O definícii Eulerovej Gamma funkcie

Eulerova Gamma funkcia reálnej premennej sa definuje pomocou nevlastného parametrického integrálu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t, \tag{1}$$

pričom táto formula platí pre každé kladné x. Je bežné, že po tejto definícii sa dokážu nasledovné vlastnosti Gamma funkcie

(i) Γ je spojitá spolu so svojou deriváciou v každej kladnej hodnote svojho argumentu

(ii)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

(iii)

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$$

(iv)

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Cieľom je ukázať, že ak nejaká funkcia, povedzme Φ spĺňa vlastnosti (i)-(iv) tak to nutne je práve Gamma funkcia. Takže predpokladáme, že Φ má vlastnosti

(i) Φ je spojitá spolu so svojou deriváciou v každej kladnej hodnote svojho argumentu

(ii)

$$\Phi(x+1) = x\Phi(x)$$

(iii)

$$\Phi(x)\Phi\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Phi(2x)$$

(iv)

$$\Phi(x)\Phi(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Tvrdenie je, že potom $\Phi = \Gamma$.

V prvom rade sa ubezpečíme o tom, že z podmienok (ii), (iii) a (iv) nemožno žiadnu vypustiť. Naozaj, ak by sme žiadali okrem (i) už len (ii) a (iii), potom okrem Γ aj funkcia

$$\Phi_\mu(x) = \Gamma(x)\left(4\sin^2(\pi x)\right)^\mu, \quad \mu > 0$$

vyhovuje. Pokiaľ by sme žiadali okrem (i) už len (iii) a (iv), tak okrem Γ aj funkcia

$$\Phi_\mu(x) = \Gamma(x)\mu^{x-\frac{1}{2}}, \quad \mu > 0$$

vyhovuje. K podmienke (i) sa vyjadríme neskôr.

Začneme tak, že si úlohu trošku "sťažíme". Namiesto podmienky (iv) vezmeme len jej dôsledok

(iv*)

$$\Phi(x) \neq 0, \quad \forall\, x > 0$$

Predpokladajme, že teda

$$\Phi(x) = M(x)\Gamma(x).$$

Podmienky (i) a (iv*) nám hovoria, že aj funkcia M je spojitá aj so svojou deriváciou a je rôzna od nuly. Ak ďalej použijeme podmienky (ii) a (iii) dostaneme pre M vzťahy

$$M(x+1) = M(x) \tag{2}$$

(M je periodicka) a

$$M(x)M\left(x + \frac{1}{2}\right) = M(2x). \tag{3}$$

Vzťah (2) spolu so spojitosťou M na $(0, \infty)$ dáva, že existuje konečné číslo rôzne od nuly

$$\lim_{x \to 0^+} M(x) \equiv M(0),$$

takže M je spojitá v $[0, \infty)$. Použijeme ďalej vzťah (3) v bode $x = 1/2$ spolu s tým, že M je nenulová v $[0, \infty)$. To dá

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \tag{4}$$

Takže usudzujeme, že M je **kladná** v $[0, \infty)$. To nás oprávňuje zaviesť funkciu L definovanú na $[0, \infty)$ vzťahom

$$L(x) = \ln[M(x)).$$

Táto je spojitá spolu so svojou prvou deriváciou na $[0, \infty)$ a vyhovuje podmienkam

$$L(x+1) = L(x) \tag{5}$$

a

$$L(x) + L\left(x + \frac{1}{2}\right) = L(2x). \tag{6}$$

Zavedieme (spojitú na $[0, \infty)$) funkciu

$$\Delta(x) = L'(x).$$

Ako dôsledok vzťahov (5),(6) máme, že Δ vyhovuje vzťahom

$$\Delta(x+1) = \Delta(x) \tag{7}$$

a

$$\Delta(x) + \Delta\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\Delta(2x). \tag{8}$$

Ak vo vzťahu (8) zameníme x za $x/2$ tak dostaneme, že

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta\left(\frac{x}{2}\right) + \Delta\left(\frac{x+1}{2}\right)\right\} = \Delta(x).$$

Teraz v poslednej rovnici nahradíme najprv x za $x/2$ a potom za $(x+1)/2$ čím prídeme ku dvom vzťahom

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta\left(\frac{x}{4}\right) + \Delta\left(\frac{x+2}{4}\right)\right\} = \Delta\left(\frac{x}{2}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left\{\Delta\left(\frac{x+1}{4}\right) + \Delta\left(\frac{x+3}{4}\right)\right\} = \Delta\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Poslené dva vzťahy sčítame a využijeme (na pravej strane) zase (8) a máme

$$\frac{1}{4}\left\{\Delta\left(\frac{x}{4}\right) + \Delta\left(\frac{x+1}{4}\right) + \Delta\left(\frac{x+2}{4}\right) + \Delta\left(\frac{x+3}{4}\right)\right\} = \Delta(x).$$

Takto prídeme k tomu, že opakovaní predchádzajúceho možno matematickou indukciou dokázať formulu

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\Delta\left(\frac{x+k}{2^n}\right)=\Delta(x). \tag{9}$$

Vzhľadom na periodičnosť Δ (vzťah (7)) je pre ľubovoľné $x \geq 0$ ľavá strana formule (9) práve integrálna suma pre integrál

$$\int_0^1 \Delta(x)\mathrm{d}x.$$

Preto s využitím periodičnosti funkcie L máme

$$\Delta(a)=\int_0^1 \Delta(x)\mathrm{d}x = L(1)-L(0)=0.$$

Takže $L = const$ a teda aj $M = const$. Vzťah (4) túto konštantu špecifikuje, menovite: $M(x) = 1$. **QED**.

Vráťme sa ešte k otázke, či nemožno z našich úvah vypustiť predpoklad o tom, že funkcia Φ má spojitú prvú deriváciu. Že to nejde ukazuje nasledovný príklad. Vezmeme za L funkciu $\mathcal{L}$, ktorá bude spojitá bude vyhovovať podmienkam (5) a (6), ale nebude mať spojitú deriváciu. Konkrétne

$$\mathcal{L}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\left(2^n\pi x\right).$$

Rad definujúci $\mathcal{L}$ konverguje podľa Weierstassovho kritéria rovnomerne v $\mathbb{R}$ a preto takto vzatá L je spojitá v $[0,\infty)$ ako nám je treba. Naviac zrejme vyhovuje obom vlastnostiam (5) a (6). Ovšem $\mathcal{L}(0) = 0$ ale $\mathcal{L}(1/4) = 1/2 \neq 0$ a teda takáto $\mathcal{L}$ nie je konštantná.