

## Arnoľdove úlohy

1. Nakreslite graf derivácie a graf integrálu funkcie zadanej voľne načrtnutým grafom.

2. Vypočítajte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\arcsin(\arctan(x)) - \arctan(\arcsin(x))}.$$

3. Nájdite kritické hodnoty a kritické body zobrazenia

$$z \mapsto z^2 + 2\bar{z}.$$

Výsledok nakreslite.

4. Vypočítajte stú deriváciu funkcie

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

5. Vypočítajte stú deriváciu funkcie

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

v bode 0 s presnosťou 10%.

6. Nakreslite v rovine  $(x, y)$  krivku, zadanú parametricky

$$x = 2t - 4t^3, \quad y = t^2 - 3t^4.$$

7. Koľko normál k elipse možno viesť zadaným bodom roviny? Vyšetrite oblasť roviny, v ktorej je toto číslo maximálne!

8. Koľko maxím, miním a sedlových bodov má funkcia

$$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4$$

na ploche

$$x + y + z + u + v = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 1, \quad x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + v^3 = C?$$

9. Je pravda, že každý kladný polynóm dvoch reálnych premenných má globálne minimum?

10. Preskúmajte asymptotiku riešení  $y$  rovnice  $x^5 + x^2y^2 = y^6$ , ktoré sa blížia k 0 pri  $x \rightarrow 0$ .

11. Preskúmajte konvergenciu integrálu

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{1 + x^4 y^4}.$$

12. Nájdite tok vektorové ho poľa  $\vec{r}/r^3$  plochou  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 2$ .

13. Vypočítajte s relatívnou chybou maximálne 5%

$$\int_1^{10} x^x dx.$$

14. Vypočítajte s relatívnou chybou maximálne 10%

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx.$$

15. Vypočítajte s relatívnou chybou 10%

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(100(x^4 - x)) dx.$$

16. Akú časť objemu 5-rozmernej kocky predstavuje objem do nej vpísanej gule? Ako je to v prípade 10-tich rozmerov?

17. Nájdite vzdialenosť od stredu 100-rozmernej homogénnej pologule do jej ťažiska s relatívnou chybou 10%.

18. Vypočítajte

$$I(n) = \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[ - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j \right] dx_1 \dots dx_n$$

19. Preskúmajte tvar lúčov svetla v rovinnom prostredí s indexom lomu

$$n(y) = y^4 - y^2 + 1$$

využívajúc Snellov zákon  $n(y) \sin(\alpha) = \text{const}$ , kde  $\alpha$  je uhol lúča s osou  $y$ .

20. Nájdite deriváciu riešenia rovnice  $x'' = x + A(x')^2$ , ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ , podľa parametru  $A$  pri  $A = 0$ .

21. Nájdite deriváciu riešenia rovnice  $x'' = (x')^2 + (x')^3$ , ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = A$ , podľa parametru  $A$  pri  $A = 0$ .

22. Preskúmajte hranicu oblasti stability v priestore koeficientov rovnice

$$x''' + ax'' + bx' + cx = 0.$$

23. Riešte kvázihomogénnu rovnicu

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^3}{y}.$$

24. Riešte kvázihomogénnu rovnicu

$$x'' = x^5 + x^2 x'.$$

25. Môže sa asymptoticky stabilné ekvilibrium stať nestabilným (podľa Ljapunova) po linearizácii?

26. Preskúmať správanie sa riešení systémov

$$x' = y, \quad y' = 2 \sin(y) - y - x$$

a

$$x' = y, \quad y' = 2x - x^3 - x^2 - \epsilon x,$$

kde  $\epsilon \ll 1$ , pri  $t \rightarrow \infty$ .

27. Nakresliť obrazy riešení rovnice

$$x'' = -kx' - \frac{dU}{dx}$$

v rovine  $(x, E)$ , kde  $E = 1/2(x')^2 + U(x)$ , poblíž nedegenerovaných kritických bodov potenciálu  $U$ .

28. Nakresliť fázový portrét a preskúmať jeho zmeny pri zmenách malého komplexného parametra  $\epsilon$ :

$$z' = \epsilon z - (1 + i)z|z|^2 + \bar{z}^4.$$

29. Náboj sa pohybuje po rovine pod vplyvom na ňu kolmého magnetického poľa  $B$ . Ktorým smerom sa bude pohybovať stred Larmorovej kružnice? Vypočítajte rýchlosť tohoto pohybu. [Matematicky ide o krivky s krivosťou  $NB$  pre  $N \rightarrow \infty$ .]

30. Nájdite súčet indexov singulárnych bodov vektorového poľa  $z\bar{z}^2 + z^4 + 2\bar{z}^4$ , rôznych od nuly.

31. Nájdite index singulárneho bodu 0 vektorového poľa  $(x^4 + y^4 + z^4, x^3y - xy^3, xyz^2)$ .

32. Nájdite index singulárneho bodu 0 vektorového poľa  $\text{grad}(xy + yz + zx)$ .

33. Nájdite koeficient zretiazenia (*linking number*) fázových kriviek rovnice malých kmitov

$$x'' = -4x, \quad y'' = -9y$$

na ploche konštantnej energie  $(x'^2 + 4x^2 + y'^2 + 9y^2 = \text{const.})$ .

34. Preskúmať singulárne body krivky  $y = x^3$  v projektívnej rovine.

35. Nakresliť geodetiky na ploche  $(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1$ .

36. Nakresliť evolventy kubickej paraboly  $y = x^3$  (evolventa sú body  $\vec{r}(s) = (c - s)\vec{r}'(s)$ , kde  $s$  je dĺžka pozdĺž krivky  $\vec{r}(s)$  a  $c$  je konštanta).

37. Nech  $A$  je symetrická matica bez násobných vlastných čísel. Dokážte, že plochy  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  je Euklidov skalárny súčin v  $\mathbb{R}^n$ )

$$\langle (A - \lambda E)^{-1} x, x \rangle = 1, \quad E \text{ je jednotková matica}$$

sú vzájomne ortogonálne.

38. Vypočítať integrál z Gaussovej krivosti plochy

$$z^4 + (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 3y^2 - 1) = 0.$$

39. Vypočítajte Gaussov integrál

$$\iint \frac{\det(d\vec{A}, d\vec{B}, \vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} - \vec{B}|^3},$$

kde  $\vec{A}$  beží po krivke  $x = \cos \alpha, y = \sin \alpha, z = 0$  a  $\vec{B}$  po  $x = 2 \cos^2 \beta, y = \frac{1}{2} \sin \beta, z = \sin 2\beta$ .

40. Preneste vektor lokalizovaný v Petrohrade ( $60^\circ$  zemepisnej šírky) a smerujúci na sever po rovnobežke smerom zo západu na východ dookola Zeme naspäť do Petrohradu. Čo dostanete?

41. Nájdite geodetickú krivosť krivky  $y = 1$  v hornej polrovine s Lobačevského - Poincarého metrikou

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

42. Pretínajú sa v Lobačevského rovine ťažnice trojuholníka v jednom bode? A výšky?

43. Nájdite Bettiho čísla plochy

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - y_1^2 - \dots - y_l^2 = 1$$

a množiny

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq 1 + y_1^2 + \dots + y_l^2$$

v  $k + l$ -rozmernom priestore.

44. Nájďte Bettiho čísla plochy

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2$$

v trojrozmernom projektívnom priestore. To isté aj pre plochy

$$z = xy, \quad z = x^2, \quad \text{a} \quad z^2 = x^2 + y^2.$$

45. Nájďte index samoprieseku plochy  $x^4 + y^4 = 1$  v projektívnej rovine  $CP^2$ .

46. Nájďte konformné zobrazenie vnútra jednotkového kruhu na prvý kvadrant.

47. Nájďte konformné zobrazenie vnútra jednotkového kruhu na vonkajšok zadanej elipsy.

48. Nájďte konformné zobrazenie polroviny bez úsečky kolmej na jej kraj na polrovinu.

49. Vypočítajte

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1+z^{10}}}.$$

50. Vypočítajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx.$$

51. Vypočítajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx.$$

52. Nájďte 1. člen asymptotického rozvoja keď  $k \rightarrow \infty$  integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{1+x^{2n}}}.$$

53. Preskúmať singulárne body diferenciálnej formy  $dt = dx/y$  na kompaktnej Riemannovej ploche

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = E,$$

kde  $U$  je polynóm a  $E$  nie je kritická hodnota.

54. Uvažujte rovnicu

$$x'' = 3x - x^3 - 1.$$

V okolí ktorého ekvilibria je perióda kmitov pri rovnakej energii ( $E = 1/2(x')^2 - 3/2x^2 + 1/4x^4 + x$ ) väčšia?

55. Preskúmajte topologicky Riemannovu plochu funkcie  $w = \arctan(z)$ .

56. Koľko úch má Riemannova plocha funkcie  $w = \sqrt{1+z^n}$ .

57. Nájďte dimenziu priestoru riešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \delta(z-i), \quad \text{pre } \text{Im}(z) \geq 0, \quad \text{Im}(u(z))|_{\text{Im}(z)=0} = 0, \quad u|_{z \rightarrow \infty} = 0.$$

58. Nájďte dimenziu priestoru riešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = a\delta(z-i) + b\delta(z+i), \quad \text{pre } |z| \leq 2, \quad \text{Im}(u(z))|_{|z|=2} = 0.$$

59. Preskúmajte existenciu a jednoznačnosť riešenia úlohy

$$y \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u|_{x=1} = \cos(y)$$

v okolí bodu  $(1, y_0)$ .

60. Existuje a je jediné riešenie Cauchyho úlohy

$$x(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$$

v okolí bodu  $(x_0, 0)$ ?

61. Pre aké maximálne  $t$  sú riešenie úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x), \quad u|_{t=0} = 0$$

definované na intervale  $[0, t)$ ?

62. Nájdite všetky riešenia rovnice

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - \sin(x) \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$$

v okolí bodu  $(0, 0)$ .

63. Existuje riešenie Cauchyho úlohy

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + \sin(x) \frac{\partial u}{\partial y} = y, \quad u|_{x=0} = y^4$$

v celej rovine  $(x, y)$ ? Je jednoznačné?

64. Má Cauchyho úloha

$$(\nabla u)^2 = 1, \quad u|_{x=y} = 1$$

hladké riešenie v oblasti  $y \geq x^2$ ? A čo v oblasti  $y \leq x^2$ ?

65. Nájdite strednú hodnotu funkcie  $\ln(r)$  na kružnici  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  a funkcii  $1/r$  na sfére  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ .

66. Riešte Dirichletovu úlohu

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{pre } x^2 + y^2 < 1 \\ u &= 1 & \text{pre } x^2 + y^2 = 1, y > 0 \\ u &= -1 & \text{pre } x^2 + y^2 = 1, y < 0. \end{aligned}$$

67. Koľkorozmerný je priestor riešení úlohy

$$\Delta u = 0 \text{ pre } x^2 + y^2 > 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ pre } x^2 + y^2 = 1,$$

ktoré sú spojité v oblasti  $x^2 + y^2 \geq 1$ ?

68. Nájdite

$$\inf \int \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

cez  $C^\infty$  funkcie  $u$ , ktoré majú hodnotu 0 pre  $(x, y) = (0, 0)$  a hodnotu 1 pre  $x^2 + y^2 = 1$ .

69. Ukážte, že priestorový uhol, pod ktorým je vidno zadanú uzavretú krivku, je harmonická funkcia polohy oka.

70. Vypočítajte strednú hodnotu priestorového uhla, pod ktorým je vidno kruh  $x^2 + y^2 \leq 1$ , ležiaci v rovine  $z = 0$ , zo sféry  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ .

71. Vypočítajte hustotu náboja na vodivej hranici plochy  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , do ktorej je vložený náboj  $q$  vo vzdialenosti  $r$  od stredu.

72. Vypočítajte v prvom ráde sploštenia Zeme  $\epsilon$  ( $\epsilon \approx 1/300$ ) vplyv sploštenia Zeme na jej gravitačné pole vo vzdialenosti od Zeme rovnvej vzdialenosti Zem - Mesiac. (Považujte pri tom Zem za homogénnu).

73. Nájdite príspevok k poruche úmerný  $\epsilon$  ku kapacite guľového kondenzátoru spôsobený nerovnosťou jeho povrchu

$$R = 1 + \epsilon j(\phi, \theta).$$

74. Nakreslite graf funkcie  $u(x, 1)$  pre  $0 \leq x \leq 1$ , ak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u|_{x^2=x} = x^2.$$

75. V dôsledku ročného kolísania teploty zem v meste  $N$  zamrzá do hĺbky  $2m$ . Do akej hĺbky by táto zem zamrzala v dôsledku storočných výkyvov teploty? (Ak  $T(t)$  opisuje ročné variácie teploty, potom storočnými varáciami rozumieme  $T(t/100)$ .)

76. Preskúmajte správanie sa riešenia úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u \sin(x))}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = 1, \quad \epsilon \ll 1$$

pri  $t \rightarrow +\infty$ .

77. Nájdite vlastné čísla Laplaceovho operátora na sfére polomeru  $R$  v euklidovskom priestore s dĺžkou  $n$ . Nájdite aj násobnosť vlastných čísel.

78. Vyriešte Cauchyho úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= 9 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2B, & \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= 6 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 2A, \\ A(x, t=0) &= \cos(x), & B(x, t=0) &= 0, & \frac{\partial A(x, t=0)}{\partial t} &= \frac{\partial B(x, t=0)}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

79. Koľko riešení má okrajová úloha

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = \sin(x), \quad u(0) = u(\pi) = 0?$$

80. Vyriešte rovnicu

$$\int_0^1 (x+y)^2 u(x) dx = \lambda u(y) + 1.$$

81. Nájdite Greenovu funkciu operátora

$$\frac{d^2}{dx^2} - 1$$

a riešte rovnicu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy = e^{-x}.$$

82. Pre aké hodnoty rýchlosti  $c$  má rovnica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

riešenie v tvare postupnej vlny

$$u = \varphi(x - ct), \quad \varphi(-\infty) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad 0 \leq u \leq 1?$$

83. Nájdite riešenia rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x},$$

ktoré majú tvar postupnej vlny

$$u = \varphi(x - ct), \quad \varphi(\pm\infty) = 0.$$

84. Nájdite počet kladných a záporných koeficientov v normálnej forme kvadratických foriem

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

85. Nájdite dĺžky hlavných osí elipsoidu

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 1.$$

86. Nájdite priamku idúcu cez stred kocky tak, aby súčet kvadrátov vzdialeností priamky od vrcholov bol a.) najmenší; b.) najväčší. To isté pre štvorsten a pre osemsten.

87. Nájdite hodnoty derivácií dĺžok elipsoidu

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \epsilon xy$$

podľa  $\epsilon$  pri  $\epsilon = 0$ .

88. Aké útvary dostávame ako prienik nekonečnerozmernej kocky  $\{|x_k| \leq 1, k = 1, 2, 3, \dots\}$  a dvojrozmernej roviny?

89. Vypočítajte

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y}.$$

90. Vypočítajte súčet komutátorov matíc

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]].$$

91. Nájdite Jordanovu normálnu formu operátora  $e^{d/dt}$  v priestore kvázipolynónov  $\{e^{\lambda t} p(t)\}$ , kde stupne polynónov  $p(t)$  sú menšie ako 5. Ďalej nájdite Jordanovu normálnu formu operátora

$$\text{ad}_A : B \mapsto [A, B]$$

pôsobiaceho na  $(n \times n)$  maticiach. Matica  $A$  je diagonálna.

92. Nájdite rády podrúp grupy rotácií kocky a jej normálne delitele.

93. Rozložte priestor funkcií definovaných vo vrchoch kocky na invariantné priestory ireducibilné voči grupe a.) symetrií kocky; b.) rotácií kocky.

94. Rozložte päťrozmerný reálny vektorový priestor na ireducibilné invariantné podpriestory grupy zadanej cyklickými zámienami prvkov bázy.

95. Rozložte priestor homogénnych polynómov stupňa päť závislých od  $(x, y, z)$  na ireducibilné invariantné podpriestory, invariantné voči grupe rotácií  $SO(3)$ .
96. Každý z 3600 používateľov telefónnej stanice ju použije v priemere raz za hodinu. Aká je pravdepodobnosť, že v zadanej sekunde budú volať piati alebo viacerí? Odhadnite stredný časový úsek medzi dvomi takýmito sekundami.
97. Častica skacká po celých nezáporných hodnotách polpriamky  $x \geq 0$  tak, že s pravdepodobnosťou  $a$  sa posunie z daného miesta o 1 vpravo, s pravdepodobnosťou  $b$  sa posunie o 1 vľavo a s pravdepodobnosťou  $1 - a - b$  ostane na mieste. Pokiaľ je v mieste  $x = 0$  tak namiesto pohybu doľava ostáva na tom istom mieste. Nájdite limitné rozdelenie pravdepodobnosti polohy častice a taktiež strednú hodnotu  $x$  a  $x^2$  pokiaľ na začiatku bola častica v mieste  $x = 0$ .
98.  $N$  hráčov stojí v kruhu, každý z nich ukáže 0 až 5 prstov na pravej ruke (všetci naraz). Potom určia víťaza tak, že odpočítajú od prvého hráča celkový počet prstov. Pri akom  $N$  je pravdepodobnosť výhry aspoň jedného z vhodne zvolených  $N/10$  hráčov aspoň 0,9? Ako sa správa pravdepodobnosť výhry prvého, keď  $N \rightarrow \infty$ ?
99. Jeden hráč drží v ruke mincu s hodnotou 10 alebo 20 kopejok, druhý háda, aká minca to je. Ak uhádne, mincu získa, ak nie, zaplatí 15 kopejok. Je táto hra spravodlivá? Aké sú optimálne stratégie pre oboch účastníkov?
100. Aká je priemerná plocha priemetu jednotkovej kocky na rovinu? (rozdelenie smerov premietania je izotropné, premietame kolmo).