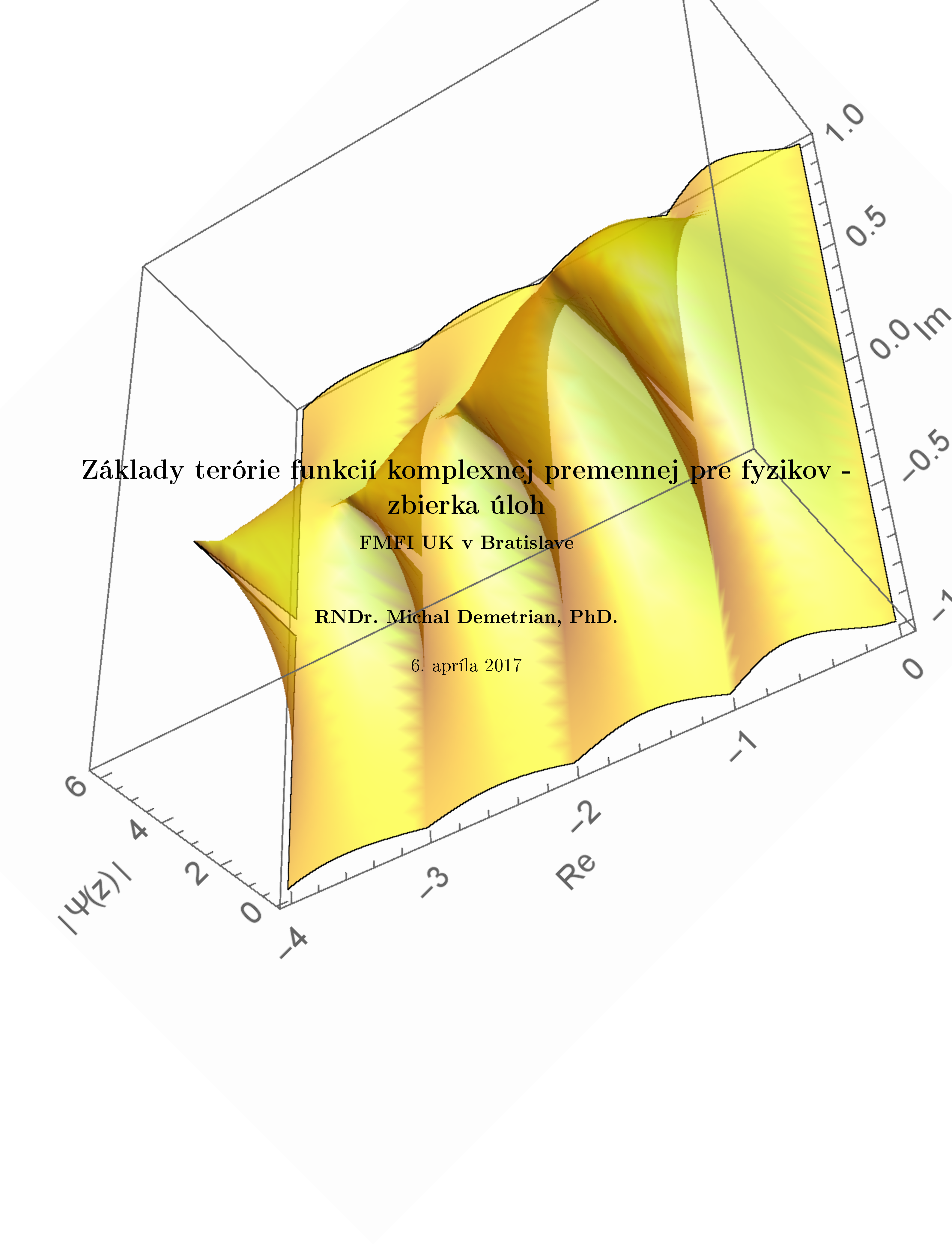
Základy terórie funkcií komplexnej premennej pre fyzikov - zbierka úloh

FMFI UK v Bratislave

RNDr. Michal Demetrian, PhD.

6. apríla 2017



©RNDr. Michal Demetrian, PhD.

Názov: Základy terórie funkcií komplexnej premennej pre fyzikov - zbierka úloh

Vydavateľ: Knižničné a edičné centrum FMFI UK

Rok vydania: 2017

Miesto vydania: Bratislava

Vydanie prvé

Počet strán: 33

Internetová adresa: http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/ demetrian/lect/mozer2/other/complex.pdf

ISBN **978-80-8147-077-6**

Obsah

Predhovor

Tento text vznikol na základe cvičení, ktoré som viedol ku komplexnej analýze a ako doplnok k mojim skriptám z teórie funkcií komplexnej premennej, [1]. Text si kladie za úlohu systematicky pokryť praktickými príkladmi teóriu funkcií komplexnej premennej v rozsahu, v ktorom sa prednáša študentom bakalárskeho študijného programu Fyzika. Veľké množstvo príkladov pochádza, prípadne po istých úpravách, z výberu výbornej zbierky úloh [2], ktorá je však štylizovaná na oveľa rozsiahlejší a pokročilejší kurz teórie funkcií komplexnej premennej.

V Bratislave, Február 2017

Kapitola 1

Komplexné čísla, komplexné funkcie reálnej premennej

1.1 Nájdite reálnu a imaginárnu časť nasledujúcich komplexných čísel:

$$a)\ (1-2i)^3 \qquad b)\ \frac{i}{1+i} \qquad c)\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 \qquad d)\ \frac{i^5+2}{(i^3+2i-1)^2}$$

1.2 Nájdite veľkosť (modul) a argument nasledujúcich komplexných čísel:

$$a)\ 1-i \qquad b)\ (1+i)^3 \qquad c)\ \frac{1+i}{1-i} \qquad d)\ 1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

1.3 Zapíšte v exponenciálnom a goniometrickom tvare:

$$a)\ \sqrt{3}+i \qquad b)\ \sqrt{3}-i \qquad c)\ 2i \qquad d)\ -3i \qquad e)\ 8-i\pi$$

1.4 Zapíšte v algebraickom tvare:

$$a)\ 3e^{i\pi}i \qquad b)\ 2e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad c)\ \sqrt{3}e^{-\frac{3}{8}\pi} \qquad d)\ \sqrt{11}e^{-i\frac{\pi}{6}} \qquad e)\ \frac{i}{i+1}$$

1.5 Ak je dané komplexné číslo z ako bod Gaussovej roviny, tak skonštruujte geometricky čísla

$$a)\ 3z \qquad b)\ iz \qquad c)\ (1+i)z \qquad d)\ \frac{z}{i+1} \qquad e)\ z^2$$

1.6 Nájdite ($z \in \mathbb{C}$):

$$a)\ \operatorname{Re}\left(\frac{z}{1+z^2}\right) \qquad b)\ \operatorname{Im}\left(\frac{z}{1+z^2}\right)$$

$$c)\ \operatorname{Re}\left(\frac{z^2}{z-i}\right) \qquad b)\ \operatorname{Im}\left(\frac{z^2}{z-i}\right)$$

1.7 Preverte tvrdenia ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$a)\ |z+w|^2 = |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}\{z\bar{w}\} \qquad b)\ |z+w|^2+|z-w|^2 = 2|z|^2+2|w|^2$$

1.8 Aký je geometrický význam nasledovných vzťahov?

$a)\ \lvert z-z_0\rvert < R$	$b)\lvert z-z_0\rvert > R$	$c)\ \lvert z-z_0\rvert = R$
$d)\ \lvert z-2\rvert+\lvert z+2\rvert = 5$	$e)\ \lvert z-2\rvert-\lvert z+2\rvert > 3$	$f)\ \lvert z-z_1\rvert = \lvert z-z_2\rvert$
$g)\ \operatorname{Re}(z) = c$	$h)\ \operatorname{Im}(z) = c$	$i)\ 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$
$j)\ \alpha < \arg(z) < \beta$	$k)\ \alpha < \arg(z-z_0) < \beta$	$l)\ \lvert z\rvert = \operatorname{Re}(z)+1$
$m)\ \operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z) < 1$	$n)\ \operatorname{Im}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = 0$	$o)\ \operatorname{Re}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = 0$

1.9 Zapíšte uvedené polynómy ako funkcie komplexných premenných z a $\bar{z}$ $(z = x + iy)$

a) $x - y^2 + i(y^2 + x)$ *b)* $(x^2 y - y^2 x) + 2ixy$

c) $x^2 - y^2 + 2ixy$ *d)* $x^3 - 3xy^2 + i(-3x^2 y + y^3)$

1.10 Nájdite systémy kriviek v Gaussovej rovine, ktoré sú dané rovnicami:

a) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = c, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = c, \quad c \in \mathbb{R}$ *b)* $\mathrm{Re}(z^2) = c, \quad \mathrm{Im}(z^2) = c, \quad c \in \mathbb{R}$

c) $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda, \quad \lambda > 0$

1.11 Zobrazte v Gaussovej rovine množiny bodov, ktoré spĺňajú nasledovné nerovnice:

a) $2 < |z - 1 + 2i| < 4$ *b)* $|z - 1| + |z - 3| < 3$ *c)* $1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 5$ *d)* $0 < \mathrm{Im}(z) < 1$

1.12 Nech $T \subset \mathbb{C}$ je úsečka s vrcholmi v bodoch $0, 1 + i$. Nájdite obraz T pri zobrazeniach

a) $z \mapsto iz$ *b)* $z \mapsto (1 + i)z$ *c)* $z \mapsto z^2$ *d)* $z \mapsto z^3$ *e)* $z \mapsto z^4$

1.13 Nech $R \subset \mathbb{C}$ je štvorec s vrcholmi v bodoch $0, 1, i, 1 + i$. Nájdite obraz tohto štvorca pri zobrazeniach

a) $z \mapsto iz$ *b)* $z \mapsto z^2$ *c)* $z \mapsto z^3$ *d)* $z \mapsto z^4$

1.14 Nech $P \subset \mathbb{C}$ je oblúk paraboly $t + i(1 - t^2), \ t \in [0, 1]$. Nájdite obraz P pri zobrazeniach

a) $z \mapsto iz$ *b)* $z \mapsto z^2$ *c)* $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ *d)* $z \mapsto z + iz$

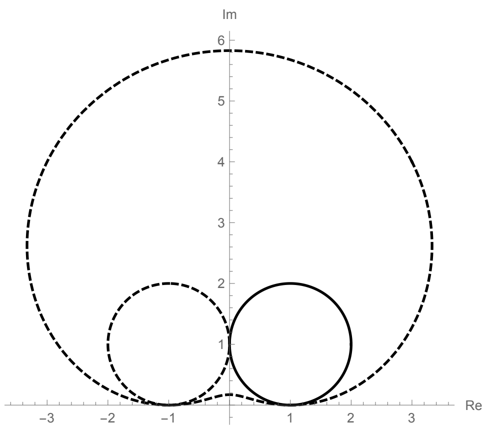
1.15 Nech $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$ je oblúk paraboly $z = t + it^2, \ t \in [-1, 1]$. Nájdite (ak existuje)

$$\max_{z \in \mathcal{P}} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\}, \ \max_{z \in \mathcal{P}} \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{z}\right\}.$$

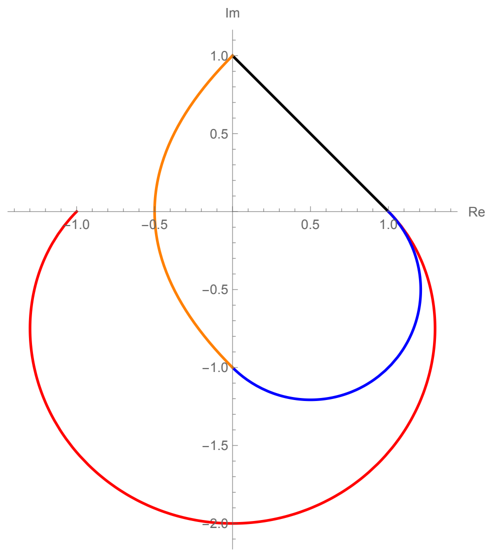
1.16 $K \subset \mathbb{C}$ je kružnica $1 + \cos t + i(1 + \sin t), \ t \in [0, 2\pi]$. Uvažujte zobrazenia

a) $z \mapsto 3z$ *b)* $z \mapsto z^2$ *c)* $z \mapsto iz$ *d)* $z \mapsto z^3$ $z \mapsto \bar{z}$

Ktoré z nich zodpovedajú čiarkovaným krivkám na obr. 1.1?



Obr. 1.1: Kružnica K (plná čiara) a jej 2 obrazy



Obr. 1.2: Úsečka U (čierna čiara) a jej 3 obrazy

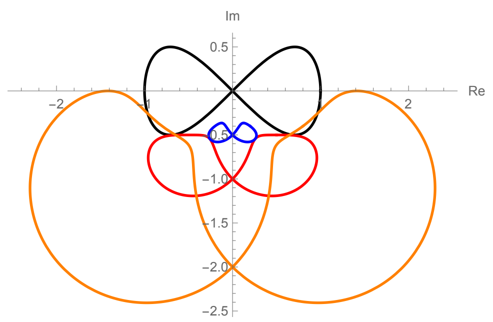
1.17 $U \subset \mathbb{C}$ je úsečka $t + i(1-t),\ t \in [0,1]$. Uvažujte zobrazenia

$$a)\ z \mapsto iz^2 \qquad b)\ z \mapsto \frac{1}{z} \qquad c)\ z \mapsto \frac{1}{z^2}$$

Ktoré z nich zodpovedajú ktorej čiare na obr. 1.2?

1.18 Čierna krivka (Gerono's lemniscate) je zobrazená pomocou 3 zobrazení (viď obr. 1.3). Ktoré je ktoré?

$$a)\ z \mapsto \frac{1}{i/2+z} \qquad b)\ z \mapsto \frac{1}{i+z} \qquad c)\ z \mapsto \frac{1}{2i+z}$$



Obr. 1.3: Geronova lemniskáta (čierna čiara) a jej 3 obrazy

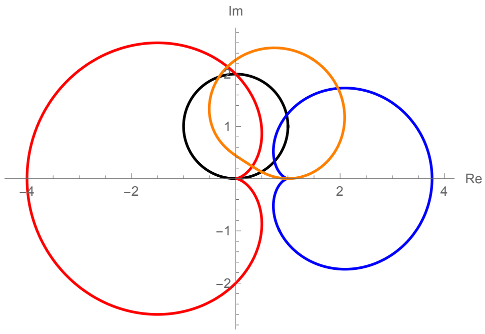
1.19 Čierna krivka – kružnica $\cos t + i(1+\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$ je zobrazená pomocou zobrazenia

$$z \mapsto \cos z.$$

Ktorá čiara zodpovedá obrazu na obr. 1.4?

1.20 Nech z_1, z_2, z_3 sú tri dané komplexné čísla. Aký útvar je daný rovnosťou:

$$\det\begin{pmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{pmatrix} = 0?$$



Obr. 1.4: Kružnica $\cos t + i(1+\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$ – jeden z jej obrazov zodpovedá zobrazeniu $z \mapsto \cos z$, ktorý?

1.21 Nájdite (vyjadrite) nasledovné súčty pomocou Eulerových vzťahov:

a) $1+\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos(nx)$ *b*) $\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin(nx)$

c) $\cos(x)+\cos(3x)+\cdots+\cos[(2n-1)x]$ *d*) $\sin(x)+\sin(3x)+\cdots+\sin[(2n-1)x]$

e) $\sin(x)-\sin(2x)\pm\cdots+(-1)^{n-1}\sin(nx)$ *f*) $\cos(\alpha)+\cos(\alpha+\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)$

g) $\sin(\alpha)+\sin(\alpha+\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)$

1.22 Vyriešte binomické rovnice:

a) $z^2=1$ *b*) $z^3=1$ *c*) $z^4=1$ *d*) $z^5=1$ *e*) $z^2=i$

f) $z^3=-i$ *g*) $z^4=i$ *h*) $z^5=-i$ *i*) $z^2=1+i$ *j*) $z^3=1-i$

k) $z^5=1-i$

1.23 Vyriešte kvadratické rovnice:

a) $z^2+iz=0$ *b*) $z^2+3z+1=0$ *c*) $z^2+z+i=0$

d) $iz^2-3z-i=0$ *e*) $z^2+(1+i)z+1-i=0$ *f*) $z^2-2iz+1=0$

g) $z+\dfrac{i}{z}=0$ *h*) $(z-2i)(z+2)=i$ *i*)$z^4+iz^2+1=0$ *j*) $z^6+z^3+i=0$

1.24 Vyriešte rovnicu

$$z^3+z-2=0.$$

1.25 Vyriešte rovnicu

$$z^3-5z^2+8z-6=0.$$

1.26 Vyriešte rovnicu

$$z^3-z-2i=0.$$

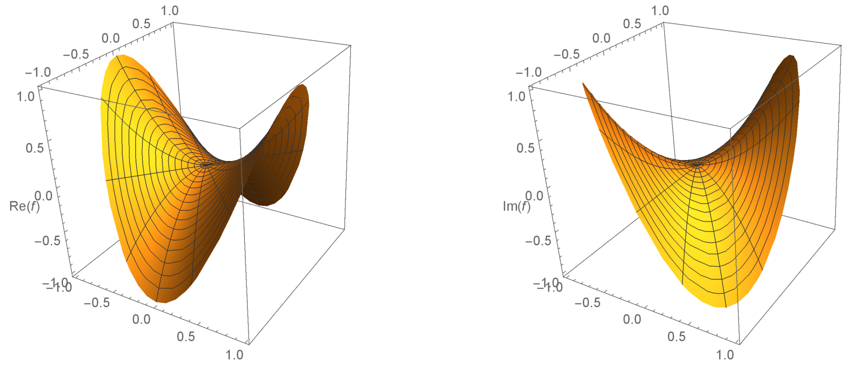
1.27 Porovnajte strednú hodnotu funkcie

$$z \mapsto z^2$$

vo vrcholoch štvorca $0, 1, 1+i, i$ a hodnotu tejto funkcie v strede tohto štvorca. Urobte to isté pre vrcholy trojuholníka $0, 1+i, -1+i$ (stredom bude ťažisko).

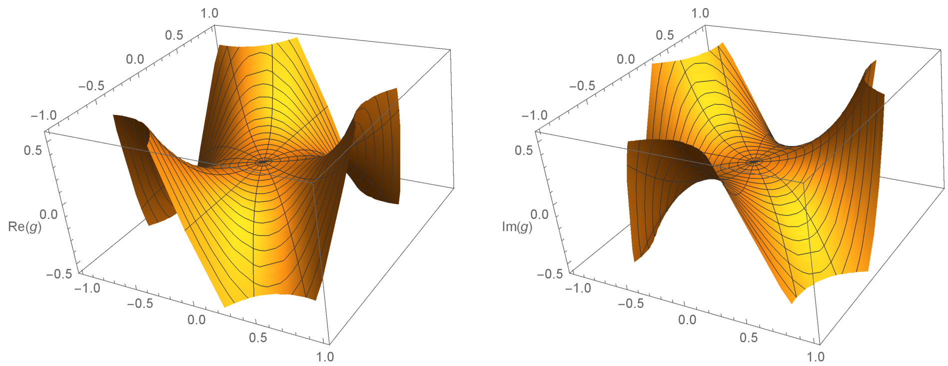
1.28 Nech $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}:\ f(z)=z^2$. Nájdite čísla

$$\max_{|z|\le 1}\mathrm{Re}\{f(z)\},\ \min_{|z|\le 1}\mathrm{Re}\{f(z)\},\ \max_{|z|\le 1}\mathrm{Im}\{f(z)\},\ \min_{|z|\le 1}\mathrm{Im}\{f(z)\}.$$



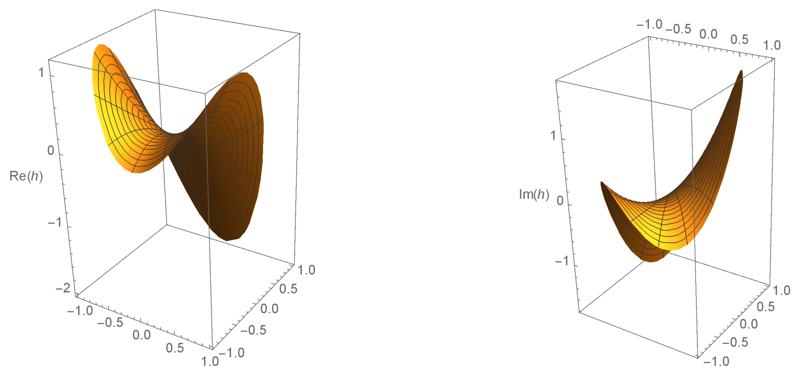
1.29 Nech $g:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}:\ f(z) = z^3$. Nájdite čísla

$$\max_{|z|\le 1} \operatorname{Re}\{g(z)\},\ \min_{|z|\le 1} \operatorname{Re}\{g(z)\},\ \max_{|z|\le 1} \operatorname{Im}\{g(z)\},\ \min_{|z|\le 1} \operatorname{Im}\{g(z)\}.$$



1.30 Nech $h:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}:\ f(z) = iz + z^2$. Nájdite čísla

$$\max_{|z|\le 1} \operatorname{Re}\{h(z)\},\ \min_{|z|\le 1} \operatorname{Re}\{h(z)\},\ \max_{|z|\le 1} \operatorname{Im}\{h(z)\},\ \min_{|z|\le 1} \operatorname{Im}\{h(z)\}.$$

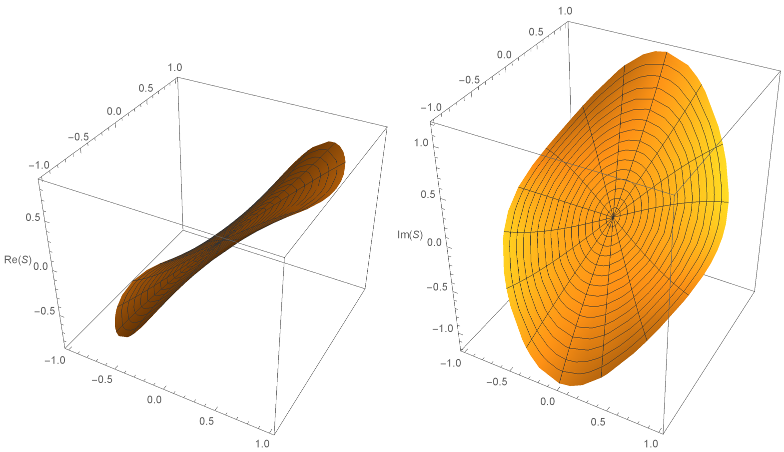


1.31 Nech $S:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}:\ f(z) = \sin z$. Nájdite čísla

$$\max_{|z|\le 1} \operatorname{Re}\{S(z)\},\ \min_{|z|\le 1} \operatorname{Re}\{S(z)\},\ \max_{|z|\le 1} \operatorname{Im}\{S(z)\},\ \min_{|z|\le 1} \operatorname{Im}\{S(z)\}.$$

1.32 Čo je obrazom množiny $|z| < 1/2$ pri zobrazení

$$z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)?$$



1.33 Nech $R > 0$, čo je obrazom množiny $|z| < R$ pri zobrazení

$$z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)?$$

Pre aké R sa dve uvažované množiny pretínajú? (Majú neprázdny prienik).

1.34 Nech $\Phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je dané predpisom (Cayley's transform)

$$\Phi(z) = i\frac{1-z}{1+z}.$$

Nech

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1\}, \ \mathcal{I}^+ = \{z \in \mathbb{C}: \ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Preverte, že Φ je bijekcia medzi $\mathcal{D}$ a $\mathcal{I}^+$.

1.35 Vypočítajte

a) $\displaystyle\int_0^1 (1-it)^2 \mathrm{d}t$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+it}$ *c)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+it)^2}$

d) $\displaystyle\int_0^\pi e^{it} \mathrm{d}t$ *e)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-it}{1+it}\mathrm{d}t$ *f)* $\displaystyle\int_0^\infty e^{(a-ib)t}\mathrm{d}t$

1.36 Konverguje integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+i}?$$

1.37 Konverguje integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t+i}?$$

1.38 Konverguje integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin t \mathrm{d}t}{t+i}?$$

1.39 Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je diferencovateľná a nenulová funkcia. Preverte formule:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f(t)| = |f(t)| \operatorname{Re} \frac{f'(t)}{f(t)}, \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\arg f(t)\} = \operatorname{Im} \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

1.40 Nech $f: ([a,b] \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia. Preverte nerovnosť:

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \geq \left|\int_a^b \operatorname{Im}\{f(t)\}\mathrm{d}t\right|.$$

1.41 Nájdite definičný obor funkcie $\Psi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ danej predpisom

$$\Psi(a,b) = \int_1^\infty e^{it^a} t^{-b} \mathrm{d}t.$$

1.42 Nech $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ je konečná oblasť, ktorej hranica je hladká uzavretá jednoduchá krivka daná parametricky

$$[a,b] \ni t \mapsto f(t).$$

Potom je plocha oblasti $\mathcal{D}$ daná formulou

$$|\mathcal{D}| = \frac{1}{2} \int_a^b |f(t)|^2 \operatorname{Im} \frac{f'(t)}{f(t)} \mathrm{d}t.$$

Kapitola 2

Postupnosti a rady komplexných čísel

2.1 Majú nasledovné postupnosti limity?

a) $z_n = 1 + (-1)^n i$ *b)* $z_n = \dfrac{6n^2 - 3n + 2}{2n^2 - 1} + \dfrac{2n-1}{3n} i$ *c)* $z_n = e^{in\varphi}$

d) $z_{n+1} = i z_n$ *e)* $z_n = \dfrac{1}{(i+\epsilon)^n},\ \epsilon \in \mathbb{R}$ *f)* $z_{n+1} = e^{iz_n}$

2.2 Nájdite limity postupností:

a) $z_n = \sqrt[n]{n} + i\dfrac{1}{n!}$ *b)* $z_n = \dfrac{2n - i}{in + 3}$ *c)* $z_n = \left(\dfrac{in^2 - 2n + i}{2n^2 + in - 1} - \dfrac{i}{n}\right)^2$ *d)* $z_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + i\right)\dfrac{in - 3}{n\sqrt{n} + 1}$

2.3 Je tento výrok pravdivý?

$$\left\{\lim_{n\to\infty} z_n = \infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0\right\}.$$

2.4 V závislosti od parametra $a \in \mathbb{C}$ preskúmajte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1 + a^n}.$$

2.5 Nech $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$ sú kladné reálne čísla a také, že

$$\sum_n \lambda_n = +\infty.$$

Nech ďalej $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ a nech

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} A \in \mathbb{C}.$$

Vypočítajte (ak existuje)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n z_n}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}.$$

2.6 Konvergujú alebo divergujú nasledujúce rady?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+i}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{z+i}{n^2+i}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{i^{2n-1}}{(1+in)^n}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (3+in)^{-n}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty e^{-n+i}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-i)^2}$ *g)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n+i}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(n+i)^2}$ *i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(n+i)^3}$ *j)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n}{n+i}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{z}{1+i}\right)^n$ *l)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1+z}{2-i}\right)^n$ *m)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{i^n}{n}$ *n)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{i^{3n}}{\sqrt{n}}$

2.7 Nájdite súčty radov:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{n!}\right] \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{i^{2n-1}}{2n-1}\right] \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i^n}{2^n}+\frac{i^{2n}}{n!}\right]$$

2.8 Dokážte:

I. Ak $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolútne konverguje, potom aj $\sum_{n=0}^{\infty} z_n^2$ absolútne konverguje.

II. Ak $\sum_{n=0}^{\infty} z_n^2$ absolútne konverguje, potom aj $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{n}$ absolútne konverguje.

2.9 Preskúmajte absolútnu konvergenciu radov:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^a z^n,\ (a\in\mathbb{R}) \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+z)\ln^2 n}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(n!)^3}\frac{z^n}{1+z^n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n$$

2.10 Nech $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je rastúca kladná neohraničená postupnosť a $x\in\mathbb{R}$. Nájdite obor konvergencie radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{\lambda_n}.$$

Kapitola 3

Potenčné rady

3.1 Nájdite polomery konvergencie potenčných radov:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{in}$ $b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(in+3)^n}$ $c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i^n}{n^2} z^n$ $d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^{2n-1}}{2n-1}$ $e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ $g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m}$ $h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ $i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \cosh(n) z^n$ $j)\ \sum_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$

$k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i-2)^n}{(i+2)^n} z^{3n}$ $l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{(i+n)^n}$ $m)\ \sum_{n=1}^{\infty} (i-3)^n z^{2n}$ $n)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{[3+i^n]^n}$ $o)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n^2}}{(1+i)^{n^2}} z^n$

$p)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{2n}$ $q)\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$

$r)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)! z^n}{n!(n+1)! \cdots (n+k-1)!}$

3.2 Nájdite potenčný rad, pre súčet $f(z)$ ktorého platí:

$$f'(z) = z f(z)\ .$$

Nájdite aj polomer konvergencie.

3.3 Nájdite potenčný rad, ktorého súčet:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}\ ,$$

vychádzajúc z rovnosti $(1-z)^2 f(z) = 1$.

3.4 Derivujte potenčné rady:

$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ $b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ $\sum_{n=2}^{\infty} (1_i)^n z^n$

a nájdite súčty radov derivácií.

3.5 Nájdite niektorý potenčný rad so stredom v bode 0 pre dané funkcie a zistite jeho polomer konvergencie:

$a)\ \frac{z}{1+z}$ $b)\ \frac{z}{(i+z^2)}$ $c)\ \frac{1}{(1+iz)^2}$ $d)\ \frac{iz^2}{3-2iz}$

3.6 Nájdite niektorý potenčný rad so zadaným stredom v bode z_0 pre dané funkcie a zistite jeho polomer konvergencie:

$a)\ \dfrac{z}{1+z}, z_0 = i$ $\quad b)\ \dfrac{z}{(i+z)^2},\ z_0 = -1$ $\quad c)\ \dfrac{1}{(1+iz)^2},\ z_0 = 1-i$ $\quad d)\ \dfrac{i}{4-iz},\ z_0 = -i$

$e)\ \dfrac{1}{z(z+i)},\ z_0 = i$ $\quad f)\ \dfrac{1}{z^2+(1+i)z+i},\ z_0 = 0$ $\quad g)\ \dfrac{1}{1+z^2},\ z_0 = 1+i$ $\quad h)\ \dfrac{1}{i-z^3},\ z_0 = 1$

3.7 Nech polomer konvergencie potenčného radu

$$\sum_n c_n z^n$$

je R. Nájdite polomery konvergencie potenčných radov ($m \in \mathbb{N}$):

$$\sum_n c_n^m z^n, \quad \sum_n c_n z^{nm}, \quad \sum_n \frac{c_n}{1+|c_n|} z^n.$$

3.8 Nájdite definičný obor D_Ψ funkcie

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

3.9 Nájdite definičný obor D_ξ funkcie

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{3/2}}.$$

3.10 Nájdite definičný obor D_Φ funkcie

$$\Phi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n \ln n}.$$

3.11 Nech funkcia $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je v istom okolí bodu 0 súčtom potenčného radu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n.$$

Nájdite čísla A_n, ak

$$f(z) = z + f(z^2).$$

Kapitola 4

Elementárne funkcie komplexnej premennej

4.1 Vypočítajte hodnoty:

$a)$ $\sin(1-3i)$	$b)$ $\cos(3i)$	$c)$ $\tanh\left(\ln(3)+\dfrac{\pi i}{6}\right)$	$d)$ $\sinh(-1+5i)$
$e)$ $\tanh\left(\ln(5)-\dfrac{\pi i}{4}\right)$	$f)$ $\mathrm{Ln}(1+7i)$	$g)$ $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$	$h)$ $(3+4i)^{i-2}$
$i)$ $\mathrm{Arcsin}(2)$	$j)$ $\mathrm{Arccos}(i)$	$k)$ $\mathrm{Argtanh}(1-i)$	$l)$ $\sqrt[3]{1}$
$m)$ $\sqrt[3]{2+i}$	$n)$ $\sqrt[5]{-2+2i}$	$o)$ $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$	$p)$ i^i
$q)$ 2^i	$r)$ $\mathrm{Ln}(i)$	$s)$ $\mathrm{Ln}\,\dfrac{i}{i+1}$	

4.2 Je množina komplexných čísel

$$\mathrm{Ln}(1+i)$$

ohraničená? Načrtnite ju. Aké má hromadné body?

4.3 Je množina komplexných čísel

$$\mathrm{Arcsin}(3i)$$

ohraničená? Načrtnite ju. Aké má hromadné body?

4.4 Je množina komplexných čísel

$$(1-i)^{1+i}$$

ohraničená? Načrtnite ju. Aké má hromadné body?

4.5 Riešte rovnicu: $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$.

4.6 Riešte rovnice:

$a)$ $\sin(z) = i$ $\quad b)$ $\cos(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad c)$ $\sinh(z) = -1$ $\quad d)$ $\cosh(z) = \dfrac{\pi}{2}i$ $\quad e)$ $e^{z^2} = 1$

4.7 Dokážte:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1\ .$$

4.8 Odvoďte "rozumné" súčtové vzorce pre:

$a)$ $\cosh(z_1 \pm z_2)$ $\quad b)$ $\sinh(z_1 \pm z_2)$ $\quad c)$ $\tanh(z_1 \pm z_2)$

4.9 Nájdite korene rovnice $\sin(z) = 2$, ktoré ležia v oblasti $|z| < 5$.

4.10 Nájdite:

$a)$ $\operatorname{Re}\left[e^{2z+3i}\right]$ $b)$ $\operatorname{Im}\left[e^{2z+3i}\right]$ $c)$ $\operatorname{Re}\left[\sin(iz-1)\right]$ $d)$ $\operatorname{Im}\left[\sin(iz-1)\right]$

4.11 Nájdite obor hodnôt funkcií:

$a)$ $\sin z$ $c)$ $\sin^2 z$ $d)$ e^{3z} $e)$ $\tan z$ $f)$ $\tan^2 z$ $g)$ $\dfrac{1}{\cos z}$

4.12 Nájdite množiny na ktorých dosahuje funkcia

$$z \mapsto e^z$$

reálne (imaginárne) hodnoty. Sú tieto množiny: ohraničené?; súvislé?

4.13 Nájdite množiny na ktorých dosahujú funkcie

$$z \mapsto \sin z,\ z \mapsto \cos z,\ z \mapsto \tan z,\ z \mapsto \sinh z,\ z \mapsto \cosh z$$

reálne (imaginárne) hodnoty. Sú tieto množiny: ohraničené?; súvislé?

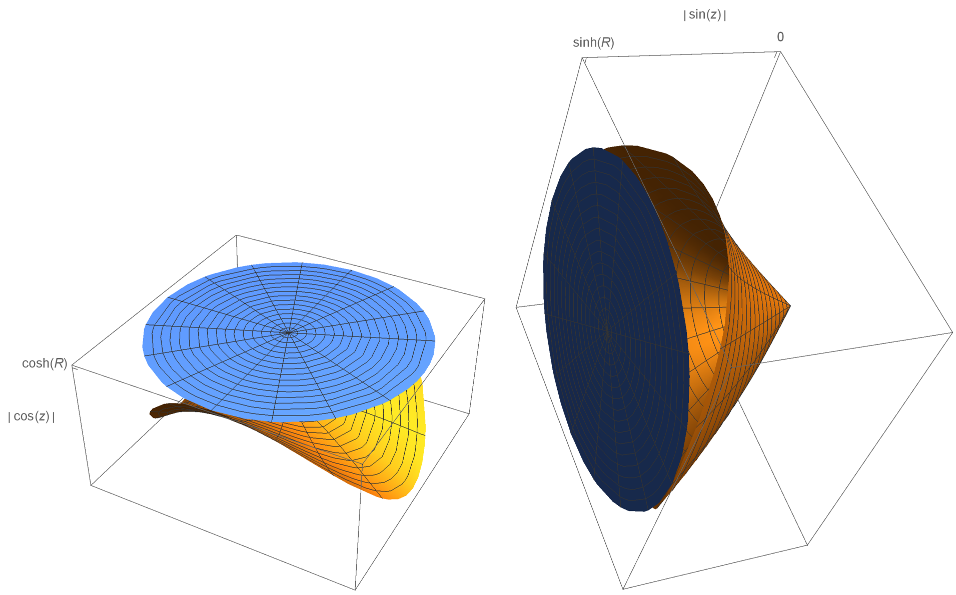
4.14 Nájdite nulové body funkcií

$$z \mapsto \sin z,\ z \mapsto \cos z,\ z \mapsto \tan z,\ z \mapsto \sinh z,\ z \mapsto \cosh z.$$

4.15 Preverte, že pre dané $R > 0$ na množine $|z| \leq R$ platia odhady:

$$|\cos z| \leq \cosh R,\ |\sin z| \leq \sinh R,\ |\cosh z| \leq \cosh R,\ |\sinh z| \leq \sinh R.$$

Motivačné grafy sú na obr. 4.1.



Obr. 4.1: Modul funkcií cos a sin v kruhoch centrovaných v bode $z = 0$

4.16 Nech $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$. Preverte tieto výroky:

- e^z konverguje do nekonečna pri $x \to +\infty$ a to rovnomerne vzhľadom na $y \in \mathbb{R}$;

- e^z konverguje do nuly pri $x \to -\infty$ a to rovnomerne vzhľadom na $y \in \mathbb{R}$;
- $\cos z$, $\sin z$ konvergujú do nekonečna pri $y \to \pm\infty$ a to rovnomerne vzhľadom na $x \in \mathbb{R}$;

4.17 V akých uhlových výsekoch z Gaussovej roviny (s vrcholom v bode 0) funkcia

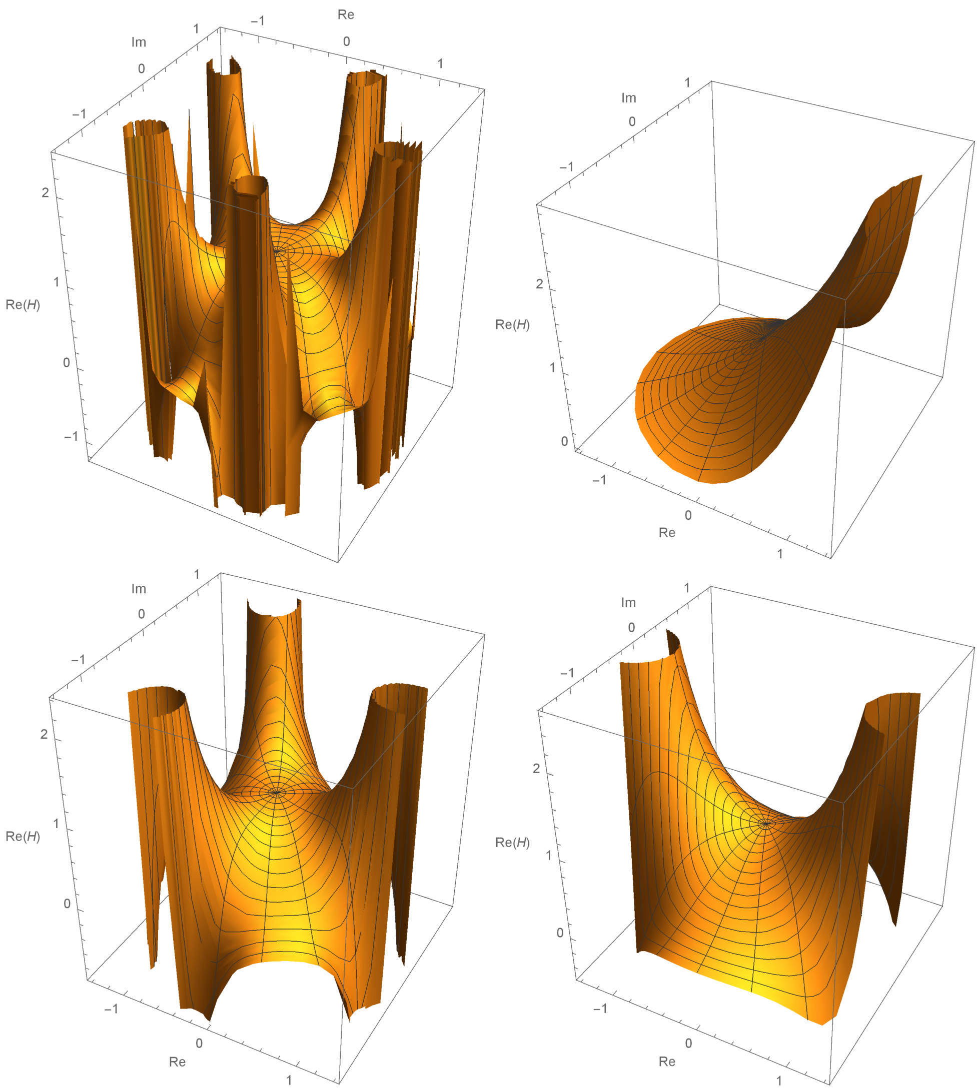
$$z \mapsto e^{z^2}$$

konverguje do nuly (nekonečna) pri $z \to \infty$?

4.18 Na obr. 4.2 sú grafy reálnej časti funkcie

$$|z| < 1.4: \;\; z \mapsto H(z) = e^{z^n}$$

pre niektoré prirodzené čísla n. Ktorý graf zodpovedá ktorému n?



Obr. 4.2: Reálna časť funkcie $H(z) = e^{z^n}$

4.19 Uvažujte postupnosť funkcií

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + z^n}.$$

Preskúmajte rovnomernú konvergenciu tejto postupnosti na množinách:

- každá uzavretá podmnožina otvoreného kruhu $|z| < 1$,
- každá uzavretá množina ležiaca v $|z| > 1$.

4.20 Uvažujte postupnosť funkcií

$$g_n(z) = nze^{-n^2z^2}.$$

Preskúmajte rovnomernú konvergenciu tejto postupnosti na množine

$$|\arg z| \le \alpha;\ 0 \le \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

4.21 Preverte na rovnomernú konvergenciu na podmnožinách kruhu $|z| \le 1$ postupnosť funkcií danú takto

$$h_0(z) = \frac{1}{2}z(z+1),\ h_{n+1}(z) = h_0[h_n(z)].$$

4.22 Preverte na rovnomernú konvergenciu daný funkcionálny rad na uvedenej množine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{-2n},\ |z| \ge 1.$$

4.23 Preverte na rovnomernú konvergenciu daný funkcionálny rad na uvedenej množine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{-2n},\ |z| \ge 1.$$

4.24 Preverte na rovnomernú konvergenciu daný funkcionálny rad na uvedenej množine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz},\ \operatorname{Re} z \ge \epsilon > 0.$$

4.25 Preverte na rovnomernú konvergenciu daný funkcionálny rad na uvedenej množine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z},\ \operatorname{Re} z \ge \delta > 1.$$

4.26 Preverte na rovnomernú konvergenciu daný funkcionálny rad na uvedenej množine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{2^n},\ |\operatorname{Im} z| \le \delta < \ln 2.$$

Kapitola 5

Derivácia funkcie komplexnej premennej

5.1 Tranformujte Cauchy-Riemannove rovnice do polárnych súradníc.

5.2 Cauchy-Riemannove podmienky sú splnené (preverte!) v bode 0 pre funkciu:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \\ \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & z = x+iy \neq 0 \end{cases}$$

a existuje

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

po každej priamke prechádzajúcej cez počiatok. Táto limita má hodnotu 0 pre každú takúto priamku. Napriek tomu $f'(0)$ neexistuje. Preverte!

5.3 Preverte či sú splnené Cauchy-Riemannove podmienky a nájdite derivácie nasledujúcich funkcií:

$a)\ w = z^2$ $\quad b)\ w = \cos(2z)$ $\quad c)\ w = e^{z^2}$ $\quad d)\ w = \sin\left(z^3\right)$ $\quad e)\ w = \dfrac{1}{z}$

$f)\ w = iz^3$ $\quad g)\ \sin[\sin z]$ $\quad h)\ \dfrac{1}{z^2}$ $\quad i)\ w = \dfrac{z}{i+z}$

5.4 Preverte na diferencovateľnosť funkciu $w = \bar{z} + z^2$.

5.5 Preverte na diferencovateľnosť funkciu $w = z\,\mathrm{Im}(z)$.

5.6 Preverte Cauchy-Riemannove podmienky pre funkciu

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

v bode $z = 0$. Je f diferencovateľná v bode $z = 0$?

5.7 Preverte na diferencovateľnosť funkcie $(z = x + iy)$:

$a)\ w = \mathrm{Re}\, z$ $\quad b)\ w = x^2y^2$ $\quad c)\ w = 2xy - i(x^2 - y^2)$ $\quad d)\ w = z\,\mathrm{Re}\, z$ $\quad e)\ w = z^2\,\mathrm{Im}\, z$

5.8 Nájdite derivácie funkcií všade kde existujú:

$a)\ w = \tan z$ $\quad b)\ w = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$ $\quad c)\ w = \dfrac{\cos z}{\cos z + \sin z}$ $\quad d)\ w = z \tan z$ $\quad e)\ w = \dfrac{z}{1 + z^2}$

5.9 Nech $f(z)$ je analytická v danej oblasti a nadobúda v nej len reálne (imaginárne) hodnoty. Potom $f(z) = const$. Dokážte!

5.10 Je funkcia

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto z\bar{z}$$

diferencovateľná?

5.11 Ak $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ je analytická v $\mathbb{C}$ (nerozšírená Gaussova rovina), tak Jacobiho determinant zobrazenia $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ je rovný $|f'(z)|^2$. Dokážte!

5.12 Ukážte, že pre funkciu $f(z)$ analytickú v oblasti Ω platí:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2 \, .$$

5.13 Nájdite analytickú funkciu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ak:

a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x, \quad f(i) = -1 + i$

b) $v(x,y) = -3x^2y + y^3 - 3x + y, \quad f(-1) = 3i$

c) $v(x,y) = -3x + x^2 - y^2 + 2xy, \quad f(2+1) = 2+1$

d) $u(x,y) = x^3 - 3y^2x + 2, \quad f(0) = 2 + i$

e) $v(x,y) = 2e^x \cos(y), \quad f(0) = 2 + 2i$

f) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}, \quad f(1) = 6 + i$

g) $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0$

h) $v(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0$

5.14 Nájdite všetky body komplexnej roviny v ktorých je koeficient lineárneho roztiahnutia zodpovedajúci zobrazeniu $z \mapsto f(z)$ rovný 1:

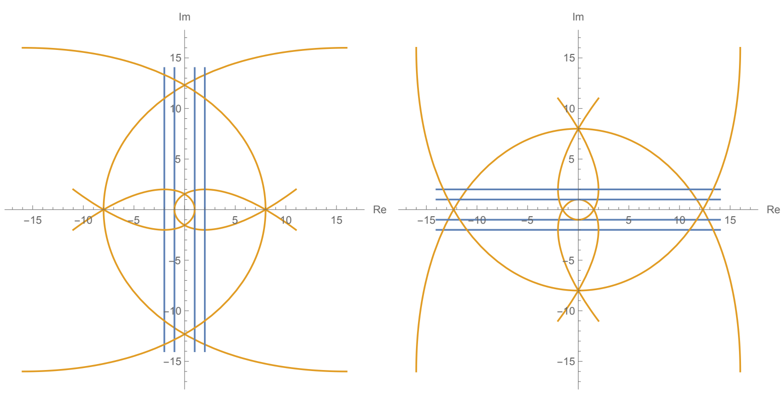
a) $f(z) = z$ *b*) $f(z) = z^2$ *c*) $f(z) = z^3$ *d*) $f(z) = z^2 - 2z$

e) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *f*) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ *g*) $f(z) = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ *h*) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \ ad - bc \neq 0$

5.15 Nájdite všetky body komplexnej roviny v ktorých je uhol lokálneho otočenia zodpovedajúci zobrazeniu $z \mapsto f(z)$ rovný 0:

a) $f(z) = z^2$ *b*) $f(z) = iz^2$ *c*) $f(z) = (1+i)z^3$ *d*) $f(z) = z^2 - 2z$

e) $f(z) = \dfrac{i}{z}$ *f*) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ *g*) $f(z) = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ *h*) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \ ad - bc \neq 0$



Obr. 5.1: Zobrazenie súradnicových čiar v Gaussovej rovine pomocou zobrazenia $z \mapsto z^3$

Kapitola 6

Krivkový integrál

6.1 Vypočítajte
$$\oint_{|z|=1} |z| \mathrm{d}z.$$

6.2 Vypočítajte
$$\oint_{R} z|z| \mathrm{d}z,$$
kde $R \subset \mathbb{C}$ je obvod štvorca s vrcholmi v bodoch $0, 1, 1+i, i$ (v tomto poradí).

6.3 Vypočítajte krivkový integrál $\int_\Gamma z\mathrm{d}z$ po ľubovoľnej (prípustnej) krivke Γ spájajúcej začiatočný bod a s koncovým bodom b, z definície!

6.4 Bez výpočítania integrálu nájdite odhad zhora jeho modulu:

$a)$ $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1}\mathrm{d}z$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} e^{1/z}\mathrm{d}z$

$c)$ $\displaystyle\int_{1+i}^{2+3i} \left(e^z + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z,$ po úsečke

6.5 Vypočítajte:

$a)$ $\displaystyle\int_\Gamma z^2\mathrm{d}z, \quad \Gamma: \ z = t + it^3, \ 0 \le t \le 1$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\int_\Gamma \bar{z}^2\mathrm{d}z, \quad \Gamma: \ z = t + i\frac{t}{3}, \ 0 \le t \le 3$

$c)$ $\displaystyle\int_\Gamma e^{-\bar{z}^2}\mathrm{d}z, \quad \Gamma: \ z = t + 2it, \ 0 \le t \le 1$ $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{|z|}\mathrm{d}z, \quad \Gamma: \ z = t + i(1-t), \ 0 \le t \le 1$

$e|$ $\displaystyle\int_\Gamma z\sin z\mathrm{d}z, \quad \Gamma: \ z = it, \ 0 \le t \le 1$ $\qquad$ $f)$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z^3}\mathrm{d}z, \quad \Gamma: \ |z| = R, \ R > 0$

$g)$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z, \quad \Gamma: \ |z| = R, \ R > 0$ $\qquad$ $h)$ $\displaystyle\int_\Gamma \bar{z}\mathrm{d}z, \quad \Gamma: \ 1 + it, \ 0 \le t \le 1$

6.6 Použitím výsledku z príkladu 6.3 ukážte, že $\oint_\Gamma z\mathrm{d}z = 0$, kde Γ je uzavretá (prípustná) krivka.

6.7 Vypočítajte $\int_{-i}^{i} |z|\mathrm{d}z$, a to:

$a)$ po úsečke $\qquad$ $b)$ po ľavom oblúku $|z| = 1$ $\qquad$ $c)$ po pravom oblúku $|z| = 1$

6.8 Vypočítajte $\int_{\pi i}^{1} e^z\mathrm{d}z$:

$a)$ po úsečke $\qquad$ $b)$ po lomenej čiare s vrcholmi: $\pi i, -\pi i, -\pi, \pi, \pi + \pi i, 1$

6.9 Vypočítajte

$$\oint_\gamma \frac{z}{8+z^2}\mathrm{d}z,$$

kde γ je obvod trojuholníka s vrcholmi $1, i, -i$ s ACW orientáciou.

6.10 Vypočítajte

$$\oint_\gamma \frac{\bar{z}}{8+z}\mathrm{d}z,$$

kde γ je obvod obdĺžnika s vrcholmi $\pm 3 \pm i$ s ACW orientáciou.

6.11 Bez výpočtu integrálu dokážte odhad zhora:

$$\left| \int_{-i}^{i} (x^2 + iy^2)\mathrm{d}z \right| \leq 2$$

ak integračná krivka je úsečka.

6.12 Vypočítajte integrál z príkladu 6.11 presne.

6.13 Nájdite strednú hodnotu funkcie $|f(z)|^2$ na kružici $|z| = r$, kde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a rad má kladný polomer konvergencie R a $r < R$; t.j. zistite hodnotu integrálu

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right|^2 \mathrm{d}\varphi \ .$$

6.14 Nech $f: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá v niektorom okolí bodu z_0. Vyjadrite potom limitu

$$\lim_{r\to 0^+} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

(krivka je ACW orientovaná) pomocou hodnôt funkcie f.

Kapitola 7

Cauchyho veta, Cauchyho integrálny vzorec

7.1 Ukážte, že integrály:

$$a) \oint_{|z|=1} \frac{z}{z-2}\mathrm{d}z \qquad b) \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2z+2} \qquad c) \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\cos(z)}$$

majú hodnotu nula (aj bez ohľadu na orientáciu kriviek)!

7.2 Ukážte, že pre každdú regulárnu krivku je

$$a) \int_{-2}^{-2+i} (z+2)^2 \mathrm{d}z = -\frac{1}{3}i \qquad b) \int_{0}^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) \mathrm{d}z = e + e^{-1}$$

7.3 Nájdite $\int_{-\pi i}^{0} e^{-z}\mathrm{d}z$ po ľubovoľnej regulárnej krivke.

7.4 Výpočtom ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$\oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{z} \quad \text{ukážte, že:} \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x)\mathrm{d}x = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

7.5 Vypočítajte integrály po uzavretých krivkách pomocou Cauchyho integrálneho vzorca (predpokladá sa kladná orientácia):

$$a) \oint_{|z+i|=2} \frac{e^z+1}{z+i}\mathrm{d}z \qquad b) \oint_{|z|=9} \frac{z^2+e^z}{z}\mathrm{d}z \qquad c) \oint_{|z+1|=1} \frac{2z^2-3z+4}{z+1}\mathrm{d}z$$

$$d) \oint_{|z|=1/2} \frac{2z^2-3z+4}{z+1}\mathrm{d}z \qquad e) \oint_{|z|=5/2} \frac{z}{(z-2)(z-3)}\mathrm{d}z \qquad f) \oint_{|z-i|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4}$$

$$g) \oint_{|z|=3/2} \frac{\sin(z)}{(z+2)(z-i)}\mathrm{d}z \qquad h) \oint_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{(z+3)(z+i)}\mathrm{d}z \qquad i) \oint_{|z|=4/5} \frac{\mathrm{d}z}{z^5+1}$$

$$j) \oint_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z \qquad k) \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-2}\mathrm{d}z \qquad l) \oint_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$$

$$m) \oint_{|z|=3/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z \qquad n) \oint_{|z-1|=1/2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z \qquad o) \oint_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^4(z-b)},\ |a| < R < |b|$$

7.6 Vypočítajte integrály:

$$a) \int_\Gamma \frac{e^z}{\frac{\pi}{2}(z+i)}\mathrm{d}z \qquad b) \int_\Gamma \frac{\cos(z)}{z}\mathrm{d}z$$

kde Γ je uzavretá lomená čiara s vrcholmi: $2+2i, -2+2i, -2-2i$.

7.7 Vypočítajte integrály:

$$a) \oint_{|z-2i|=3/2} \frac{e^z}{z^2(z-i)^3}\mathrm{d}z \qquad b) \oint_{|z+2i|=3/2} \frac{\cos(z)}{z(z+i)^2}\mathrm{d}z$$

7.8 Vypočítajte integrály po ľubovoľnej uzavretej regulárnej krivke L: ($x_0 \in (-2, 2)$)

$$a)\ \oint_L \frac{\sin(z)}{(z-2i)^2}\mathrm{d}z \qquad b)\ \oint_L \frac{\sin(z)}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z \qquad c)\ \oint_L \frac{\tan\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-x_0)^2}\mathrm{d}z \qquad d)\ \oint_L \frac{\sinh(2z)}{z^4}\mathrm{d}z$$

7.9 Preverte tvrdenie: nech $U \subset \mathbb{C}$ je otvorená množina, nech $f_j, j = 1, 2, \dots$ sú analytické funkcie z U do $\mathbb{C}$. Nech existuje funkcia $f:\ U \to \mathbb{C}$, že na každom kompakte $K \subset U$ je f rovnomernou limmitou postupnosti $\{f_j\}_j$. Potom f je analytická! (Porovnajte s tvrdením z reálnej analýzy! V čom je rozdiel?)

7.10 Preverte tvrdenie: nech $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkcia a nech vyhovuje nerovnosti

$$|f(z)| \leq M(1+|z|)^p,$$

kde p, M sú nejaké kladné konštanty. Potom f je polynóm stupňa najviac p.

Kapitola 8

Taylorov rad

8.1 Nasledovné funkcie rozvinúť do Taylorovho radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

$a)$ $\sinh(2z)$ $b)$ $\cosh\left(\frac{z}{2}\right)$ $c)$ $\sin^2(z)$ $d)$ $\cos^2(z)$ $e)$ $\dfrac{1}{2z-1}$

$f)$ $\cos^3(z)$ $g)$ $\dfrac{z^2}{3z+2}$ $h)$ $\dfrac{1}{2z^2-1}$ $i)$ $\dfrac{z}{3z^2+4}$ $j)$ $\dfrac{z+i}{z-i}$

$k)$ $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$ $l)$ $\dfrac{1}{(1-z^6)^3}$ $m)$ $\dfrac{1}{1+z+z^2}$ $n)$ $e^z \sin z$ $o)$ $e^z \cos z$

$p)$ $\sin^2 z \cos^4 z$ $q)$ $\sinh z \sin z$ $r)$ $\sin z \cosh z$ $s)$ ze^{iz^2}

8.2 Nasledovné funkcie rozvinúť do Taylorovho radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ a nájdite polomer konvergencie:

$a)$ $\dfrac{1}{z}$ $b)$ $\dfrac{z}{z-1}$ $c)$ $\dfrac{z}{z^2-4z+8}$ $d)$ $\sin(z-4)$ $e)$ $\cos(z+3)$

8.3 Nasledovné funkcie rozvinúť do Taylorovho radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a nájsť polomer konvergencie

$a)$ $\cosh^2(z)$ $b)$ $(a+z)^\alpha$ $c)$ $\sqrt{z+i}$ $d)$ $\dfrac{1}{az+b},\ b \neq 0$

$e)$ $\dfrac{z}{z^2-4z+13}$ $f)$ $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ $g)$ $\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ $h)$ $\operatorname{Arctan}(z),\ \operatorname{Arctan}(0)=0$

$i)$ $\operatorname{Argsinh}(z),\ \operatorname{Argsinh}(0)=0$ $j)$ $\ln(z^2-3z+2)$ $k)$ $\displaystyle\int_0^z e^{\xi^2} \mathrm{d}\xi$ $l)$ $\displaystyle\int_0^z \frac{\sin(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$

8.4 Nasledovné funkcie rozvinúť do Taylorovho radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$ a nájsť polomer konvergencie:

$a)$ $\dfrac{z}{z+2}$ $b)$ $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$ $c)$ $\ln(z)$ $d)$ $\sin(2z-z^2)$

$e)$ $\sqrt[3]{z},\ \left(\sqrt[3]{i} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

8.5 Rozložte funkciu

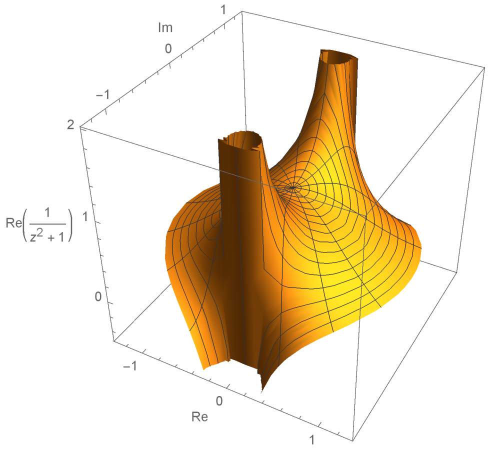
$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

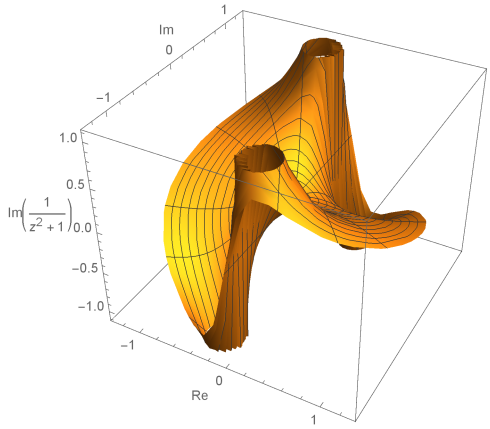
do Taylorovho radu so stredom v bode i.

8.6 Rozložte funkciu

$$z \mapsto \frac{1}{z^2}$$

do Taylorovho radu so stredom v bode i.





8.7 Rozložte funkciu

$$z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$$

do Taylorovho radu so stredom v bode $i+w$, $w \neq 0$.

8.8 Nájdite prvých päť členov Taylorovho radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

funkcií:

$a)$ $e^{z\sin(z)}$	$b)$ e^{e^z}	$c)$ $e^z \ln(1+z)$	$d)$ $e^{z\ln(1+z)}$	$e)$ $\sqrt{\cos(z)}$, $\left(\sqrt{\cos(0)}=1\right)$
$f)$ $\tan z$	$g)$ $\dfrac{1}{\cos z}$	$h)$ $\cos[\sin z]$	$i)$ $\dfrac{1}{1+i\sin z}$	$j)$ $\dfrac{z}{\sin z}$

8.9 Nájdite riešenia nasledovných diferenciálnych rovníc v tvare potenčného radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

$a)$ $w'' - zw = 0$

$b)$ $(1-z^2)w'' - 2zw' + \alpha w = 0$

$c)$ $(1-z^2)w'' - 4zw' - 2w = 0$

$d)$ $z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\, w' - \alpha\beta w = 0$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$ a γ je celé záporné číslo.

8.10 Nájdite riešenie Cauchyho úlohy pre diferenciálnu rovnicu tvare potenčného radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

$$w'' - z^2 w = 0,\ w(0) = 0,\ w'(0) = 1.$$

8.11 Nájdite riešenie Cauchyho úlohy pre diferenciálnu rovnicu tvare potenčného radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

$$(i - z^2)w'' - zw = 0,\ w(0) = 1,\ w'(0) = 0.$$

Aký je polomer konvergencie tohto riešenia?

8.12 Nájdite riešenie Cauchyho úlohy pre diferenciálnu rovnicu tvare potenčného radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

$$z^2 w'' + zw + (z^2 - a^2) = 0,\ w(0) = 0,\ w'(0) = 1; \quad a \in \mathbb{C}.$$

Aký je polomer konvergencie tohto riešenia?

Kapitola 9

Laurentov rad

9.1 Nájdite množiny na ktorých sú Laurentove rady konvergentné:

a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{-|n|}(z+1+i)^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^n+1}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2}(z-3)^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{-n^2} z^{n^4}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^4+i}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z+i)^{2n}}{\cosh n}$

9.2 Preverte formule:

a) $\displaystyle\frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n,\ |z| > |b|$ *b)* $\displaystyle\frac{1}{z^2-b^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-2(n+1)} z^{2n},\ |z| > |b|$

c) $\displaystyle\frac{z^2}{z^2+b^2} = \sum_{n=-\infty}^{0} (-1)^n b^{-2n} z^{2n},\ |z| > |b|$ *d)* $\displaystyle\frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (b-a)^{-n-1}(z-a)^n,\ a \neq b,\ |z-a| > |b-a|$

9.3 Nasledovné funkcie rozvinúť do Laurentovho radu v mocninách z a v medzikruží $1 < |z| < 2$:

a) $\displaystyle\frac{1}{(1+z)(z-2)}$ *b)* $\displaystyle\frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$ *c)* $\displaystyle\frac{z}{(z^2+1)(z+2)}$

d) $\displaystyle\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ *e)* $\displaystyle\frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$ *f)* $\displaystyle\frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$

9.4 Nasledovné funkcie rozvinúť do Laurentovho radu v okolí uvedených bodov a určiť oblasť, v ktorej rozvoj platí:

a) $\displaystyle\frac{1}{1+z},\ \infty$ *b)* $\displaystyle\frac{1}{3z-4},\ \infty$ *c)* $\displaystyle\frac{1}{z(2-3z)},\ 0, 2/3, \infty$ *d)* $z^3 e^{1/z},\ 0$

e) $\displaystyle\cos\left(\frac{z}{z-2}\right),\ 2$ *f)* $\displaystyle\sin\left(\frac{z}{z-i}\right),\ i$ *g)* $\displaystyle\frac{z}{(z-1)(z-i)},\ 1, i, \infty$

9.5 Nájdite nulové body a zistite ich násobnosť:

a) $z^2 e^{-z^2}$ *b)* $e^{(z-1)^2} - 1$ *c)* $z^3 \sin(z)$ *d)* $\displaystyle\frac{\sin\left(z^3\right)}{z}$

e) $z^2 \sin\left(z^3\right)$ *f)* $z^2(z-2)\sin\left(z^3\right)$ *g)* $z^3\left[1-\cos(4z)\right]$

9.6 Nájdite izolované singulárne body analytickej funkcie a klasifikujte ich:

a) $\dfrac{1}{z^2+4}$ *b)* $\dfrac{z+1}{z-z^2}$ *c)* $\dfrac{1+2z^2}{z+z^3}$ *d)* $\dfrac{z^3}{(1-z)^2}$ *e)* $\dfrac{z^3}{(1-z)^3}$

f) $\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$ *g)* $\dfrac{\sin(z)}{z}$ *h)* $\dfrac{e^z-1}{z}$ *i)* ze^{-z} *j)* $\dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$

k) $\dfrac{1-\cos(z)}{z^3}$ *l)* $\dfrac{1-\cos(z)}{z^6}$ *m)* $\sin\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$ *n)* $\cos\left(\dfrac{z}{2-z}\right)$ *o)* $\tan(z)$

p) $\dfrac{\tan(z)}{z}$ *q)* $z\cot(z)$ *r)* $\dfrac{\cot(z)}{z}$

9.7 Nasledovné funkcie rozvinúť do Laurentovho radu v okolí uvedených bodov a v medzikružiach:

a) $\dfrac{1}{(z-a)^k},\ (a\neq 0, k\in\mathbb{N})\ 0,\infty$ *b)* $\dfrac{1}{z(1-z)},\ 0,1,\infty$

c) $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)},\ (0<|a|<|b|),\ 0,a,\infty;|a|<|z|<|b|$ *d)* $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},\ 2;1<|z|<2$

9.8 Zistite násobnosť nulového bodu $z=0$ funkcií:

a) $sin^3(z)$ *b)* $z^2\sin(z)$ *c)* $[1-\cos(z)]\sin(z^2)$ *d)* $\left(e^{z^2}-1\right)(1-\cos(z))^2$

e) $\dfrac{\sin^3(z)}{z^2}$ *f)* $\dfrac{z^3}{\sin(z)}$ *g)* $\dfrac{1-\cos(z^2)}{\sin(z)}$ *h)* $\dfrac{\left(e^{z^2}-1\right)^2}{\sin^2(z)}$

9.9 Nájdite hlavnú časť Laurentovho radu uvedených funkcií v okolí uvedených bodov:

a) $\dfrac{z}{(z+2)^2},\ z_0=-2$ *b)* $\dfrac{e^z+1}{e^z-1},\ z_0=0$

c) $\dfrac{e^z+1}{e^z-1},\ z_0=2\pi i$ *d)* $\dfrac{e^z+1}{e^z-1},\ z_0=4\pi i$

e) $\dfrac{z-1}{\sin^2 z},\ z_0=0$ *f)* $\dfrac{e^z}{z^2+b^2},\ z_0=ib,\ b>0$

Kapitola 10

Rezíduá

10.1 Nájdite rezíduá uvedených funkcií v konečných izolovaných singulárnych bodoch:

a) $\dfrac{1}{z(z-1)}$ *b)* $\dfrac{z}{(z-2)(z+i)}$ *c)* $\dfrac{1}{z^2+9}$ *d)* $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ *e)* $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)^2}$

f) $\dfrac{\sin(\pi z)}{z^2(1-z)}$ *g)* $\dfrac{\cos(z)}{z^3(z-1)^2}$ *h)* $\dfrac{1}{\sin(z)}$ *i)* $\dfrac{z}{1-\cos(z)}$ *j)* $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+1)}$

k) $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z(i-z)}$ *l)* $\cos\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$ *m)* $\tan^2(z)$ *n)* $\dfrac{\cot(z)}{z}$ *o)* $\dfrac{z-1}{1-\cosh(z)}$

p) $\dfrac{1}{\sin z^2}$ *q)* $\tanh z$ *r)* $\dfrac{1}{1+e^z}$ *s)* $\dfrac{z^2}{1+z^4}$ *t)* $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n},\ n\in\mathbb{N}$

10.2 Nájdite rezíduá uvedených funkcií v nekonečne:

a) z *b)* z^2 *c)* $\dfrac{1}{z}$ *d)* $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$ *e)* $z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$

f) $\dfrac{1}{1+z^2}$ *g)* $\dfrac{1+z^2}{1-z^2}$ *h)* $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$ *i)* $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$ *j)* e^z

k) $e^{\frac{1}{z}}$ *l)* $e^{\frac{1}{z^3}}$

10.3 Ak uvedené rezíduá majú zmysel, tak potom:

- pre párnu funkciu platí

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0,\ \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z)$$

- pre nepárnu funkciu platí

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z).$$

Preverte!

10.4 Nech

$$f(z) = g(az),\ a\neq 0.$$

Nájdite vzťah medzi číslami

$$\operatorname*{res}_{z=az_0} f(z),\ \operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

10.5 Nájdite rezíduá uvedených funkcií v konečných singulárnych bodoch aj v nekonečne:

a) $\dfrac{1}{z(z+i)}$ *b)* $\dfrac{1}{z^2(z-2)}$ *c)* $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$ *d)* $\dfrac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$ *e)* $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$

f) $\dfrac{\cos z}{z^2+1}$ *g)* $\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$ *h)* $\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$

10.6 Vypočítajte

a) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z},\ n = 1, 2, \ldots$ *b)* $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$ *c)* $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\tan z - z}{(1-\cos z)^2}$

d) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^{n-2}}{\sinh^n z},\ n = 2, 3, \ldots$ *e)* $\operatorname*{res}_{z=0} z^{n-3}\cot^n z,\ n = 2, 3, \ldots$ *f)* $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z}{\cosh z - 1 - \frac{1}{2}z^2}$

10.7 Pre akú hodnotu komplexného parametra a zadáva predpis

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_1^z \frac{a + e^{1/\xi}}{\xi}\mathrm{d}\xi$$

jednoznačnú funkciu v komplexnej rovine?

10.8 Pre aké hodnoty komplexných parametrov a, b zadáva predpis

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_1^z \frac{a\sin\xi + b\xi\cos\xi}{\xi^2}\mathrm{d}\xi$$

jednoznačnú funkciu v komplexnej rovine?

10.9 Pre akú hodnotu komplexného parametra a zadáva predpis

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_1^z \frac{\sin(\xi + a\xi^3)}{\xi^4}\mathrm{d}\xi$$

jednoznačnú funkciu v komplexnej rovine?

10.10 Vypočítajte integrály po jednoduchých uzavretých krivkách:

a) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$ *b)* $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$ *c)* $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z+2)}$ *d)* $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\mathrm{d}z}{z^4-1}$

e) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$ *f)* $\displaystyle\oint_{|z|=1} \sin^2\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$ *g)* $\displaystyle\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$ *h)* $\displaystyle\oint_{|z|=1} z^2 e^{\frac{3}{z}}\mathrm{d}z$

i) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \cos\left(\frac{1}{z}\right)e^{\frac{2}{z}}\mathrm{d}z$ *j)* $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{2}{z}\right)}{e^{\frac{1}{z}}}\mathrm{d}z$ *k)* $\displaystyle\oint_{|z-1-i|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$

l) $\displaystyle\oint_{(\operatorname{Re} z)^{2/3}+(\operatorname{Im} z)^{2/3}=2^{2/3}} \frac{\sin z\mathrm{d}z}{(z+1)^3}$

m) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)}$ *n)* $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}\mathrm{d}z$ *o)* $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}\mathrm{d}z$ *p)* $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$

q) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \sin\frac{z}{z+1}\mathrm{d}z$ *r)* $\displaystyle\oint_{|z|=2} z\sin\frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z$ *s)* $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \sin\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z$ *t)* $\displaystyle\oint_{|z|=2} z\cos\frac{z}{z+1}\mathrm{d}z$

u) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin z\mathrm{d}z}{(z^3-z)(z-i)}$ *v)* $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cot z}{z}\mathrm{d}z$ *w)* $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{z\mathrm{d}z}{e^{z^2}-1}$ *x)* $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{z^3\mathrm{d}z}{e^{z^2}-1}$

10.11 Vypočítajte nevlastné integrály (pomocou rezíduí):

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$ *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ *c)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x+1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{1+x^4}\mathrm{d}x$ *e)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{i+x^3}$ *f)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2ix-2}$ *h)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3},\ a > 0$ *i)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6\mathrm{d}x}{(x^4+a^4)^2},\ a > 0$

j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$ *k)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+4ix-5)^2}$ *l)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+6x^2+25}$

m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2ix-1-a^2)^3},\ a > 0$

10.12 Vypočítajte
$$\int_0^\infty \frac{x^4 \mathrm{d}x}{(a+bx^2)^4},\ a,b>0.$$

10.13 Vypočítajte
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2},\ a,b>0.$$

10.14 Vypočítajte
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2iax-a^2-b^2)^n},\ a,b>0,\ n=1,2,\dots$$

10.15 Vypočítajte
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^n},\ a,b>0,\ n=1,2,\dots$$

10.16 Nech $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je diferencovateľná v polrovine $\operatorname{Im} z>0$ s výmikou pólov $a_1,\dots a_k$ a spojitá až do hranice tejto polroviny (zase okrem uvažovaných pólov). Ak pri $z\to\infty$ pri $\operatorname{Im} z>0$ platí
$$f(z)=o(1),$$
potom
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{ix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{l=1}^k \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z)e^{iz}.$$
Preverte!

10.17 Vypočítajte nevlastné integrály:

$a)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{(x-1)e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$ $b)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2-2ix-2}\mathrm{d}x$

$c)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^3}\mathrm{d}x$ $d)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ix}}{x^4+8x^2+16}\mathrm{d}x$

$e)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}\sqrt{x+i}}{x^2+1}\mathrm{d}x,\ \sqrt{z+i}|_{z=0}=e^{i\pi/4}$

$f)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+2ix-2)^2}\mathrm{d}x$ $g)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$

$h)$ $\displaystyle\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$ $i)$ $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{zt^z}{z^2+1}\mathrm{d}z,\ \sigma>0, 0<t<1$

$j)$ $\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{tz}}{(z^2-1)^2}\mathrm{d}z,\ (i)\ t>0;\ (ii)\ t<0;\ (iii)\ t=0$

$k)$ $\displaystyle\int_{2i-\infty}^{2i+\infty} \frac{z\sin zt}{z^2+1}\mathrm{d}z,\ t>0$ $l)$ $\displaystyle\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{z\cos zt}{(z+1)^2}\mathrm{d}z,\ t>0$

10.18 Nech $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ spĺňa predpoklady z príkladu 10.16 a naviac f je reálna pri reálnych hodnotách z, potom
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos x\mathrm{d}x = -2\pi\operatorname{Im}\left\{\sum_{l=1}^k \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z)e^{iz}\right\},\ \int_{-\infty}^\infty f(x)\sin x\mathrm{d}x = 2\pi\operatorname{Re}\left\{\sum_{l=1}^k \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z)e^{iz}\right\}.$$
Preverte!

10.19 Vypočítajte nevlastné integrály:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2 - 4x + 5} \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 10} \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x, \ a > 0$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x, \ a > 0$

h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)^2} \mathrm{d}x, \ a > 0$

i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} \mathrm{d}x, \ a > 0, \ \mathrm{Re}\, b > 0$

j) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} \mathrm{d}x, \ a > 0, \ \mathrm{Re}\, b > 0$

k) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^3} \mathrm{d}x, \ \mathrm{Re}\, a > 0$

l) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \mathrm{d}x, \ \mathrm{Re}\, a, \mathrm{Re}\, b > 0$

m) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4 + x^2 + 1} \mathrm{d}x, \ a > 0$

10.20 Nech $r:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je racionálna funkcia, ktorá má v polrovine $\mathrm{Re}\, z > 0$ póly

$$a_1, \ldots, a_n,$$

a póly na reálnej osi

$$b_1, \ldots, b_m.$$

Potom ak

$$r(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right), \ z \to \infty,$$

tak

$$(\mathrm{V.P.}) \int_{-\infty}^{\infty} r(x) e^{ix} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{l=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} r(z) e^{iz} + \pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=b_k} r(z) e^{iz}.$$

Preverte!

Ako príklad si uveďme výpočet známeho Dirichletovho integrálu

$$\mathfrak{D} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

Potom

$$2\mathfrak{D} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = (\mathrm{V.P.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left\{ (\mathrm{V.P.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x \right\},$$

a

$$(\mathrm{V.P.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x = \pi i \times 1.$$

Takže

$$2\mathfrak{D} = \mathrm{Im}\{\pi i\} = \pi \ \Rightarrow \ \mathfrak{D} = \frac{\pi}{2}.$$

10.21 Vypočítajte:

a) $\displaystyle(\mathrm{V.P.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)(x - y)}, \ a > 0, y \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle(\mathrm{V.P.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x}, \ (i)\ a > 0;\ (ii)\ a < 0$

c) $\displaystyle(\mathrm{V.P.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} \mathrm{d}x, \ a \in \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} \mathrm{d}x, \ n = 1, 2, \ldots$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} \mathrm{d}x, \ a > 0, \ \mathrm{Re}\, b > 0$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \mathrm{d}x, \ a > 0, \ \mathrm{Re}\, b > 0$

Literatúra

[1] **Demetrian, M.:** *Základy teórie funkcií komplexnej premennej.* Bratislava : Univerzita Komenského, 2013.

[2] **Evgrafov, M.A. a kol.:** *Sbornik zadač po teorii analitičeskich funkcii.* Moskva : NAUKA, 1972.

[3] **Greene, R.E., Krantz, S.G.:** *Function Theory of One Complex Variable.* Rhode Island : AMS Pub., Third ed., 2006.