Besselova J_n – funkcia ako rieš. Besselovej rovnice

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[n\varphi - x\sin\varphi]\,d\varphi, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

Zrejme $\forall x\in\mathbb{R}$ je

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin[n\varphi - x\sin\varphi]\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$\overset{\text{P.P.}}{=} \frac{1}{\pi}\Big[-\cos\varphi\sin[n\varphi - x\sin\varphi] + \int \cos\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\cdot[n - x\cos\varphi]\,d\varphi\Big]_0^\pi =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\,d\varphi -$$

$$- \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\,d\varphi =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\,d\varphi$$

$$- \frac{x}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi \cos[n\varphi - x\sin\varphi]\,d\varphi}_{=J_n(x)}$$

$$+ \frac{x}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\,d\varphi}_{=-J_n''(x)} =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\,d\varphi - x\cdot J_n(x) - x J_n''(x)$$

Takže máme:

$$J_n'(x) = \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi \cos[n\varphi - x\sin\varphi]\, d\varphi - x J_n(x) - x J_n''(x) \quad (\dagger)$$

Teraz:

$$\int_0^\pi \cos[n\varphi - x\sin\varphi](n - x\cos\varphi)\, d\varphi = 0$$

čiže

$$\frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos[n\varphi - x\sin\varphi]\, d\varphi = \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\, d\varphi = 0$$

$$n J_n(x) = \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\, d\varphi \quad (\ddagger)$$

teda z $(\dagger)$ a $(\ddagger)$

máme:

$$x J_n'(x) = \frac{nx}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cos[n\varphi - x\sin\varphi]\, d\varphi - x^2 J_n(x) - x^2 J_n''(x)$$

alebo aj

$$x J_n'(x) = n^2 J_n(x) - x^2 J_n(x) - x^2 J_n''(x)$$

alebo finálne platí ako identita:

$$\boxed{x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0}$$