# Goursatova Veta

<u>Veta</u>: Nech $R \subset \mathbb{C}$ je obdĺžnik (uzavretý) a nech $U \subset \mathbb{C}$ je niektoré otvorené okolie (súvislá množina) $R$. Nech $f: U \to \mathbb{C}$ má deriváciu v $U$. Potom

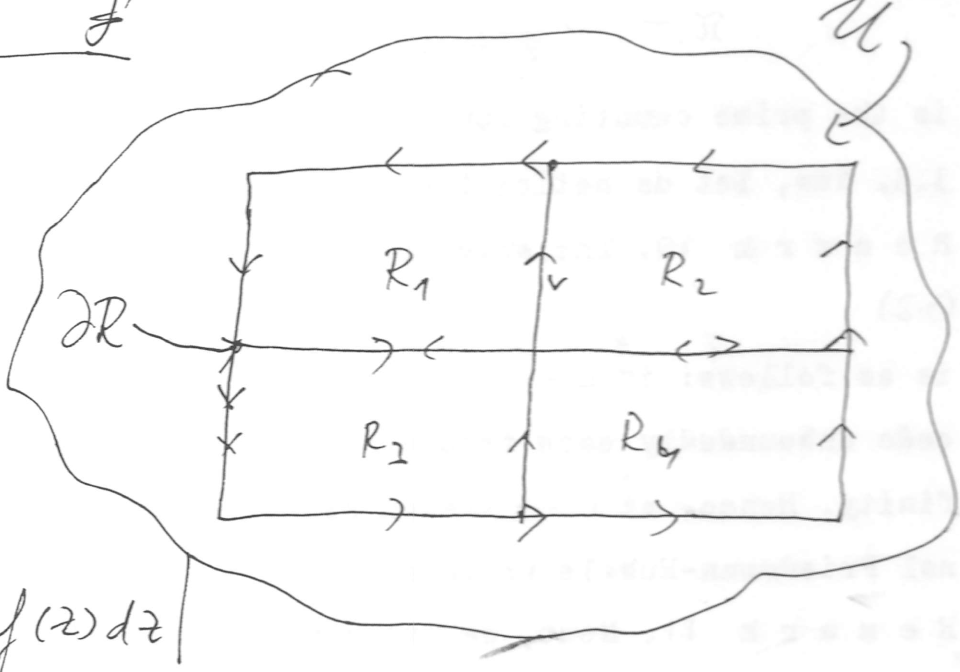
$$\boxed{\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0.}$$

<u>Dôsledok</u>: $f$ je analytická v $U$.

↓

Dôkaz: Platnosť vety je $\oint f(z)\,dz = 0$ pre každú hladkú krivky v $U$.

<u>Dôkaz vety</u>:




Nech

$$F(R) = \left| \int_{\partial R} f(z)\,dz \right|$$

Cieľom je ukázať, že $F(R) = 0$.

Rozdelíme $R$ na 4 obdĺžniky a to stredovým rezom horizontálne a aj vertikálne na

$$R_1, R_2, R_3, R_4.$$

Z nerovnosti

$$|a+b-c| + |a+b+c| \geq |a+b|$$

máme:

$$F(R) \leq F(R_1) + F(R_2) + F(R_3) + F(R_4)$$

Ďalej: na pravej strane $\exists$ aspoň jeden sčítanec $\geq \frac{1}{4} F(R)$, označme ho

$$\boxed{F(R_1)} \ \dots \ \frac{1}{4} F(R) \leq F(R_1)$$

Tento proces opakujeme iteratívne a dostávame systém do seba vložených obdĺžnikov

$$\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$$

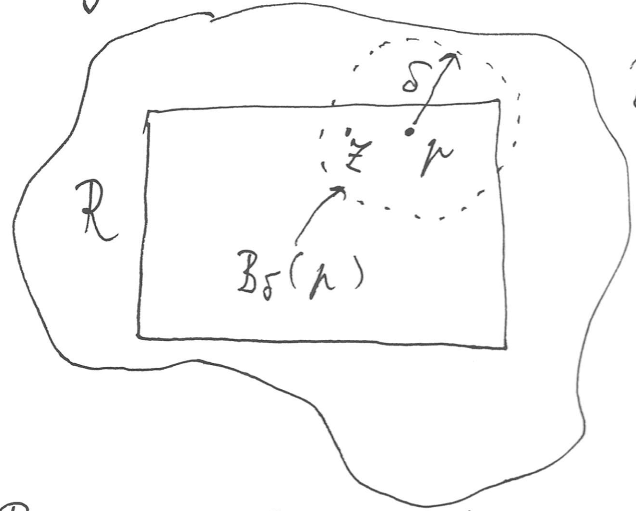
že $\quad F(R_j) \geq \frac{1}{4^j} F(R)$

Ďalej $\{R_j\}$ sú uzavreté do seba vložené množiny $\Rightarrow \exists$ neprázdny $\bigcap_j \{R_j\}$.

Nech $r_j$ je stred obdĺžnika $R_j$. Nech

$p$ je hromadný bod postupnosti $\{p_j\}$.

Zrejme $p \in R \subset \mathcal{U} \Rightarrow \exists\, f'(p)$.




$\mathcal{U}$ Nech teraz $\delta > 0$ je také, že $B_\delta(p) \subset \mathcal{U}$

Pre $\varepsilon > 0$ vyberieme tie $\delta$ že:

(i) $B_\delta(p) \subset \mathcal{U}$

(ii) $z \in B_\delta(p) \Rightarrow \left| \dfrac{f(z) - f(p)}{z - p} - f'(p) \right| < \varepsilon$

a teda: $|f(z) - f(p) - (z-p) f'(p)| \leq \varepsilon\, |z - p|$

Nech teraz $j \geq j_0 \in \mathbb{N}$: $R_{j_0} \subset B_\delta(p)$

Ďalej vieme, že (priamy výpočet)

- $\displaystyle\int_{\partial R_j} 1\, dz = 0$
- $\displaystyle\int_{\partial R_j} z\, dz = 0$

A teda:

$f(p)\int 1\,dz = 0$

$$\left|\int_{\partial R_j} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial R_j} \big(f(z) - f(p) - (z-p)\, f'(p)\big)\,dz\right| \le$$

$\int z\,dz = 0$

$$\le \int_{\partial R_j} |f(z) - f(p) - (z-p)\, f'(p)|\,|dz| \le$$

$$\le \varepsilon \int_{\partial R_j} |z-p|\,|dz| \le \varepsilon \cdot \mathrm{Diam}(R_j)\cdot |\partial R_j|$$

Teda máme:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ F(R_j) \le \varepsilon \cdot \mathrm{Diam}(R_j)\cdot |\partial R_j| \\ &\bullet\ F(R) \le 4^j F(R_j) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$F(R) \le 4^j \cdot \varepsilon\, \mathrm{Diam}(R_j)\, |\partial R_j|$$

ale $\left\langle \begin{aligned} \mathrm{Diam}(R_j) &\le \frac{K_1}{2^j} \\ |\partial R_j| &\le \frac{K_2}{2^j} \end{aligned}\right.$ ; $K_{1,2}$ jsou konstanty

takže: $\underline{F(R)} \le 4^j \varepsilon \cdot \frac{K_1}{2^j}\,\frac{K_2}{2^j} = \underline{\varepsilon \cdot K_1 \cdot K_2}$ //