Spojitosť a diferencovateľnosť integrálov závislého od parametra.

① $F(\omega) = \int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,dx$

$D_F = \mathbb{R}$. Funkcia F je v $\mathbb{R}$ aj spojitá, lebo

$(\omega, x) \mapsto \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}$ je spojitá v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$

a platí: $\forall \omega \in \mathbb{R}\ \forall x \geq 0$

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\right| dx \leq \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} < +\infty$$

čiže $F \overset{v\,\mathbb{R}}{\rightrightarrows}$

Pozrieme sa, či má F aj deriváciu (v $\mathbb{R}$).

Vezmeme funkciu:

$$\left.\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\right|_\omega' = -\frac{x \sin(\omega x)}{1+x^2}$$

a preskúmame integrál:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{-x \sin(\omega x)}{1+x^2}\,dx} \equiv \hat{F}(\omega)$$

Definičným oborom funkcie $\hat{F}$ je $\mathbb{R}$, lebo:

• pre $\omega = 0$ integrál je z <u>nuly</u>

• pre $\omega \neq 0$ sa dá použiť Dirichletove kritérium:

(*)

$$- \quad \frac{x}{1+x^2} \overset{x \in O(\infty)}{\underset{x\to\infty}{\searrow}} 0$$

$$- \quad \int_0^A \sin(\omega x)\, dx = -\frac{\cos(\omega x)}{\omega}\Bigg|_{x=0}^{x=A} = \frac{-\cos(\omega A)+1}{\omega}$$

čiže $\exists K$ (nezávislé od A), že

$$\left| \int_0^A \sin(\omega x)\, dx \right| \le K$$

Takže $D_{\hat{F}} = \mathbb{R}$.

Otázka je, či sa funkcia $\hat{F}$ dá stotožniť s F' – s deriváciou funkcie F.

Ak sa vrátime k úvahe (*) vidíme, že ju možno vylepšiť v želateľnom smere <u>ALE</u> nie naraz v celom $\mathbb{R}$: zrejme totiž platí: $\forall \omega_0 > 0$:

$$\exists \tilde{K} > 0 \ \forall A > 0 \ \forall \omega \in [\omega_0, \infty) \cup (-\infty, -\omega_0] :$$

$$\left| \int_0^A \sin(\omega x)\, dx \right| \le \tilde{K} \quad \left(= \frac{2}{\omega_0} \right)$$

čo spolu s faktom, že funkcia $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ vôbec parameter ω neobsahuje, znamená, že integrál $\hat{F}$ konverguje rovnomerne v každej množine $(-\infty, -\omega_0] \cup [\omega_0, +\infty)$ a preto platí:

$$\boxed{\forall \omega \neq 0 : \exists\, F'(\omega) = \hat{F}(\omega)}$$

Zostáva nerozhodnutá otázka existencie $F'(0)$.

Dáme návod na to, ako možno na túto otázku odpovedať: ak $\omega > 0$, tak potom:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{x}{1+x^2} \sin(\omega x)\, dx > \frac{\frac{\pi}{2\omega}}{1+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin(\omega x)\, dx +$$

$$+ \frac{\frac{\pi}{\omega}}{1+\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2} \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega x)\, dx + \frac{\frac{\pi}{\omega}}{1+\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2} \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} \sin(\omega x)\, dx +$$

$$+ \frac{\frac{3\pi}{2\omega}}{1+\left(\frac{3\pi}{2\omega}\right)^2} \int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega x)\, dx \xrightarrow{\omega \to 0^+} \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} > 0$$

Premyslite si ako táto nerovnosť ovplyvňuje existenciu F' v $\omega = 0$.

$$G(u,v) = \int_0^\infty \cos(u x^2)\, e^{-v x^2}\, dx$$

$$D_G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

z faktu, že $\forall \varepsilon > 0 \ \forall [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$
$\exists u \in \mathbb{R} \ \exists v > 0 : \ \forall x \in [\alpha, \beta] : \ \cos(ux^2) e^{-vx^2} >$
$> 1 - \varepsilon$

je jasné, že uvedený integrál v množine D_G nekonverguje rovnomerne. To ale neovplyvní SPOJITOSŤ funkcie G v D_G, nakoľko je pravda, že:

ak $u \in \mathbb{R}$ a $v \geq v_0 > 0$, tak:

$$|\cos(ux^2)\, e^{-v x^2}| \leq e^{-v_0 x^2}$$

a

$$\int_0^\infty e^{-v_0 x^2}\, dx < +\infty$$

Takže G konverguje ~~~~ rovnomerne v každej množine typu $\mathbb{R} \times [v_0, \infty)$ (pre $v_0 > 0$) a preto je G spojitá funkcia v D_G.

Pozrieme sa na parciálne derivácie funkcie G v D_G.

Treba postupne ukázať integrály:

- $\displaystyle\int_0^\infty -2x^2\sin(ux^2)\,e^{-vx^2}\,dx = \cancel{D}\,\hat{G}(u,v)$

- $\displaystyle\int_0^\infty -\cancel{2}x^2\cos(ux^2)\,e^{-vx^2}\,dx = \mathring{G}(u,v)$

Rovnako ako G, ani $\hat{G}$ a $\mathring{G}$ nekonvergujú rovnomerne v D_G ALE $\hat{G}$ aj $\mathring{G}$ konvergujú rovnomerne v každej množine typu $\mathbb{R}\times[v_0,\infty)$, $v_0>0$

Lebo zase pre $(u,v)\in\mathbb{R}\times[v_0,\infty)$ je

$$|-x^2\cos(ux^2)\,e^{-vx^2}| \le x^2 e^{-v_0x^2}$$

a

$$|-x^2\sin(ux^2)\,e^{-vx^2}| \le x^2 e^{-v_0x^2}$$

a znova $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-v_0x^2}\,dx < +\infty$

Takže usudzujeme, že $\forall (u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ je:

$$\frac{\partial G(u,v)}{\partial u} = \hat{G}(u,v)$$

$$\frac{\partial G(u,v)}{\partial v} = \mathring{G}(u,v)$$

pozn.: je zjavné, že presne takto sa dokáže existencia VŠETKÝCH parciálnych derivácií funkcie G v D_G !!!