s = \dfrac{r}{\dfrac{1}{v_P} - \dfrac{1}{v_S}}$*, kde r je rozdiel časov,* $v_P$ *je rýchlosť P-vlny a* $v_S$ *rýchlosť S-vlny.*

1. Číslo $709{,}8 : 7{,}7$ je čas (v sekundách), za ktorý P-vlny prejdú vzdialenosť 709,8 km. Podobne číslo $709{,}8 : 3{,}5$ je čas, za ktorý túto vzdialenosť prejdú S-vlny. Peter tieto čísla potrebuje vypočítať, aby skontroloval, či ich rozdiel je 169 s.

2. **nie je**

   Z výsledkov delenia

   $$709{,}8 : 7{,}7 = 92{,}18\ldots, \qquad 709{,}8 : 3{,}5 = 202{,}8$$

   vyplýva, že S-vlny by seizmograf zaznamenal s oneskorením

   $$202{,}8 - 92{,}18\ldots = 110{,}618\ldots \text{ sekúnd.}$$

   Podľa zadania toto oneskorenie malo byť 169 sekúnd, preto Albínov výsledok nie je správny.

3. Rovnica s neznámou $s$: $\mathbf{\frac{s}{3{,}5}-\frac{s}{7{,}7}=169}$. Vzdialenosť stanice Albuquerque od miesta zemetrasenia bola približne **1 084 km.**

   Postupnými úpravami rovnice

$$\frac{s}{3{,}5}-\frac{s}{7{,}7}=169$$

   dostávame

$$s\left(\frac{1}{3{,}5}-\frac{1}{7{,}7}\right)=169, \qquad s=\frac{169}{\frac{1}{3{,}5}-\frac{1}{7{,}7}}=\frac{169}{0{,}155\,844\ldots}=1\,084{,}416\ldots\approx 1\,084 \text{ (km).}$$

4. Epicentrum zemetrasenia bolo vzdialené od stanice Vyhne **126,8** km, od stanice Červenica **122,0** km a od stanice Ostrava-Krásné Pole **139,6** km.

   Žiaci môžu k výpočtu vzdialeností pristupovať niekoľkými spôsobmi:

   1. zopakujú pre každú z troch staníc celý postup výpočtu z riešenia úlohy 2,
   2. niektorí si pravdepodobne uvedomia, že stačí v rovnici

$$s\left(\frac{1}{3{,}5}-\frac{1}{7{,}7}\right)=169, \qquad \text{resp.} \qquad s=\frac{169}{\frac{1}{3{,}5}-\frac{1}{7{,}7}}$$

      nahradiť čísla 3,5; 7,7 a 169 hodnotami pre príslušnú stanicu (teda rýchlosťou šírenia S-vĺn, rýchlosťou šírenia P-vĺn a rozdielom v čase príchodu P-vĺn a S-vĺn vyjadreným v sekundách).

   V obidvoch uvedených postupoch potrebujeme vypočítať rozdiel času príchodu P-vĺn a S-vĺn pre každú z troch staníc. Tieto rozdiely sú

| stanica | VYHS | CRVS | OKC |
|---|---|---|---|
| rozdiel | 17,5 s | 18,2 s | 17,4 s |

   Pre jednotlivé stanice potom dostávame tieto vzdialenosti od epicentra:

$$\text{VYHS: } s=\frac{17{,}5}{\frac{1}{3{,}37}-\frac{1}{6{,}3}}=\frac{17{,}5}{0{,}138\,005\ldots}=126{,}806\,313\ldots\approx 126{,}8 \text{ km,}$$

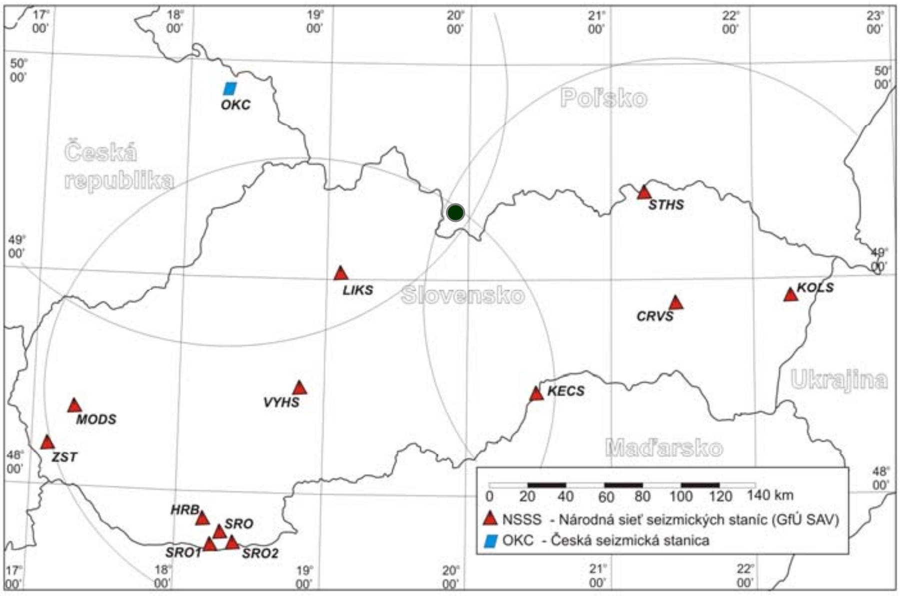
$$\text{CRVS: } s=\frac{18{,}2}{\frac{1}{3{,}3}-\frac{1}{6{,}5}}=\frac{18{,}2}{0{,}149\,184\ldots}=121{,}996\,875\approx 122{,}0 \text{ km,}$$

$$\text{OKC: } s=\frac{17{,}4}{\frac{1}{3{,}6}-\frac{1}{6{,}53}}=\frac{17{,}4}{0{,}124\,638\ldots}=139{,}603\,822\ldots\approx 139{,}6 \text{ km.}$$

5. Vzdialenosť epicentra od seizmickej stanice Vyhne je 126,8 km, preto epicentrum leží na kružnici so stredom vo Vyhniach a polomerom 126,8 km. Rovnako tak musí ležať na kružnici so stredom v Červenici a polomerom 122 km a na kružnici so stredom v Ostrave-Krásnom Poli a polomerom 139,6 km. Preto epicentrum nájdeme ako spoločný bod uvedených troch kružníc. (Dve kružnice by na určenie epicentra nestačili, pretože ich prienikom dostaneme dva rôzne body, ktorých vzájomná vzdialenosť môže byť pomerne veľká).

   *Poznámka: Uvedené tri kružnice by sa v ideálnom prípade pretli v jedinom bode. Táto situácia by nastala, keby sme vedeli vzdialenosť od epicentra určiť úplne presne. V skutočnosti však naše výpočty vzdialenosti od epicentra úplne presné nie sú. Dôvodov tejto nepresnosti je viacero, medzi nimi aj fakt, že S- a P-vlny sa nešíria presne po rovnakej dráhe a priemerné rýchlosti týchto vĺn vieme určiť len experimentálne a s istou chybou. Preto spomínané tri kružnice neurčia jediný bod, ale „krivočiary trojuholník“, v ktorom leží epicentrum.*

6. Epicentrum nájdeme postupom opísaným v riešení úlohy 4. Prienikom troch kruhov (prvý so stredom vo VYHS a polomerom 126,8 km, druhý so stredom v CRVS a polomerom 122 km, tretí so stredom v OKC a polomerom 139,6 km) vznikne krivočiary trojuholník. Epicentrum zemetrasenia by sa malo nachádzať niekde vnútri neho.




## ZLATO

*Téma Zlato súvisí s témou Karáty.*

*Úlohu 1 možno riešiť výpočtom alebo odhadom. Pri odhade pritom možno využiť buď číselnú informáciu o hustote zlata alebo „optickú informáciu" o veľkosti kilogramovej tehličky. Bolo by dobré, aby žiaci o rôznych spôsoboch riešenia diskutovali (buď po skončení riešenia úlohy 1, ak ju riešili každý samostatne, alebo počas spoločnej diskusie o riešení tejto úlohy, ak učiteľ zvolil túto formu). Ak niektorú možnosť sami nenavrhnú, môže na ňu v diskusii upozorniť učiteľ.*

*Úlohu 2 sme zaradili ako druhú v poradí, aby jej riešenie neovplyvnilo žiakov pri riešení úlohy 1. Predpokladáme totiž, že po vyriešení úlohy 2 by väčšina žiakov mala tendenciu riešiť úlohu 1 výpočtom a nerozmýšľala by o možnosti odhadu.*

*Ak úloha 4 žiakov zaujme, môžu skúsiť vypočítať, koľko zlata by potrebovali na pozlátenie vlastnej sochy v životnej veľkosti. Na výpočet svojho telesného povrchu môžu použiť buď vzorec uvedený v texte (Mostellerov vzorec) alebo nomogram znázornený v úlohe Nomogramy. Výsledky by sa mali pohybovať v rozmedzí* 2 *g až* 4 *g (v literatúre sa uvádza, že priemerný telesný povrch detí vo veku 9 rokov je* 1,07 $m^2$*, vo veku 10 rokov je to* 1,14 $m^2$ *a vo veku 12-13 rokov* 1,33 $m^2$*).*

1. obr. č. **4**

   Sú možné rôzne zdôvodnenia, napr.:

   1. *výpočtom*

      Vypočítame dĺžku hrany kocky z rýdzeho zlata s hmotnosťou 1 000 kg (t.j. 1 000 000 g):

      $$1\,000\,000 : 19{,}29 = 51\,840{,}331\,778\ \ldots,$$

      preto objem hľadanej kocky je $51\,840{,}331\,778\ \ldots$ $\text{cm}^3$. Hrana kocky s týmto objemom má dĺžku

      $$\sqrt[3]{51\,840{,}331\,778\ \ldots} = 37{,}286\,869\ \ldots \approx 37\ \text{ cm}.$$

      Tejto veľkosti zodpovedá obrázok č. 4.

   2. *odhadom*:

a) Odhadneme (veľmi zhruba) objem kociek na jednotlivých obrázkoch. Kocky na obrázkoch č. 1 a 2 majú hranu dlhšiu ako 1 m, teda ich objem je väčší ako 1 $m^3$ = 1 000 000 $cm^3$. Preto majú hmotnosť viac ako 19 290 000 g = 19,29 t. Kocka na obrázku č. 3 má hranu dlhšiu napr. ako 60 cm = 600 mm, teda jej objem je aspoň

$$600 \cdot 600 \cdot 600 = 216\,000\,000 \text{ mm}^3 = 216\,000 \text{ cm}^3.$$

Potom jej hmotnosť je aspoň

$$216\,000 \cdot 19{,}29 = 4\,166\,640 \text{ g} \approx 4 \text{ t}.$$

Zostáva teda len kocka na obrázku 4.

b) Kocka s hranou 1 m má hmotnosť asi 20 t. Kocka s hranou polovičnej dĺžky má hmotnosť 8-krát menšiu (to je viac ako 2 tony), kocka s hranou tretinovej dĺžky hmotnosť 27-krát menšiu (to je už menej ako 1 tona). Preto dĺžka hrany hľadanej kocky je medzi $\frac{1}{3}$ metra a $\frac{1}{2}$ metra. Tejto veľkosti zodpovedá len obrázok č. 4.

c) Využijeme informáciu z úvodného textu (kilogramová tehlička má veľkosť asi ako mobilný telefón). 1 tonu tvorí 1 000 takých tehličiek, z nich možno vytvoriť hranol 10 × 10 × 10 tehličiek. Aby sme dostali približne kocku, každú tehličku rozdelíme na 2 polovice tak, že ju rozrežeme v polovici dĺžky. Ak polovice položíme na seba, dostaneme tehličku, ktorá je približne kockou. Jej najväčší rozmer je polovica pôvodnej dĺžky tehličky, teda asi polovica dĺžky mobilu. Primeraním k nohe zistíme, že od kolena po zem je asi 5-násobok dĺžky mobilu (teda asi 10 polovíc dĺžky mobilu). Preto naša kocka by nemala siahať vyššie ako po kolená.

2. Odpoveď závisí od hmotnosti žiaka, pre hmotnosti medzi 35 kg a 55 kg je to od 12 cm do 14 cm.

Uvádzame príklad výpočtu pre žiaka s hmotnosťou 45 kg. Hľadaná kocka má objem

$$45\,000 : 19{,}29 = 2\,332{,}81\ldots \text{ cm}^3,$$

preto jej hrana má dĺžku

$$\sqrt[3]{2\,332{,}81\ldots} = 13{,}26\ldots \approx 13 \text{ cm}.$$

3. približne **518** $m^2$

1 kg zlata má objem $V = 51\,840{,}331\,778\ldots$ $mm^3$ (porovnaj s riešením 1 úlohy 1). Potrebujeme nájsť plošný obsah $P$ podstavy kvádra, ktorý má objem $V$ a výšku $h = 0{,}0001$ mm. Z rovnosti $V = Ph$ dostávame

$$P = \frac{V}{h} = \frac{51\,840{,}331\,778\ldots}{0{,}000\,1} = 518\,403\,317{,}78\ldots \text{ mm}^2 = 518{,}403\,317\ldots \text{ m}^2 \approx 518 \text{ m}^2.$$

4. Na pozlátenie svojej sochy v životnej veľkosti by pán Róbert potreboval asi **4** g zlata.

Podľa uvedeného vzorca je povrch tela pána Róberta približne

$$\sqrt{\frac{96 \cdot 173}{3\,600}} = 2{,}147\,867\ldots \approx 2{,}15 \text{ m}^2.$$

Uvedieme dve možnosti ďalšieho postupu:

1. Využijeme výsledok predchádzajúcej úlohy. Podľa neho približne 518,403 $m^2$ lístkového zlata hrúbky 0,0001 mm má hmotnosť 1 000 g. Potrebujeme zistiť, akú hmotnosť má 2,15 $m^2$ takéhoto lístkového zlata. Hľadaná hmotnosť je

$$\frac{2{,}15}{518{,}403} \cdot 1\,000 = 4{,}147\ldots \approx 4 \text{ g}.$$

2. Vypočítame objem zlata potrebného na pozlátanie (v $cm^3$, pretože hustotu máme určenú v jednotkách $g/cm^3$), z neho zistíme hmotnosť tohto zlata. Keďže hrúbka lístkového zlata je udaná v milimetroch, vyjadríme telesný povrch pána Róberta tiež v $mm^2$:

$$2{,}15\ m^2 = 2\,150\,000\ mm^2.$$

Lístkové zlato, ktoré má hrúbku 0,0001 mm a pokryje plochu $2\,150\,000\ mm^2$, má objem

$$2\,150\,000 \cdot 0{,}000\,1 = 215\ mm^3 = 0{,}215\ cm^3,$$

jeho hmotnosť je

$$0{,}215 \cdot 19{,}29 = 4{,}147\,35 \approx 4\ g.$$

*Úlohy 1 a 2 možno doplniť ďalším námetom: určiť rozmery kilogramovej tehličky zlata na obrázku v úvodnom texte. Keďže tehlička nie je presný kváder (má zaoblené rohy), bude vhodné v diskusii so žiakmi túto úlohu modifikovať: Nájsť rozmery kvádra z rýdzeho zlata s hmotnosťou* 1 000 *g, ktorý sa tvarom podobá tehličke na obrázku (teda vzájomné pomery medzi jeho rozmermi sú čo najviac podobné vzájomným pomerom medzi rozmermi tehličky). Na vyriešenie úlohy potrebujeme poznať*

- *objem hľadaného kvádra, ten je* $1\,000 : 19{,}29 = 51{,}840\,33...\ cm^3 = 51\,840{,}33...\ mm^3$,
- *vzájomné pomery medzi rozmermi tehličky: odmeraním na obrázku tehličky dostaneme približne*

$$2{,}5 : 1{,}2 : 0{,}5.$$

*Ďalej možno postupovať viacerými spôsobmi:*

1. *Zistiť, koľkonásobne treba zväčšiť rozmery kvádra* $2{,}5 \times 1{,}2 \times 0{,}5$, *aby vznikol kváder s objemom* $51\,840{,}33...\ mm^3$. *Hľadáme teda k tak, aby*

$$2{,}5k \cdot 1{,}2k \cdot 0{,}5k = 51\,840{,}33...,\quad tj. \quad 1{,}5k^3 = 51\,840{,}33...\ .$$

*Riešením tejto rovnice dostávame*

$$k^3 = 34\,560{,}221...,\quad odtiaľ \quad k = 32{,}573...\ .$$

*Týmto postupom dostaneme rozmery*

$$2{,}5k = 81{,}43...\ mm,\quad 1{,}2k = 39{,}08...\ mm,\quad 0{,}5k = 16{,}28...\ mm.$$

2. *Hľadať taký rozklad čísla* 51 840 *na súčin troch celých čísel, aby pomer jednotlivých činiteľov bol približne* $2{,}5 : 1{,}2 : 0{,}5$ *(toto riešenie pokladáme za menej pravdepodobné ako predchádzajúce, pravdepodobnosť jeho výskytu sa však zvýši, ak sa učiteľ so žiakmi dohodne, že budú hľadať kvádre, ktorých rozmery v mm sú celé čísla). Z viacerých možných riešení najbližšie k skutočným rozmerom tehličky na obrázku majú* $80 \times 36 \times 18$ *(mm) a* $81 \times 40 \times 16$ *(mm). Ďalšie možnosti sú napr.* $72 \times 40 \times 18$ *(mm),* $72 \times 36 \times 20$ *(mm).*

*V skutočnosti má tehlička na obrázku rozmery* 80 *mm ×* 40 *mm ×* 18 *mm (súčin týchto čísel je väčší ako* 51 840, *je to spôsobené tým, že tehlička nie je dokonalý kváder).*

*Poznámka. V literatúre sa uvádza viacero hodnôt hustoty zlata, najčastejšie* 19,30 $g/cm^3$. *Kvôli druhému z uvedených postupov sme zvolili zriedka uvádzanú hodnotu* 19,29 $g/cm^3$, *aby objem kvádra (zaokrúhlený na celé* $mm^3$*) bolo číslo „dobre“ rozložiteľné na súčin.*

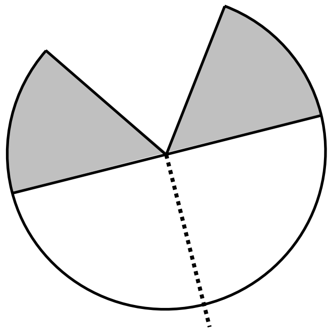
## ZORNÉ POLE

1. Je to pre každé oko uhol **55°** stupňov.
   Sivo zafarbená časť na obr. 12 predstavuje „videnie za seba".

   Uhol „videnia za seba" obidvomi očami je rozdiel celkového zorného uhla a uhla 180°:

   $$290° - 180° = 110°,$$

   na jedno oko pripadá polovica, teda 55°. Tento výsledok môžeme dostať aj tak, že od polovice celkového zorného poľa odrátame uhol 90°.



*obr. 12*

2. Táto oblasť má zorný uhol **120°** stupňov.

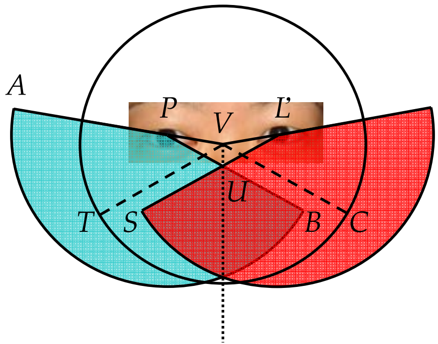
   Uvedieme dve riešenia:

   1. Keby sa zorné polia očí neprekrývali, obsiahli by spolu uhol 320°. Celkové zorné pole je iba 200°, preto spoločná časť musí mať veľkosť $320° - 200° = 120°$.

   2. Os súmernosti delí celkové zorné pole na dve časti, každá má veľkosť 100°. Zorné pole jedného oka je 160°, takže ešte 60° prekrýva zorné pole druhého oka. Spolu pre obe oči je to $2 \cdot 60° = 120°$.

3. **áno**

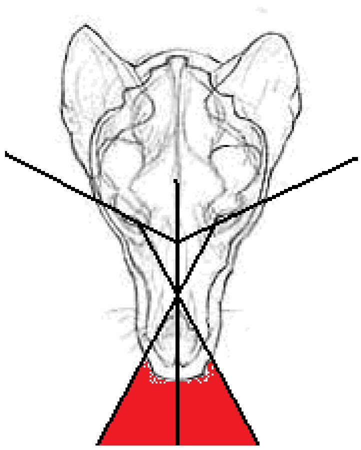
   Ramená uhla priestorového videnia z obr. 8 (na obr. 13 sú znázornené čiarkovanými úsečkami *VT* a *VC*) sú rovnobežné s ramenami uhla priestorového videnia z obr. 10, preto majú uhly *CVT* (to je uhol priestorového videnia z obr. 8) a *BUS* (uhol priestorového videnia z obr. 10) rovnakú veľkosť. Žiaci môžu dôvodiť rôzne (napr. odvolaním sa na vlastnosti uhlov pri rovnobežkách *VC* a *UB*, resp. *VT* a *US* preťatých priečkou *VU*), za podstatné však pokladáme, aby objavili, že *VC* a *UB*, resp. *VT* a *US* sú rovnobežky.




*obr. 13*

4. Riešenie je na obr. 14.

   Očakávame obrázok vychádzajúci z výkladu pred úlohou 3. Celkové zorné pole dostaneme, ak uhly s veľkosťami 120° (to je polovica celkového zorného poľa psa) nanesieme od osi lebky na obidve strany tak, aby mali spoločný vrchol a ich druhé rameno prechádzalo okom. Potom na obidve strany od osi nanesieme uhly s veľkosťami 30° tak, aby jedným ich ramenom bola os a druhé rameno po predĺžení prechádzalo ľavým, resp. pravým okom.



*obr. 14*

5. Zorný uhol jedného oka psa je **150°** stupňov.

   Uvedieme dve riešenia:

   1. Z obrázka v riešení úlohy 4 vidno, že zorné pole jedného oka je súčet polovice celkového zorného poľa a polovice spoločnej časti zorných polí pravého a ľavého oka:

      $$120° + 30° = 150° .$$

   2. Z riešenia úloh 2 a 3 vieme, že veľkosť spoločnej časti zorných polí je :

      $$\text{spoločná časť} = 2 \times \text{zorné pole 1 oka} - \text{celkové zorné pole} .$$

      V našom prípade preto platí

      $$60° = 2 \cdot x - 240° ,$$

      preto $x$ (zorné pole 1 oka) má veľkosť 150°.

      *Poznámka. Rovnicu možno vyriešiť aj tipovaním, nie je potrebné nútiť žiakov do riešenia pomocou úprav.*

## ZRÁŽKY

1. **áno – áno – nie** (väčší ako 100 mm bol len v 5 mesiacoch roka) **– nie – nie** (medzi januárom a februárom nastal pokles) **– áno – nie** (najväčší pokles je medzi augustom a septembrom)
2. Úhrn zrážok za 2. štvrťrok bol približne **400** mm.

   Skutočné hodnoty zaznačené v grafe sú: apríl 83 mm, máj 132 mm, jún 187 mm, spolu za 2. štvrťrok teda 402 mm zrážok.

   Meraním pomocou pravítka sa možno dopracovať veľmi blízko k tejto hodnote. Napr. my sme meraním zistili: Veľkosť 50 na zvislej osi zodpovedá dĺžke 1,1 mm, pre mesiace apríl, máj a jún je vzdialenosť hodnoty na grafe od vodorovnej osi po poradí 1,85 mm, 2,9 mm a 4,15 mm. Tomu zodpovedajú po poradí hodnoty $\frac{1,85}{1,1} \cdot 50 \approx 84$ mm zrážok, $\frac{2,9}{1,1} \cdot 50 \approx 132$ mm zrážok a $\frac{4,15}{1,1} \cdot 50 \approx 189$ mm zrážok, teda celkom asi 405 mm zrážok.

   Iný možný postup je naniesť postupne jednotlivé údaje z grafu na papierik (teda nájsť hodnotu súčtu najprv graficky), a potom priložením papierika k zvislej osi odhadnúť veľkosť súčtu.

   Aj hrubším odhadom možno získať hodnotu blízku číslu 400 mm zrážok. Ak do grafu doplníme (stačí približne) čiary pre hodnoty 75, 125 a 175 mm, vidíme, že hodnota pre apríl leží medzi 75 a 100, bližšie k 75, teda môže byť asi 80-85. Podobnými úvahami môžeme odhadnúť hodnotu pre máj na 130-135 (leží medzi 125 a 150 bližšie k 125) a hodnotu pre jún na asi 185-190 (leží približne v strede medzi 175 a 200). Dostaneme tak odhad od 395 do 410 mm zrážok.
3. **nie**

   Správne je každé zdôvodnenie založené na skutočnosti, že uvedený graf nezobrazuje množstvo zrážok v jednotlivých dňoch mesiaca, ale len súčet zrážok za jednotlivé dni mesiaca (a teda, že priamka spájajúca dve susedné hodnoty nesúvisí s množstvom zrážok v jednotlivých dňoch, ale je len spojnicou dvoch susedných hodnôt grafu).

   *Poznámka. K správnej odpovedi nie vedie aj argument, že množstvo zrážok v jednom dni alebo úseku mesiaca nemôže byť väčšie ako celkový úhrn zrážok v tomto mesiaci. Toto zdôvodnenie nepokladáme za správne, môže byť však podnetom na ďalšiu diskusiu.*
4. **k druhej**

   Vo vysvetlení by sa mal objaviť aspoň jeden z podstatných rozdielov medzi opisom prvej oblasti a zobrazeným grafom:
   - z júna na júl by malo množstvo zrážok vzrásť, ale v grafe klesá,
   - najväčšie hodnoty by mali byť v mesiacoch august a september, v grafe sú v mesiacoch máj a jún.

5. Nakreslený graf by mal spĺňať nasledujúce podmienky:
   - v každom mesiaci je vyznačená len jedna hodnota, susedné hodnoty môžu, ale nemusia byť spojené priamkami,
   - hodnoty v mesiacoch marec, apríl, máj sú menšie ako 10 (z textu možno usúdiť, že obdobie sucha pripadá prinajmenšom na mesiace marec, apríl, máj),
   - hodnoty v mesiacoch august a september sú väčšie ako všetky zvyšné hodnoty a väčšie ako 40 (vtedy dosahuje vrchol obdobie dažďov),
   - hodnoty v mesiacoch október, november, december, január, február postupne klesajú (to zodpovedá pozvoľnému doznievaniu obdobia dažďov, o ktorom sa hovorí v texte),
   - hodnota v januári je väčšia ako hodnota v marci (podľa textu marec už spadá do obdobia sucha, január ešte nie).

## ŽUMPA

1.

| Žumpy hranaté - rozmery | | | | |
|---|---|---|---|---|
| žumpa číslo | približný celkový objem (m³) | šírka (mm) | dĺžka (mm) | výška (mm) |
| 1 | 2 | 1500 | 1000 | 1500 |
| 2 | 4 | 1500 | 2000 | 1500 |
| 3 | 6 | 1500 | 3000 | 1500 |
| 4 | 9 | 1500 | 4000 | 1500 |
| 5 | 12 | 2000 | 4000 | 1500 |
| 6 | 16 | 2000 | 4000 | 2000 |
| 7 | 20 | 2000 | 5000 | 2000 |

2. **za 25 dní**

   Žumpa číslo 3 má približný objem 6 m$^3$ = 6 000 litrov. Za 1 deň Novákovci vyprodukujú 240 litrov znečistenej vody. Počet dní dostaneme ako podiel

$$6\,000 : 240 = 25 \text{ (dní)} .$$

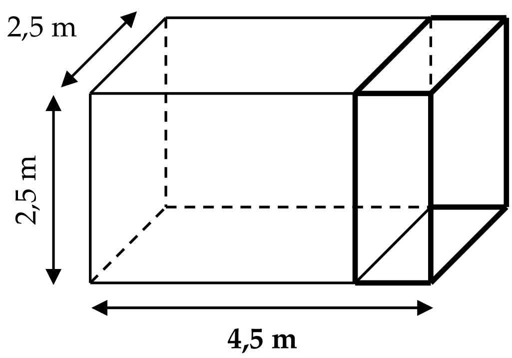
3. Za 2 mesiace Novákovci vyprodukujú asi **14 640** (produkcia za 61 dní) alebo **14 600** (produkcia za 365 dní delená 6) **litrov** znečistenej vody. (Je možné, že žiaci uvedú niektorú z hodnôt 13 920, 14 400, 14 880 predstavujúcich produkciu znečistenej vody za 58, 60 a 62 dní).

   Rozmery najvhodnejšej novej žumpy sú **2 000** mm × **4 000** mm × **2 000** mm.

   Výpočet závisí od toho, ako žiaci budú chápať pojem 2 mesiace, napr.: produkcia za 60 dní je $60 \cdot 120 \cdot 2 = 14\,400$ (litrov), produkcia za $\frac{2}{12}$ roka je $\frac{365 \cdot 120 \cdot 2}{12} \cdot 2 = 14\,600$ (litrov).

   Novákovci vyprodukujú viac ako $12 \text{ m}^3$ a menej ako $16 \text{ m}^3$, najvhodnejšia z tabuľky preto bude žumpa s približným objemom $16 \text{ m}^3$. Tá má rozmery $2\,000 \text{ mm} \times 4\,000 \text{ mm} \times 2\,000 \text{ mm}$ .

4. Nové rozmery jamy sú **2,5** m × **4,5** m × **2,5** m. Pôvodnú dĺžku 3,5 m možno o 1 m zväčšovať nielen jedným smerom (ako je to na našom obrázku), ale aj



v obidvoch smeroch (napr. 0,5 m vľavo a 0,5 m vpravo).

5. Približne **6 m³** (za správnu možno považovať aj odpoveď **7 m³**, ktorá vznikne zaokrúhlením nahor):

$$2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 1 = 6{,}25 \ (\mathrm{m}^3)$$

6. Budú chýbať približne 3 m³ zeminy. Za správny možno pokladať každý údaj **medzi 2,5 m³ a 3 m³**, za podstatný považujeme v tomto prípade správny postup, nie záverečné zaokrúhlenie.

   Výpočet : jama má objem $2{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 2{,}3 = 25{,}875$ (m³), žumpa zaberie $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ (m³), voľné miesto je preto $25{,}875 - 16 = 9{,}875$ (m³). Z tohto objemu $\frac{1}{9}$ má tvoriť cement, $\frac{8}{9}$ hlina, potrebujú preto $\frac{8}{9} \cdot 9{,}875 \approx 8{,}78$ (m³) hliny. Objem vykopanej hliny je 6,25 (m³), preto bude ešte chýbať približne

$$8{,}78 - 6{,}25 = 2{,}53 \approx 2{,}5 \ (\mathrm{m}^3) \text{ zeminy.}$$

   *Poznámka: V snahe nekomplikovať výpočty neuvažujeme v úlohe o vstupe do žumpy (to je otvor s rozmermi cca 60 cm × 60 cm krytý poklopom), čerpacej jamke ani vtokovom potrubí. Rovnako tak neuvažujeme o zväčšovaní objemu zeminy po jej vykopaní.*

## Zoznam odkazov na použité obrázky a tabuľky údajov

| | |
|---|---|
| Predhovor | http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Leser36g.jpg, http://www.celinemalepart.com/media/illustrations/Le%20grand%20liseur.jpg |
| Akcia | www.fashion-era.com |
| Beh na Empire State Building | http://www.esbnyc.com/tourism/tourism_specialevents_runup.cfm, http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/94/Empire_State_building_19.JPG |
| Bežné a špeciálne kocky | http://www.korthalsaltes.com/platonic_solids_pictures.html, http://gallery.mudpuddle.co.nz/d/8659-2/craps.jpg ,http://images.jupiterimages.com/common/detail/27/07/23210727.jpg |
| Cesta | http://www.obecabraham.sk |
| Cykolmaratón | http://media.novinky.cz/421/124215-original-6i42m.jpg |
| Časové pásma | http://en.wikipedia.org/, http://www.waytorussia.net/TransSiberian/ ) |
| Dedičské konanie | http://www.inheritance-tax-uk.com/Estate%20planning.jpg, http://realityloop.net/blog/-EnterPostTitleHere_A066/LawAndOrder.png ,http://lawyer-zone.com/Lawyer_with_book.gif |
| Dekoračné kocky | http://www.martin-sand.de/images/Green%20Cubes%201.jpg |
| Dopravné nehody | http://thejewishpress.blogspot.com/2007/12/giants-of-journalism.html, http://www.biblepicturegallery.com/free/Screen-sized%20pictures.htm, http://yumyum-lax.blogspot.com/2007/08/new-gear-photos-click-on-new-2008-gear.html |
| Energia vetra | http://secondward.blogspot.com/2006/04/wind-turbines.html, http://got2begreen.com/denmark-generates-too-much-wind-power/,. http://www.metaefficient.com/news/3000-megawatts-of-new-us-wind-power-in-2007.html |
| Firma KOCKA | http://images.jupiterimages.com/common/detail/96/92/23189296.jpg, http://images.jupiterimages.com/common/detail/98/92/23189298.jpg |
| Hokejový štadión | http://www.visitrapidcity.com/images/ice.jpg |
| Holubica Winkie | http://www.ww2awards.com/award/1926, http://etc.usf.edu/clipart/7500/7522/pigeon_7522.htm, http://users.bigpond.net.au/ctdavies/Jims%20photo%20gallery.htm, http://www.aquarius.geomar.de/make_map.html |
| Hustota obyvateľstva | http://www.mirrabikeco.com/bikeblog/2007/05/, http://users.ecs.soton.ac.uk/km/pics/kirk/landscapes/images/norway-flord.jpg, http://de.wikipedia.org/wiki/Cisleithanien |
| Chrípkové prázdniny | http://i.pravda.sk/06/092/skcl/P0415a773_skola.jpg |
| Kalendár | http://wordinfo.info/words/images/gregorian-calen-trans.gif, http://www.middletownschools.org/ |
| Karáty | http://www.surprisegold.com/mens-wedding-rings.htm , http://www.mojetapety.cz/kategorie/penize/?start=2, http://katalogus.numismatics.hu/index.php/cPath/31_38_41/sort/6a/page/9, http://secure2.moneymuseum.com/frontend/moneymuseum/de/8ZKlTsrPVs9Q6LBk/CoinCatalog/list?page=7, http://secure2.moneymuseum.com/frontend/moneymuseum/de/hC5nf0tN1J8BgOtr/-CoinCatalog/list, http://www.wildwinds.com/coins/brit/anne/i.html |
| Koľko nás bude? | http://www.health-in-action.org/node/311 , www.statistics.sk, http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b8/Stork_with_new-born_child.png/626px-Stork_with_new-born_child.png |
| Krvné skupiny | http://www.transfuzioni.com/shqip/informata/files/clip_image001_0000.gif |
| Laty | http://www.cassovia.sk/korzar/archiv/clanok.php3?sub=26.1.2002/7997PAN&title=Nepodce%F2ujte%20meranie%0D%0A |
| Lieky | informácie o lieku z úlohy 2 sú z http://www.emea.europa.eu/humandocs/PDFs/EPAR/Xeloda/H-316-PI-sk.pdf ,graf v zadaní je z http://www.chartsgraphsdiagrams.com/HealthCharts/growth-2-20-girls.html |
| Nomogram | http://psy.ucsd.edu/~kang/child%20pictures/children-jump.jpg |
| Palacinky | http://de.wikipedia.org/wiki/Palatschinken, http://dodgewoodworking.com/blog/page/2/) |

| | |
|---|---|
| Priestupné roky | *http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Gregory_XIII.jpg, http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/12/Julius_caesar.jpg , http://wordinfo.info/words/images/gregorian-calen-trans.gif* |
| Quincunx – Galtonova doska | *http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Galton_at_Bertillon%27s_%281893%29.jpg* |
| Rýchlosť zvierat | *http://www.ariva.de, http://www.flickr.com/photos/logosinberlin/164233529/, http://theora.com/images/Cheetah.jpg, http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/Grant%27s-gazelle.jpg* |
| Skriňa za dverami | *http://www.mcps.k12.md.us/clipart/gif/man-thinking.gif* |
| Spoločný prenájom | *http://www.maler-versteegen.de/images/Maler.gif, http://www.malvorlagen.cc/images/malvorlagen/reinigungskraft-841305.jpeg* |
| Srdičko embrya | *http://www.scienceclarified.com/images/uesc_04_img0230.jpg* |
| Škatuľky | *http://www.hp.sk/spotrebak/img/pastelky.jpg* |
| Tarify elektrickej energie | *http://www.airtricity.com/_internal/* |
| Turistika | *http://www.ms9maja.sk/images/skola-v-prirode.jpg,* |
| Výmena okien | *http://www.svet-bydleni.cz/Files/Backup/oknaROZHODNOUT33.jpg* |
| Zemetrasenia | *http://www.telegraph.co.uk/telegraph/multimedia/archive/00671/earthquake-building_671685n.jpg* |
| Zlato | *http://www.mojetapety.cz/kategorie/penize/?start=2,http://sk.wikipedia.org/wiki/Beckov_%28hrad%29, http://item.express.ebay.com/Art_Sculptures__Bronze-Man-Sculpture-Large-Nude-Body-Building-Gay-Art* |
| Zorné pole | *http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Crocodilia* |
| Zrážky | *http://amigosaberdare.co.uk/images/mex%20man%20and%20cactus.gif, http://latimesblogs.latimes.com/thedailymirror/images/2007/07/19/cactus_taqueria.jpg* |
| Župa | *http://images.google.sk/imgres?imgurl=http://lh3.google.com/, http://www.zensys.com/MDM.htm* |

doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc., RNDr. Pavol Černek, CSc., PaedDr. Ján Žabka a kol.

**MATEMATIKA A SVET OKOLO NÁS**

zbierka úloh

Vyšlo vo vydavateľstve Mgr. Pavol Cibulka v náklade 1 500 ks.
Publikácia vznikla v rámci projektu, ktorý bol spolufinancovaný Európskou úniou.

**NEPREDAJNÉ**

Úlohy sú zverejnené na stránke projektu *http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~esfprojekt*.
Akékoľvek pripomienky a návrhy k zbierke posielajte na e-mailovú adresu projektu *matematikasvet@gmail.com* alebo na adresu *zabiak@gmail.com*.

**Obálku navrhol:** Mgr. Pavol Cibulka

**Prvé vydanie, 2008**

**ISBN 978-80-969950-1-1**