$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

- Ak $0<b<1$ tak f je spojitá v R, lebo uvedený rad rovnomerne (a abs.) konverguje v R – ďalej predpokladáme, že $0<b<1$
- Ak $ab>1$, tak uvedený rad zjavne nemožno derivovať člen po člene
- Ukážeme, že ak:

  (a) a je nepárne číslo

  (b) $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$

  tak f nemá nikde deriváciu:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos[a^n\pi x]}{h} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}(\quad) + \sum_{n=N}^{\infty}(\quad) \equiv S_N + R_N$$

odhadneme $|S_N|$ zhora:

$$|\cos[a^n\pi(x+h)] - \cos[a^n\pi x]| = |a^n\pi h \sin[a^n\pi(x+\theta h)]| \leq$$

$\leq a^n\pi|h|$, teda:

$$\underline{\underline{|S_N|}} \leq \sum_{n=0}^{N-1} \pi a^n b^n = \pi \frac{a^N b^N - 1}{ab-1} < \underline{\underline{\pi \frac{a^N b^N}{ab-1}}}$$

odhadneme $|R_N|$ z dola: na to použijeme špeciálny výber čísla h, takýto:

$$a^N x = \alpha_N + \xi_N$$

kde: α_N je celé číslo a $-\frac{1}{2} \leq \xi_N < \frac{1}{2}$, a definujeme

~~kde~~

$$\boxed{h = \frac{1-\xi_N}{a^m}}$$

takéto h je v rozmedzí od 0 do $\frac{3}{2a^N}$.

Ďalej:

$$a^n \pi (x+h) = a^{n-N} a^N \pi(x+h) = a^{n-N} \pi(\alpha_N + 1)$$

Teraz z nepárnosti čísla a:

- $$\cos[a^n \pi (x+h)] = \cos[a^{n-N} \pi (\alpha_N + 1)] = (-1)^{\alpha_N + 1}$$

- $$\cos[a^n \pi x] = \cos[a^{n-N} \pi (\alpha_N + \xi_N)] = \cos[a^{n-N} \pi \alpha_N] \cos[a^{n-N} \pi \xi_N] = (-1)^{\alpha_N} \cos[a^{n-N} \pi \xi_N]$$

Takže máme zvyšok R_N v tvare:

$$R_N = \frac{(-1)^{\alpha_N+1}}{h} \sum_{n=N}^{\infty} b^n \{ 1 + \cos[a^{n-N} \pi \xi_N] \}$$

Všetky členy radu sú kladné preto ak vezmeme len časť prvého ~~prvý~~ tak máme:

$$|R_N| > \frac{b^N}{|h|} > \Big|^{0<|h|<\frac{3}{2a^N}} > \frac{2}{3} b^N a^n$$

takže pre takto zvolené h máme:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geq |R_N| - |S_N| \geq \underbrace{\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)}_{\omega} a^N b^N$$

podmienka $\omega > 0$ dáva:

$$\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{ab-1} < \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab - 1 > \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \boxed{ab > 1 + \frac{3}{2}\pi} \; (*)$$

Takže ak je $(*)$ splnená tak v odkiaľ v limite $N \to \infty$ (t.j. $h \to 0$) pravá strana rastie nad všetky medze a teda nemôže existovať:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}.$$