Príklady na R.K. integrály ~~záv.~~ záv. od param.

① $$F(n)=\int_0^1 (1+x+x^2+\dots+x^n)\sqrt{-\ln x}\,dx$$

kde $n\in\mathbb{N}$.

ukážeme, že F konverguje rovnomerne v $\mathbb{N}$:

$\forall x\in[0,1)$ ~~je~~ a $\forall n\in\mathbb{N}$ je:

$$1+x+\dots+x^n \le 1+x+\dots+x^n+x^{n+1}+\dots = \frac{1}{1-x}$$

preto:

$$(1+x+\dots+x^n)\sqrt{-\ln x} \le \frac{1}{1-x}\sqrt{-\ln x} = \varphi(x)$$

funkcia $\varphi:[0,1)\to\mathbb{R}$ je ~~spojitá~~ v $[0,1)$ integrovateľná, lebo:

- v $x=0^+$ má iba log-singularitu
- v $x=+1^-$ ~~je ohraničená~~ má len $(-x+1)^{-1/2}$ sing.

$\Rightarrow$ je integrovateľná

čiže $\forall n\in\mathbb{N}$ je

$$\int_0^1 (1+x+\dots+x^n)\sqrt{-\ln x}\,dx \le \int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln x}}{1-x}\,dx < +\infty$$

(2) $G(\beta) = \int_0^\infty \frac{x \sin(\beta x)}{1+x^2}\, dx$

v množine $\beta \geq \beta_0 > 0$.

Na základe Dirichletovho kritéria overíme rovnomernú konvergenciu

- $\forall A > 0$ je

$$\left| \int_0^A \sin(\beta x)\, dx \right| = \left| \frac{-\cos \beta x}{\beta} \Big|_0^A \right| = \frac{1 - \cos Ax}{\beta} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\beta_0} \quad (\text{tu vidno, že } \beta \to 0 \text{ je problém!})$$

- funkcia $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ je

(i) monotónna v $O(\infty)$ (klesá od $x = 1$)

(ii) $g(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$ a to rovnomerne vzhľadom na β (lebo β neobsahuje!)

③ $J(y) = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^y}\,dy$

zjavne $D_J = (-\infty, 2)$.

Ak $y \le y_0 < 2$ tak máme: $(|\sin x| \le |x|)$

$$\left|\frac{\sin x}{x^y}\right| \le \frac{1}{x^{y_0-1}} = \varphi(x)$$

a φ je integrovateľná majoranta k $\frac{\sin(x)}{x^y}$

pre $y \le y_0 < 2$. Takže J konverguje

rovnomerne v každej množine $(-\infty, y_0]$, $y_0 < 2$

V $D_J = (-\infty + 2)$ ale J nekonverguje rovnomerne,

ak $\omega > 0$ (malé) tak $\ge \frac{1}{2}$ pre $\omega \le \omega_0, \omega_0 > 0$

$$\int_0^\omega \frac{\sin(x)}{x^y}\,dx = \int_0^\omega \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{1}{x^{y-1}}\,dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_0^\omega \frac{1}{x^{y-1}}\,dx = \frac{1}{2(2-y)}\,\omega^{2-y} \xrightarrow{y \to 2^-} +\infty$$

t.j. platí negácia C-B podmienky pre integrál

J v okolí sing. bodu $x = 0$.

(4) $H(t)=\int_1^\infty \frac{t}{x^3}e^{-\frac{t}{2x^2}}$

$D_H=[0,\infty)$

Konvergencia H v D_H nie je rovnomerná, lebo:

$$\int_A^\infty \frac{t}{x^3}e^{-\frac{t}{2x^2}}dx = e^{-\frac{t}{2x^2}}\Big|_{x=A}^{x=+\infty} =$$

$$= 1-e^{-\frac{t}{2A^2}} \xrightarrow[\boxed{t\to+\infty}]{\forall A>0 \text{ (fixné)}} 1 \leftarrow \text{a to nie je malé } \varepsilon$$

Čiže problémom je iste okolie $t=+\infty$.

---

(5) $D(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}dx$

konverguje rovnomerne v každej množine $\alpha\geq\alpha_0>0$

(pozor! D nekonverguje rovnomerne v $\alpha>0$ - úloha).

vyjdeme z faktu, že $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz$ konverguje $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon>0\ \forall A>A_\varepsilon: \left|\int_A^\infty \frac{\sin z}{z}dz\right|<\varepsilon$

preto teraz:

$$\left|\int_A^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}dx\right| = \left|\ \alpha x = z\ \right| = \left|\int_{A\alpha}^\infty \frac{\sin(z)}{z}dz\right| < \varepsilon$$

ak len $A\alpha>A_\varepsilon$, t.j. ak len $\boxed{A>\frac{A_\varepsilon}{\alpha}}$

je zjavné, že túto úvahu nemožno predĺžiť až do $\alpha\to 0^+$.

⑥ $$K(t)=\int_0^\infty \sin(x^2)\sin(tx)\,dx$$

nech $A>0$, počítajme p.p.

$$\int_A^\infty \sin(x^2)\sin(tx)\,dx=\int_A^\infty x\sin(x^2)\frac{\sin(tx)}{x}\,dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\frac{\sin(tx)}{x}+\frac{1}{2}\int\cos(x^2)\frac{t\cos(tx)x-\sin(tx)}{x^2}\,dx\right]_A^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\cos(A^2)\frac{\sin(tA)}{A}+\frac{t}{2}\int_A^\infty x\cos(x^2)\frac{\cos(tx)}{x^2}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_A^\infty \cos(x^2)\frac{\sin(tx)}{x^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cos(A^2)\frac{\sin(tA)}{A}-\frac{1}{2}\int_A^\infty \cos(x^2)\sin(tx)\frac{1}{x^2}\,dx+$$

$$+\frac{t}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(x^2)\frac{\cos(tx)}{x^2}-\frac{1}{2}\int\sin(x^2)\frac{-t\sin(tx)x^2-2x\cos(tx)}{x^4}\,dx\right]_A^\infty=$$

$$=\frac{1}{2}\cos(A^2)\frac{\sin(tA)}{A}-\frac{1}{2}\int_A^\infty \cos(x^2)\sin(tx)\frac{1}{x^2}\,dx+$$

$$-\frac{t}{4}\sin(A^2)\frac{\cos(tA)}{A^2}+\frac{t^2}{4}\int_A^\infty \frac{\sin(x^2)\sin(tx)}{x^2}\,dx+$$

$$+\frac{t}{2}\int_A^\infty \frac{\sin(x^2)\cos(tx)}{x^3}\,dx$$

takže máme odtiaľ V integrálnych veľkosti zvyšky:

$$\left|\int_A^\infty \sin(x^2)\,\sin(tx)\,dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2A} + \frac{1}{2}\int_A^\infty \frac{dx}{x^2} + \frac{|t|}{4}\,\frac{1}{A^2} + \frac{t^2}{4}\int_A^\infty \frac{dx}{x^2} + \frac{|t|}{2}\int_A^\infty \frac{dx}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{2A} + \frac{1}{2A} + \frac{|t|}{4}\,\frac{1}{A^2} + \frac{t^2}{4}\,\frac{1}{A} + \frac{|t|}{4}\,\frac{1}{A^2}$$

takže vidíme, že pre t z ohraničenej množiny t.j. ak $|t| \le K < +\infty$, je odhad $\left|\int_A^\infty (\;)\right|$ rovnomerný do nuly konvergujúci pri $A \to +\infty$. T.j. $K(t)$ konverguje rovnomerne v každej ohraničenej množine.