demidovich 3878

nech $F(x,\lambda,\alpha) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t \cos\alpha} \cos(\lambda t \sin\alpha)\,dt$

potom v $\begin{cases} x > 0 \\ \lambda > 0 \\ |\alpha| < \pi/2 \end{cases}$ | mám loc. W. odhad $\Rightarrow$ spojitosť F

rovnako pre F'_α máme loc. W. odhad a preto

$$\underline{F'_\alpha} = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha} \{\lambda t \sin\alpha \cos(\lambda t \sin\alpha) - $$
$$- \sin(\lambda t \sin\alpha)\,\lambda t \cos\alpha\}\,dt =$$
$$= -\int_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha}\, \lambda t \sin(\lambda t\sin\alpha - \alpha)\,dt =$$
$$= \underline{-\lambda \int_0^\infty t^{x} e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t\sin\alpha - \alpha)\,dt}$$

rovnako urobíme pre f-ciu:

$$G(x,\lambda,\alpha) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t \sin\alpha)\,dt$$

s výsledkom:

$$G'_\alpha(x,\lambda,\alpha) =$$
$$= \lambda \int_0^\infty t^{x} e^{-\lambda t\cos\alpha} \cos(\lambda t\sin\alpha - \alpha)\,dt$$

Teraz si vypočítame v F'_α raz PP tak, že:

$$F'_\alpha = -\lambda \int_0^\infty t^x e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t \sin\alpha - \alpha)\, dt \overset{p.p.}{=}$$

$$= -\lambda \Big[-t^x \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t\sin\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} x \cdot \int t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t\sin\alpha)\, dt \Big]_0^\infty =$$

$$= -x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t\sin\alpha)\, dt =$$

$$= -x\, G$$

a rovnako vyjde aj, že $G'_\alpha = x F$

takže máme systém

$$\boxed{\begin{aligned} F'_\alpha &= -xG \\ G'_\alpha &= xF \end{aligned}} \Rightarrow \begin{cases} F = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x \\ G = -A\cos\alpha x + B\sin\alpha x \end{cases}$$

teraz $F\big|_{\alpha=0} = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t}\, dt = \big| \lambda \cdot t = u \big|$

$$= \frac{1}{\lambda^x} \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$$

a $G\big|_{\alpha=0} = 0$

Takže zistíme koeficienty A a B:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \\ A &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x \\ G &= \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x \end{aligned}}$$