vypočítajme

$$G(n,k)=\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}\mathrm{d}x.$$

zrejme je

$$D_G=\{n>0,\ |k|<1\}.$$

po substitúcii

$$\tan\frac{x}{2}=t$$

dostaneme

$$G(n,k)=\int_0^\infty \frac{2}{1+t^2}\frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{n-1}}{\left(1+k\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^n}\mathrm{d}t=2^n\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(1+k+(1-k)t^2)^n}\mathrm{d}t.$$

ďalej

$$t=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}v$$

a máme

$$G(n,k)=2^n\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{(n-1)/2}(1+k)^{-n}\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\int_0^\infty \frac{v^{n-1}}{(1+v^2)^n}\mathrm{d}v,$$

alebo po úprave

$$G(n,k)=\frac{2^n}{(1-k^2)^{n/2}}\int_0^\infty \frac{v^{n-1}}{(1+v^2)^n}\mathrm{d}v.$$

posledný integrál upravíme na beta funkciu substitúciou

$$\frac{1}{1+v^2}=z$$

dostaneme

$$G(n,k)=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}}\int_0^1 (1-z)^{n/2-1}z^{n/2-1}=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}}B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right),$$

alebo pomocou gamma-funkcie

$$\boxed{G(n,k)=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}}.$$

úloha: nájdite asymptotiku G pre $n\to\infty$ (v závislosti na k).