vypočítajme

$$P(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

pozrieme sa na definičný obor funkcie P. máme

$$1 - 2a\cos x + a^2 = 4a\sin^2\frac{x}{2} + (1-a)^2.$$

a to znamená, že pre $a < 0$ máme odhad

$$1 - 2a\cos x + a^2 \geq (1+a)^2 \geq 0$$

a podobne pre $a > 0$ máme odhad

$$1 - 2a\cos x + a^2 \geq (1-a)^2 \geq 0.$$

teda podintegrálna funkcia nadobúda len reálne hodnoty (teda je dobre definovaná) a ďalej výraz v logaritme sa vynuluje jedine ak $|a| = 1$, teda $P(a)$ je vlastný parametrický integrál pre každé $a \neq \pm 1$. rovnaká úvaha sa aplikuje na funkciu[1]

$$\int_0^\pi \frac{-2\cos x + 2a}{1 - 2a\cos x + a^2}\mathrm{d}x$$

a to znamená, že

$$P: \ (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$$

je *spojite diferencovateľná* funkcia.

ďalej sa pozrieme na body ± 1. napríklad

$$P(1) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\cos x + 1)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln(4\sin^2\frac{x}{2})\mathrm{d}x \sim \int_0 \ln x\mathrm{d}x$$

teda $P(1)$ je *konvergentný* nevlastný integrál – rovnako sa ukáže, že aj $P(-1)$ je konvergentný integrál. a preto definičným oborom funkcie P sú všetky reálne čísla, $D_P = \mathbb{R}$.[2]

ďalej máme, pre každé a rôzne od ± 1, že

$$P'(a) = \int_0^\pi \frac{-2\cos x + 2a}{1 - 2a\cos x + a^2}\mathrm{d}x \tag{2}$$

samozrejme (2) je integrál z racionálnej funkcie premennej $\cos x$, teda užijeme substitúciu $u = \tan\frac{x}{2}$ a dostávame integrál z racionálnej funkcie

$$P'(a) = \int_0^\infty \frac{-2\frac{1-u^2}{1+u^2} + 2a}{1 - 2a\frac{1-u^2}{1+u^2} + a^2}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = 4\int_0^\infty \frac{(a-1) + (a+1)u^2}{(1-a)^2 + (1+a)^2u^2}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

[1]

$$\frac{-2\cos x + 2a}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\ln(1 - 2a\cos x + a^2).$$

[2] vyššie už máme, že zúženie P na $\mathbb{R}$ bez $\{\pm 1\}$ je C^1 funkcia.

urobíme rozklad na parciálne zlomky a takto dostaneme vyjadrenie derivácie funkcie P (zase samozrejme mimo bodov ± 1)

$$P'(a) = \frac{4}{2a} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1+u^2} + \frac{a^2-1}{(1-a)^2+(1+a)^2u^2} \right\} \mathrm{d}u. \tag{3}$$

formulu (3) by bolo dobré prediskutovať. podľa textu nad ňou by sa mala týkať všetkých hodnôt a okrem (nanajvýš) ± 1; lenže zjavne tento vzorec (vybraný z kontextu) nie je v poriadku pri $a = 0$. rozuzlenie je v tom, že už definitívne vieme, že P je spojite diferencovateľná funkcia v bode 0 a preto je isté, že

$$\frac{4}{2a} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1+u^2} + \frac{a^2-1}{(1-a)^2+(1+a)^2u^2} \right\} \mathrm{d}u \xrightarrow{a\to 0} P'(0),$$

a teda ozaj (3) zadáva aj $P'(0)$.[3]

pokračujme ďalej s formulou (3).

$$P'(a) = 4 \left\{ \frac{1}{2a}\frac{\pi}{2} + \frac{a^2-1}{2a} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1-a)^2+(1+a)^2u^2}}_{=J} \right\}.$$

teraz v integrále J urobíme substitúciu[4]

$$u = \frac{1-a}{1+a} v.$$

keďže funkcia

$$(-1,1) \ni a \mapsto \frac{1-a}{1+a}$$

má kladné hodnoty a funkcia

$$\{\mathbb{R} \setminus (-1,1)\} \ni a \mapsto \frac{1-a}{1+a}$$

má záporné hodnoty tak dostávame 2 situácie

- $|a| < 1$, v tomto prípade je

$$J = \frac{1-a}{1+a} \frac{1}{(1-a)^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1-a}{1+a} \frac{1}{(1-a)^2}$$

  a teda máme

$$P'(a) = 0. \tag{4}$$

- $|a| > 1$, v tomto prípade máme

$$J = \frac{1-a}{1+a} \frac{1}{(1-a)^2} \int_\infty^0 \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -\frac{\pi}{2} \frac{1-a}{1+a} \frac{1}{(1-a)^2}$$

  a teda máme

$$P'(a) = \frac{2\pi}{a}. \tag{5}$$

[3] prosím zamyslite sa nad tým, akým technickým *zázrakom* sa zvýraznil zrovna bod $a = 0$.
[4] stále máme $a \neq \pm 1$.

ďalej sa pozrieme na dôsledky formúl (4) a (5). v prípade (4) máme, že P je *konštanta* na $(-1,1)$ a keďže je zjavné, že $P(0)=0$, tak definitívne máme

$$(-1,1) \ni a \mapsto P(a) = 0. \tag{6}$$

v prípade formuly (5) máme, že pre $|a|>1$ je

$$P(a) = \pi \ln a^2 + const^{\pm}.$$

(predbežne by uvedená konštanta mohla byť iná pre $a>1$ a pre $a<-1$, preto to $const^{\pm}$). konštantu stanovíme takto.[5] nech teda $|a|>1$ a potom

$$P(a) = \int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x = \pi \ln a^2 + \int_0^{\pi} \ln\left(1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x\right)\mathrm{d}x$$

a teda napr. pre $a>1$ je treba aby

$$\pi \ln a^2 + const^{+} = \pi \ln a^2 + \int_0^{\pi} \ln\left(1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x\right)\mathrm{d}x,$$

alebo teda[6]

$$const^{+} = \int_0^{\pi} \ln\left(1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x\right)\mathrm{d}x \xrightarrow{a\to+\infty} 0$$

teda $const^{+}=0$. presne rovnako sa ukážem že $const^{-}=0$ a teda definitívne máme

$$\{(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\} \ni a \mapsto P(a) = \pi \ln a^2. \tag{7}$$

formule (6) a (7) zadávajú hodnoty funkcie P všade okrem bodov ± 1.

pozrieme sa ešte na hodnoty $P(1)$ a $P(-1)$. napr.

$$P(1) = \int_0^{\pi} \ln(4\sin^2\frac{x}{2})\mathrm{d}x = \pi\ln 4 + 4\int_0^{\pi/2}\ln(\sin y)\mathrm{d}y = \pi \ln 4 + 2\underbrace{\int_0^{\pi}\ln(\sin y)\mathrm{d}y}_{=K}.$$

teraz

$$K = \int_0^{\pi}\ln(\sin y)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\ln(\sin y)\mathrm{d}y + \int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin y)\mathrm{d}y.$$

ďalej

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin y)\mathrm{d}y = |z = y-\frac{\pi}{2}| = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos z)\mathrm{d}z$$

a preto

$$K = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin y\cos y)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2y\right)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2y)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}K$$

[5] tu byčloveka mohlo napadnúť určiť konštantu zo spojitého nadpojenia na formulu (6) – lenže z hľadiska teórie vlastného parametrického integrálu nemáme nijak zaručenú spojitosť funkcie P v bodoch ± 1!

[6] podľa vety o zámene limity a vlastného integrálu.

a teda

$$K = \pi \ln \frac{1}{2}.$$

a preto máme

$$P(1) = \pi \ln 4 + 2\pi \ln \frac{1}{2} = 0. \tag{8}$$

presne rovnako sa dokáže, že

$$P(-1) = 0. \tag{8'}$$

záver: zhrnutím formúl (6),(7),(8),(8') máme

$$\boxed{P(a) = \begin{cases} 0 & , \quad |a| \leq 1, \\ \pi \ln a^2 & , \quad |a| > 1. \end{cases}}$$

pozn.: $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, ale nie je diferencovateľná.